

BULLETIN

DES

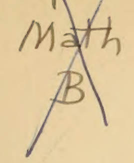
SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

14950 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL

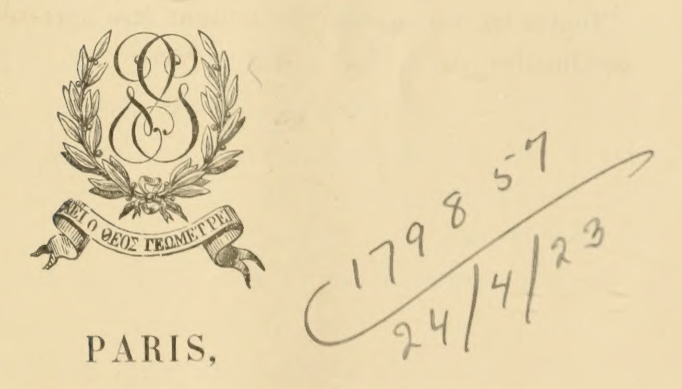
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XIII. — ANNÉE 1889.

(TOME XXIII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Gehalten an der Universität Königsberg, von Dr *Franz Neumann*, Professor der Physik und Mineralogie; herausgegeben von Dr *Oskar-Emil Meyer*, Professor der Physik an der Universität Breslau. Leipzig; Teubner, 1885.

Le Livre dont nous allons rendre compte fait partie du Cours de Physique mathématique publié par les élèves de Fr. Neumann, d'après ses Leçons. Il a été rédigé par M. O.-E. Meyer principalement, d'après ses notes sténographiées et celles de son frère, Lothar Meyer. Les Leçons ainsi recueillies en 1857-58 se retrouvent dans les Chapitres I à VII, IX, XI, XIII et XV à XX. Celles de l'année 1859-60 ont fourni la matière des Chapitres VIII, X et XIV. M. Meyer a pu aussi profiter des notes recueillies par M. Baumgarten pendant l'année 1869-70 et par M. V. Voigt pendant l'hiver 1873-74. De ces dernières on a tiré tout le Chapitre XII sur l'élasticité des cristaux, et le Chapitre XXI sur la flexion des poutres. Le Chapitre XII était jusqu'ici resté inédit. Les Leçons XX et XXI portent sur des parties mal connues de la théorie, choc des barres, vibrations des lames. Les Chapitres IX et XVII contiennent l'exposition des travaux de Neumann sur les déformations thermiques et sur la dispersion.

Après une courte introduction historique, dans laquelle les rôles des fondateurs de la théorie, Fresnel, Navier, Poisson, Cauchy, sont nettement indiqués, M. Neumann définit la pression en un point à peu près comme Lamé. Lorsqu'on se place au point de vue de la théorie moléculaire, la définition de M. de Saint-Venant me paraît bien préférable.

Les théorèmes mécaniques sur les pressions font l'objet du Chapitre II. Au lieu de raisonner sur des éléments de volume, l'auteur raisonne sur des volumes finis (parallélépipède ou tétraèdre), en supposant que les forces élastiques soient développables en série de Taylor. Les calculs sont notablement allongés sans grand avantage; il reste en effet nécessaire de terminer par la vérification que les conditions internes et superficielles ainsi obtenues sont suffisantes pour l'équilibre d'une portion finie quelconque du corps.

Dans le Chapitre III, la représentation géométrique des pressions sur les divers éléments plans qui passent par un même point est étudiée en détail.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude géométrique de la distribution des dilatations, et le Chapitre V à l'établissement des relations entre les pressions et les déformations pour un solide isotrope, lorsqu'on regarde comme évident que ces équations sont linéaires.

Théorie moléculaire. Forces centrales. — Dans les trois Chapitres qui suivent, VI, VII, VIII, l'auteur se place au point de vue de la théorie moléculaire. Il expose d'abord la théorie de Navier, qui ne donne que les équations aux dérivées partielles de l'intérieur du corps; puis la théorie de Poisson qui fournit les conditions à la surface, enfin sa théorie propre, dans laquelle il trouve commode l'emploi du principe des déplacements virtuels.

La notion de pression n'était pas introduite dans la théorie de Navier; elle est introduite dans la théorie de Poisson, mais d'une manière qui ne s'applique qu'aux cristaux qui ont trois plans de symétrie orthogonaux; les calculs directs ne s'appliquent qu'à ces plans, et c'est par le théorème du tétraèdre que l'on détermine les pressions sur des plans obliques. Pour le calcul direct en effet, on cherche l'action d'une file de molécules limitée à l'élément plan,

sur toute la partie du milieu qui est située au delà de cet élément, en supposant que cette file est normale à l'élément plan. Dans ce Chapitre, Neumann distingue comme Poisson les premières sommations, qu'il faut faire comme des additions, en acceptant la structure réticulaire du milieu, et les suivantes que l'on peut remplacer par des intégrations. Mais il réserve pour le Chapitre suivant, relativement aux points situés près de la surface, des remarques qui auraient pu trouver place avantageusement dans ce Chapitre sauf au point de vue historique, et qui, à dire vrai, devraient être exposées au début du Livre, bien dégagées de toute considération théorique particulière, car elles sont d'ordre expérimental, et aucune théorie ne peut s'y soustraire. C'est à ce point de vue que je vais les exposer, à peu près comme je l'ai fait dans des Leçons autographiées il y a quatre ans (¹).

Considérons à l'intérieur d'un corps une surface PQ, qui le divise en deux parties A et B. Si l'on supprime la partie B du corps, il faudra, pour maintenir la partie A dans le même état, ajouter aux forces que subit déjà chacun de ses éléments un système convenable de nouvelles forces, dites *forces élastiques*. L'expérience montre que ces nouvelles forces sont appliquées à une partie de A, comprise entre la surface de séparation PQ et une surface très voisine P′Q′. Les actions égales et opposées que A exerce sur B ont aussi leurs points d'application compris entre la surface PQ et une surface très voisine P″Q″; en sorte que les actions mutuelles de A et de B ne dépendent que de l'état de la portion de matière, comprise entre deux surfaces situées de part et d'autre de la surface de séparation et très près.

De quel ordre de grandeur est la distance de ces deux surfaces? Des expériences de Quincke (1869) permettent de répondre à cette question, et de fixer à $0^{mm},00005$ environ l'épaisseur de matière solide qui présente les mêmes propriétés qu'un solide indéfini. On observe l'ascension d'un liquide entre deux lames de verre parallèles, sur lesquelles on a déposé une couche d'argent, formant un prisme très aigu à arête verticale. Ce dépôt peut se faire avec une

(¹) *Leçons sur l'élasticité*, recueillies par MM. Antony, Guigues, Lacroix, Lugol. Toulouse, premier semestre 1884-85.

très grande perfection au moyen du procédé Martin pour l'argenture du verre. Là où le verre est nu, le niveau de l'eau atteint une certaine hauteur; à partir de l'arête où commence le dépôt d'argent ce niveau s'abaisse peu à peu, pour atteindre de nouveau une hauteur fixe, là où la couche d'argent équivaut à une lame d'argent plein. Le niveau dessine ainsi une courbe allongée ayant deux asymptotes horizontales. Dans une expérience, la hauteur de l'eau au contact du verre était de 14^{mm}; elle s'abaissait graduellement jusqu'à moins de 9^{mm} au contact de l'argent. Marquant la position de la génératrice, pour laquelle le niveau de l'eau est devenu horizontal, on détermine l'épaisseur de la lame transparente d'argent à cet endroit par une méthode optique. M. Quincke a trouvé ainsi, pour les épaisseurs équivalentes à une masse indéfinie :

	mm
Argent au contact de l'eau.........	> 0,000054
Sulfure d'argent-mercure..........	0,000048
Iodure d'argent-mercure...........	0,000059
Collodion-mercure................	0,000080

Les essais, faits pour déterminer la plus petite épaisseur d'une membrane liquide, qui conserve une tension superficielle invariable, donnent des nombres de même ordre de grandeur.

Telle est l'épaisseur de la couche superficielle de Neumann, dont la déformation intérieure est négligée dans tous les problèmes élastiques. Mais il y a plus; en supposant les pressions élastiques appliquées exactement dans la surface de séparation, on néglige la distance du point d'application effectif à la surface de séparation, distance qui est de même ordre de grandeur que cette épaisseur, et qui dépend de la loi d'action aux diverses profondeurs. Pour avoir le droit d'agir ainsi, il faut que dans les applications la pression soit suffisamment uniforme dans une surface et varie linéairement dans un volume dont les dimensions sont très grandes, par rapport à cette épaisseur, par exemple 1000 fois plus grandes. Ces observations restituent à la théorie de l'élasticité son caractère de théorie approchée, en même temps qu'elles montrent nettement à quelles conditions on peut compter sur son accord avec l'observation. Il faut que les actions élastiques et par suite les déformations varient assez lentement pour être bien représentées

dans un intervalle de $1000 \times 0^{mm},00005$ ou de $\frac{1}{20}$ de millimètre environ par une formule linéaire; par *bien représentées,* j'entends que l'écart ne dépasse pas 0,001 en valeur relative par exemple. Ces limites n'ont évidemment rien d'absolu, elles dépendent de la précision des observations; si nos moyens de mesure deviennent 10 fois plus précis, les écarts tolérés entre la formule linéaire et la réalité dans l'étendue de $\frac{1}{20}$ de millimètre devront être seulement de 0,0001 en valeur relative. L'ensemble de ces remarques peut être résumé en deux mots : l'élément de volume dont on peut considérer la déformation comme homogène a, dans la théorie de l'élasticité des solides naturels, environ $0^{mm},05$ de côté; il a même valeur à peu près pour les liquides dans la théorie de l'Hydrodynamique.

Quant aux gaz, les dimensions du plus petit volume qu'on puisse traiter comme jouissant des propriétés d'une masse très grande augmentent considérablement quand la pression diminue. Sans adopter pour cela la théorie cinétique des gaz, on peut, à titre de renseignement, lui emprunter les résultats suivants : le chemin moyen varie en raison inverse de la pression et proportionnellement à la racine carrée de la température absolue. Il en est de même de l'élément de volume qu'on doit introduire dans la théorie des mouvements d'ensemble des gaz. Si, sans changer la température, on réduit la pression à 1^{mm} de mercure, puis à $\frac{1}{1000}$ de millimètre, ce qui est à peu près la limite du vide que l'on sait produire actuellement, le côté de l'élément de volume devient environ 10^3 et 10^6 fois plus grand qu'à la pression atmosphérique. Cela fait pour l'épaisseur minimum qui présente les propriétés d'un gaz indéfini, indépendantes de la présence des parois, au moins $0^{mm},05$ puis 50^{mm} en supposant, ce qui est un minimum, que cette épaisseur soit dans les gaz sous la pression atmosphérique la même que dans les liquides $0^{mm},00005$ environ. Sous les très faibles pressions ces dimensions sont directement visibles; c'est justement sous ces pressions que se produisent tous les phénomènes révélés par M. Crookes, et groupés sous le nom général de propriétés de la *matière radiante*. Ils sont observables dès que les dimensions des mobiles sont de même ordre de grandeur que l'épaisseur équivalente à une masse indéfinie. La pression qui les rend observables est d'autant plus faible que l'appareil est plus grand. Aux très faibles pressions, les mots *température* et *pression* du gaz en un

point n'ont de sens que si ces quantités sont uniformes dans des volumes de plusieurs décimètres cubes. Non seulement des volumes plus petits ne restent pas formés de la même matière, ainsi que l'indique la diffusion ; mais les actions mutuelles de deux portions de gaz situées de part et d'autre d'une surface proviennent de couches de gaz de plusieurs centimètres d'épaisseur. Ainsi, sous une pression de $0^{mm},01$ de mercure, les lois générales de l'élasticité peuvent donner des renseignements sur certains phénomènes dont la variation dans l'espace est très lente, lorsque le volume du gaz étudié sera de plusieurs mètres cubes; elles sont inapplicables à ce qui se passe dans un volume de quelques centimètres cubes, les définitions fondamentales n'ayant plus de sens. Ce qui se passe dans ces petits volumes dépend de ce que M. Helmholtz a fort bien appelé les mouvements non coordonnés de la matière ; il en est de même dans les liquides pour des volumes, visibles au microscope, de moins d'un cent-millionième de millimètre cube ($0^{mm},001$ à $0^{mm},002$ de côté), comme l'a fait remarquer très justement M. Gouy, à propos du mouvement brownien, bien connu des micrographes, des très petites particules solides, plongées dans un liquide.

Dans la théorie moléculaire, ces remarques se présentent de la manière suivante. Pour les éléments de surface situés trop près de la surface limite du corps, les sommes sont incomplètes, le volume auquel il faut les étendre étant partiellement extérieur au corps; elles n'ont pas la même valeur qu'à l'intérieur du corps, et en particulier certaines compensations indiquées par la symétrie cessent de se produire. Dans une couche superficielle peu épaisse, toutes ces sommes passent très rapidement de la valeur constante relative à l'intérieur du corps à une autre valeur toute différente relative à la surface limite elle-même. On peut connaître des relations entre les valeurs extrêmes; mais, quant à la distribution des valeurs intermédiaires dans l'épaisseur de la couche, elle dépend directement de la loi d'action de deux molécules en fonction de la distance, et cette loi nous est inconnue. Les seuls problèmes qu'on puisse traiter sans faire d'hypothèse sur cette loi sont ceux dans lesquels on peut négliger les déformations intérieures d'un petit prisme normal à la surface limite, assez long pour occuper toute l'épaisseur de la couche de variation rapide. Cette condition,

qui est de toute évidence, est bien mise en lumière par Neumann (p. 91 et suivante) au moyen des équations déduites du principe des vitesses virtuelles. Mais il n'a peut-être pas dit assez explicitement que cette condition n'est pas spéciale à la surface limite, mais s'applique en réalité à tout l'intérieur du corps solide. La déformation dans l'étendue de la sphère d'action doit pouvoir être considérée comme uniforme; sans quoi aucune des sommations étendues à tout ce volume ne peut plus être réduite à la forme simple qu'on a adoptée, et la théorie est arrêtée dès son début. Lorsqu'on applique le principe des vitesses virtuelles comme le fait Neumann au Chapitre VIII, il suffit que la déformation soit uniforme dans l'étendue de la sphère d'action. Mais lorsque, plus loin, on considère l'énergie d'un volume fini comme la somme des énergies des éléments de volume dont il se compose, et qu'on néglige les énergies mutuelles des éléments contigus, il faut supposer les dimensions linéaires de l'élément de volume uniformément déformé très grandes par rapport au rayon de la sphère d'action. Pour que les énergies mutuelles soient négligeables, il faut en effet que le volume auquel elles se rapportent soit petit par rapport au volume conservé, c'est-à-dire que l'élément de volume soit grand par rapport au produit de sa surface par le rayon d'activité. On est ainsi ramené à la même conclusion relativement à la grandeur de l'élément de volume dans lequel la déformation doit être uniforme.

Pour les déformations qui se succèdent plus rapidement dans l'espace, la théorie ordinaire de l'élasticité reste impuissante.

Il en est de même à la surface de séparation de deux milieux différents; on est obligé de négliger les déformations intérieures d'un petit cylindre qui s'étend de part et d'autre de la surface de séparation dans toute l'épaisseur des deux couches superficielles.

Dans les applications à la théorie de la lumière, certains phénomènes, les uns superficiels, la fluorescence, la phosphorescence, les autres internes, la dispersion, exigeront des hypothèses supplémentaires.

Au cours de ce Chapitre, Neumann retrouve les formules dues à Poisson; celles-ci, par suite de la symétrie supposée par rapport à trois plans rectangulaires, ne contiennent en évidence que six constantes, soit en tout neuf, en tenant compte des trois constantes

d'orientation du système d'axes, au lieu des quinze que donne la théorie moléculaire dans le cas général.

Le Chapitre IX est consacré aux déformations produites par les changements de température. Duhamel, à qui nous devons les premiers Mémoires sur ce sujet, avait établi les équations fondamentales de la manière la plus simple : il regardait la déformation totale comme la somme des déformations dues aux actions élastiques, et de celles dues à l'élévation de température. Il est à regretter que M. Neumann ait cru devoir regarder les actions mutuelles des molécules comme la différence de deux forces, l'une attractive, l'autre répulsive due à l'action de la chaleur, et, pour expliquer celle-ci, s'embarrasser d'hypothèses sur les atmosphères moléculaires, qui ne permettent guère d'espérer l'accord avec l'expérience. Heureusement le résultat est le même que celui de Duhamel. Dans les corps isotropes une élévation de température, uniforme ou non, équivaut à une augmentation des pressions normales seules, indépendante de l'orientation de l'élément pressé, proportionnelle à l'élévation de température de cet élément. Une élévation uniforme de température équivaut à une pression superficielle uniforme.

Pour les cristaux, au moins pour ceux qui sont doués de trois plans de symétrie, il est naturel d'admettre que l'élévation de température transforme une sphère en un ellipsoïde ayant les mêmes plans de symétrie; les équations générales s'obtiennent par le principe de superposition des petites déformations. Les explications de Neumann (p. 115-116) n'ont peut-être pas toute la netteté désirable. L'élévation de température uniforme n'équivaut plus à une pression uniforme.

Les modifications que doit subir l'équation de la conductibilité des corps isotropes, eu égard aux déformations qui accompagnent le mouvement de la chaleur, font l'objet d'un dernier paragraphe. L'auteur admet, comme Duhamel, que la quantité de chaleur dégagée par la déformation d'un solide isotrope ne dépend que de sa compression cubique ; pour l'établir, il faudrait avoir recours à des considérations de Thermodynamique, que M. Neumann paraît avoir un peu trop systématiquement exclues de tout ce Volume.

Ce Chapitre reste isolé ; les principes qui y sont établis ne sont appliqués à la solution d'aucun problème particulier : quelques

exemples auraient pu être empruntés soit aux Mémoires de Duhamel, soit à celui d'Yvon Villarceau sur la compensation des chronomètres; l'étude de la flexion d'une lame formée de deux métaux soudés sur toute leur longueur, du thermomètre métallique de Bréguet, aurait utilement terminé le Chapitre XI consacré aux applications.

Le Chapitre X est consacré aux théorèmes généraux de Kirchhoff : les équations de l'équilibre ou du mouvement ont dans chaque cas une solution unique et déterminée. Le dernier paragraphe contient l'expression de l'énergie d'un corps isotrope déformé à la fois par des forces extérieures et par élévation de température.

Dans le Chapitre XI sont traités avec détails tous les problèmes particuliers qui peuvent fournir des méthodes de détermination expérimentale des coefficients d'élasticité d'une substance isotrope, et en particulier du rapport des deux constantes. Les méthodes de Cagniard de la Tour, de Wertheim, de Kirchhoff et d'Okatow, et enfin de M. Cornu sont successivement décrites. On trouve encore, dans ce Chapitre, les conditions de résistance à la rupture, par pression interne, d'un réservoir cylindrique ou sphérique, la déformation d'une enveloppe sphérique, comme un réservoir de thermomètre ou les réservoirs des liquides dans le piézomètre d'Œrstedt, enfin la déformation par pression extérieure d'une sphère pleine entourée d'une enveloppe sphérique de matière différente. Les problèmes de la torsion et de la flexion des barres sont traités, le premier dans le cas de la section circulaire, le second pour une barre fléchie par un couple dans le plan d'un axe d'inertie de la section. La torsion des prismes quelconques n'est pas étudiée dans l'Ouvrage ; la flexion, non circulaire, est examinée dans le dernier Chapitre, surtout au point de vue des vibrations des lames rectilignes.

Résumant les résultats connus sur le rapport des deux constantes de Lamé, Neumann reconnaît que l'expérience donne un rapport variable avec la substance. Est-ce défaut d'isotropisme des substances étudiées, est-ce réellement que la théorie moléculaire soit inadmissible, on ne saurait le décider encore; mais une conséquence pratique à en tirer, c'est que pour les substances cristallisées, qui font l'objet du Chapitre XII, il importe de laisser in-

dépendantes les trente-six constantes de Lamé, l'expérience seule pouvant apprendre si les relations indiquées par la théorie moléculaire sont effectivement satisfaites. Voici le contenu de ce Chapitre, dont M. Voigt avait utilisé un certain nombre de résultats dans ses recherches sur le sel gemme, avant l'impression de ce Volume. Les trente-six constantes se réduisent à vingt, puis à douze, lorsqu'il y a un ou deux plans de symétrie rectangulaire, que l'on prend pour plans de coordonnées; dans ce dernier cas il y a aussi un troisième plan de symétrie perpendiculaire aux deux premiers. Ces constantes se réduisent à sept, puis à trois, lorsque deux ou trois axes rectangulaires sont équivalents. Enfin il ne reste plus que deux constantes lorsque l'orientation des axes est indéterminée. Pour les cristaux hexagonaux qui ont déjà deux plans de symétrie rectangulaires, une rotation de 60° autour de l'axe principal ne changeant rien, les douze constantes se réduisent à six. Pour les cristaux rhomboédriques qui ont six plans de symétrie passant par une même droite et inclinés à 60°, mais qui n'ont pas de plan de symétrie perpendiculaire à cet axe principal, et qui en outre ne changent pas par une rotation de 120°, il reste huit constantes. En réalité, si l'on tient compte des constantes d'orientation des axes, il faut en compter vingt-deux dans le premier cas, quinze, dix, six, neuf et onze dans les cas suivants. Neumann indique quelles réductions supplémentaires exigerait la théorie moléculaire; mais, je ne sais pourquoi, il ne parle pas des réductions intermédiaires dues à l'existence de l'énergie de déformation comme fonction des dilatations et des glissements seuls ([1]). Il est pourtant important de ne pas regarder comme des confirmations de la théorie moléculaire les relations qui ne dépendent que de l'existence de l'énergie.

Jusqu'à présent on n'a fait de mesures complètes que pour deux cristaux cubiques : le sel gemme dont les constantes satisfont aux conditions de la théorie moléculaire, et le spath fluor dont une des trois constantes est, d'après M. Voigt, plus petite, d'après M. Klang plus grande d'un tiers que ne l'indiquerait la théorie moléculaire.

([1]) *Voir* la brochure de M. Élie, *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux;* 1886.

Après avoir établi ces relations, l'auteur examine comment doit se déformer un prisme taillé dans une direction quelconque et soumis à une traction longitudinale. On peut représenter les résultats en portant sur la direction du prisme les allongements produits par une traction déterminée. La surface ainsi définie a pour rayons vecteurs les modules d'élasticité de traction des prismes de même direction. Ces surfaces ont naturellement même symétrie que le cristal. Ce sont des surfaces du quatrième ordre. M. Neumann détermine leur forme pour les cristaux cubiques et rhomboédriques, il indique les directions de maximum et de minimum. Il étudie aussi la déformation de la section droite, et les changements des angles dièdres sous l'influence d'une pression unilatérale.

Double réfraction. — Les Chapitres XIII, XIV, XV sont consacrés à la théorie élastique de la propagation de la lumière dans les milieux cristallisés. Le problème général est de trouver l'état du milieu indéfini à une époque quelconque connaissant l'état initial, c'est-à-dire les déplacements et les vitesses à une époque arbitraire prise pour origine. Les divers Chapitres, sans être absolument indépendants, ne marquent pourtant pas des étapes successives dans le développement d'une même théorie générale. M. Neumann s'est peut-être un peu trop astreint à reproduire les Mémoires des divers auteurs qui ont traité cette question, à des points de vue variés, à peu près tels qu'ils ont été publiés, au lieu de grouper dans une même exposition d'ensemble tous les résultats acquis, en les accompagnant bien entendu de toutes les indications historiques nécessaires.

Ainsi le Chapitre XIII est consacré au développement des idées de Cauchy, en prenant pour point de départ les équations à six constantes seulement tirées de la théorie moléculaire. Dans le Chapitre XIV, on recommence à établir longuement les équations fondamentales pour bien montrer comment l'incompressibilité supposée de l'éther en faisant disparaître la dilatation cubique des équations du mouvement exige qu'on y introduise en évidence une autre fonction qui est une pression hydrostatique. Ce sont là les idées de Carl Neumann (1863); on a continué à employer les équations de la théorie moléculaire. Au Chapitre XV c'est à peu près le mode d'exposition de Lamé (dans sa dix-septième Leçon) qui est

adopté, et cette fois nous partons des équations les plus générales avec leurs trente-six constantes. Après avoir étudié les ondes qui se propagent sans condensation, tout en supposant l'éther compressible, l'auteur montre que l'hypothèse de l'éther incompressible fait retomber sur des équations presque identiques à celles de Carl Neumann, employées au Chapitre précédent.

Pour tirer la théorie de Fresnel de la théorie de l'élasticité, il faut emprunter à l'expérience un certain nombre de notions qui permettent de réduire le nombre des constantes caractéristiques; cette réduction se fait de la manière la plus nette et rigoureusement en partant avec Lamé du fait d'expérience que chaque onde plane peut propager plus d'une vibration rectiligne rigoureusement transversale, qu'elle peut en propager deux de directions différentes, avec des vitesses différentes d'ailleurs. Des trente-six constantes, il n'en reste plus que douze, dont six comme coefficients de la dilatation cubique, les six autres comme coefficients des glissements; ces dernières se réduisent à trois par un choix convenable des axes : ce sont les seules qui interviennent dans la théorie de la lumière. L'existence de l'énergie réduit à une seule les six premières constantes, sans rien changer aux trois autres. La distribution des vitesses de propagation des ondes planes est alors la même que celle donnée par Fresnel, mais à la condition de prendre comme Neumann, et à l'opposé de Fresnel, pour plan de polarisation le plan de la vibration.

Les notions qu'il faut emprunter à l'expérience pour obtenir la même concordance dans la théorie de Cauchy sont plus nombreuses, et en toute rigueur incompatibles. On invoque comme fait d'expérience la forme de la section de la surface d'onde par les trois plans principaux ou, ce qui revient au même, la loi de propagation des ondes planes normales à chacun des trois plans de symétrie du milieu. Pour que cette section se compose d'une circonférence et d'une ellipse pour les vibrations transversales, trois relations du second degré entre les six coefficients sont nécessaires. Quand on les satisfait rigoureusement, une vibration est rigoureusement transversale, les deux autres approximativement longitudinale et transversale. La surface d'onde longitudinale est un ellipsoïde dont les axes sont de l'ordre du produit par $\sqrt{3}$ des vitesses de propagation des vibrations transversales. La relation du

plan de polarisation avec le plan de vibration est d'ailleurs celle de Neumann et non celle de Fresnel. On obtient exactement la surface d'onde de Fresnel et les vibrations transversales, en employant au lieu des relations rigoureuses des relations linéaires approchées qu'on en peut déduire en négligeant les carrés des différences des vitesses de propagation principales.

Dans la théorie de Neumann, où l'éther est incompressible, les relations entre les constantes de Poisson sont les mêmes; l'onde longitudinale n'existe plus; mais à sa place la pression hydrostatique se propage avec les ondes transversales. De même que la théorie de Cauchy, elle ne conduit à la surface d'onde de Fresnel que d'une manière approchée.

L'auteur n'a point marqué de préférence entre les deux théories; on peut même lui reprocher de n'avoir point fait de comparaison. Il y a pourtant quelques remarques utiles à faire. Les deux théories de Lamé et de Poisson sont incompatibles; on ne peut pas ramener les équations générales de Poisson aux équations réduites de Lamé sans faire disparaître toute structure anisotrope ([1]). La

---

([1]) Équations de Lamé (Neumann, p. 267) :

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{A} \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \text{C}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \text{B}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - b \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Équations générales de Poisson (p. 204) :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}.$$

Relations entre les constantes de Lamé pour l'existence de l'énergie :

$$\text{A} = \text{B} = \text{C}, \qquad \text{A}_1 = \text{B}_1 = \text{C}_1 = 0.$$

Relations entre les constantes de Poisson, pour la théorie de Cauchy (p. 234) :

$$(\text{C} - a)(\text{B} - a) = 4a^2, \qquad (\text{A} - b)(\text{C} - b) = 4b^2, \qquad (\text{B} - c)(\text{A} - c) = 4c^2.$$

Relations approchées qu'on leur substitue, et qui conduisent aux mêmes équations de propagation des vibrations transversales que la théorie de Lamé :

$$\text{A} = 3(b + c - a), \qquad \text{B} = 3(a + c - b), \qquad \text{C} = 3(a + b - c).$$

Relations entre les constantes de Lamé, pour la réduction à la forme de

théorie de Lamé, dans laquelle les deux vibrations sont rigoureusement transversales, est donc incompatible avec l'hypothèse moléculaire. Celle-ci, d'autre part, ne permet de retrouver rigoureusement ni les deux vibrations transversales, ni surtout la surface d'onde de Fresnel.

Une discussion très délicate d'expériences de grande précision sur les cristaux biaxes pourrait seule apprendre si la surface d'onde de Fresnel représente rigoureusement les phénomènes; jusqu'ici les expériences ne permettent point de décider si l'accord est complet ou très approché. Pourtant des essais très soignés faits sur un uniaxe très biréfringent, le spath, ont montré que la surface d'Huygens est tout à fait satisfaisante; en particulier, elle est préférable à une surface très peu différente déduite d'une théorie proposée par M. Stokes et par Lord Rayleigh comme plus conforme aux idées de Fresnel, et dans laquelle l'élasticité du milieu est indépendante de la direction, tandis que l'inertie des molécules mobiles dépend de la direction ([1]).

Relativement à la direction des vibrations, tout ce qu'il est légitime de conclure des expériences d'interférences des rayons polarisés, c'est que les vibrations lumineuses sont rigoureusement transversales dans les milieux isotropes. Quant à l'intérieur des cristaux, on peut seulement dire que les deux plans de polarisation correspondant à un même rayon sont sensiblement perpendiculaires; mais, si la vibration est, comme semblent l'indiquer la plupart des théories élastiques, dans le plan de polarisation, rien ne prouve qu'elle y doive être normale au rayon. C'est donc une

---

Poisson :

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0,$$

$$A - c = 2c, \quad B - a = 2a, \quad C - b = 2b,$$

$$A - b = 2b, \quad B - c = 2c, \quad C - a = 2a.$$

Ces relations sont incompatibles avec la double réfraction, elles donnent, en effet,

$$A = B = C = 3a = 3b = 3c.$$

([1]) C'est ce qui arrive pour un ellipsoïde plongé dans un liquide. Il suffit donc de se représenter les molécules d'éther comme ayant une forme non sphérique, et plongées dans un milieu liquide indéfini. C'est une image mécanique dont je ne défends point la vraisemblance, mais assurément ingénieuse en ce qu'elle n'introduit directement que trois constantes distinctes, les trois inerties principales.

hypothèse, plutôt qu'un résultat d'expérience, que Lamé a pris pour point de départ. Est-elle nécessaire pour retrouver rigoureusement la surface d'onde de Fresnel? Il aurait été intéressant de le dire.

Dans le Chapitre XIII, M. Neumann insiste sur les propriétés des ondes planes et montre, en particulier, comment, dans une onde plane qui se propage dans un sens déterminé, les déplacements et les vitesses sont liés de telle sorte que l'onde ne peut se propager que dans une seule direction. C'est, on le sait, ce qu'on n'arrive à voir nettement ni par l'application pure et simple du principe d'Huygens, ni par la théorie de la diffraction de Fresnel. Dans le Chapitre XV, l'éditeur résume les connaissances acquises sur les divers phénomènes par lesquels se révèle l'anisotropie des cristaux; malheureusement on n'a pas réussi à saisir une relation simple avec la forme cristalline pour les cristaux biaxes.

Dispersion. — Le Chapitre XVI contient l'exposé rapide de la théorie de la dispersion de Cauchy. Il semblerait d'ailleurs que la cause assignée par Cauchy doive subsister dans l'éther des espaces célestes, tandis qu'on n'y peut observer aucune dispersion. La cause doit donc être différente, et tenir à la présence de la matière et aux réactions mutuelles de la matière et de l'éther. Dès l'année 1841, Fr. Neumann a proposé une théorie qu'il expose dans le Chapitre XVII. Il en définit fort bien le caractère, en disant que les molécules pondérables agiraient sur les ondes lumineuses à peu près comme les îles d'un archipel sur les ondes de la mer. Il regarde en effet les actions de l'éther sur la matière comme insuffisantes pour en modifier le mouvement et traite ses molécules pondérables comme immobiles. D'ailleurs, d'après la manière dont le calcul est conduit, on suppose que la sphère d'action d'une molécule d'éther contient un très grand nombre de molécules matérielles, et réciproquement. Pour obtenir la force motrice sur une molécule d'éther, il suffit d'ajouter aux termes que donne la théorie ordinaire de l'élasticité un terme proportionnel au déplacement, par rapport aux molécules pondérables, c'est-à-dire au déplacement absolu. Une première approximation donne dans l'indice de réfraction un terme proportionnel au carré de la longueur d'onde. Une seconde approximation conduit à un développement de

l'inverse du carré de la période, suivant les puissances paires de la longueur d'onde ; par suite, le carré de l'indice de réfraction est développé en série de puissances paires de la période.

Là s'arrête la discussion. M. Neumann ajoute, sans citer de nombres, que sa formule satisfait fort bien aux mesures de Fraunhofer, comme d'ailleurs celle de Cauchy. Depuis lors, les mesures d'indices, en fonction de la longueur d'onde ont été singulièrement étendues, d'abord par l'emploi de la Photographie dans le spectre ultra-violet, plus récemment par l'emploi du bolomètre de M. Langley dans le spectre infra-rouge. On trouvera dans un Mémoire de M. Mascart et dans un plus récent de M. Langley une discussion des diverses formules proposées, d'où il résulte que la meilleure représentation des résultats d'expérience pour la plupart des verres, pour le spath, le quartz et le sel gemme, est obtenue au moyen de la formule à quatre termes

$$n = a + b\lambda^{-2} + c\lambda^{-4} + d\lambda^{2},$$

telle que l'a proposée M. Briot. Les écarts, considérables avec toute autre formule dans l'infra-rouge, restent faibles quoique certains. D'ailleurs, la découverte des phénomènes de dispersion anormale est venue montrer qu'une telle formule ne saurait être générale. C'est en tenant compte de la mobilité des molécules matérielles, surtout lorsque la période de leur mouvement naturel diffère peu de la période du mouvement lumineux, que divers physiciens allemands ont réussi à rendre compte de ce nouveau phénomène. Mais il n'en est pas question dans ce Livre, qui reproduit la Leçon professée sur ce sujet par M. F. Neumann pendant l'hiver de 1857-1858.

Vibrations des solides. — L'Ouvrage se termine par quatre Chapitres consacrés aux vibrations transversales des cordes, des membranes, des lames, et au choc longitudinal des prismes.

Dans chaque Chapitre, les équations fondamentales sont établies avec méthode et clarté, un peu longuement peut-être, et sans mettre suffisamment en lumière le lien entre la forme mathématique des hypothèses et leur énoncé en langage ordinaire. Il ne faut d'ailleurs pas chercher dans ces Chapitres une discussion un peu approfondie comme celle du Livre de Clebsch ; ce ne sont que des

exemples pris sous leur forme la plus simple. Ainsi les cordes vibrantes sont supposées libres dans toute leur étendue, mais fixées à des obstacles rigides à leurs deux extrémités; l'auteur ne traite aucun cas de vibrations forcées. Pour mettre en évidence les propriétés du mouvement propagé, il examine deux cas très simples au point de vue mathématique : 1° déplacement initial d'un seul point de la corde, sans vitesses initiales; 2° vitesse initiale communiquée à un seul point de la corde sans déplacement. Ces cas simples ont un défaut plus grave que d'être physiquement irréalisables; l'étudiant dont on vient de retenir l'attention sur de pareilles discontinuités, et qui arrive au paragraphe suivant, consacré à l'étude de deux cordes attachées bout à bout, ne doit plus être frappé de l'évidence des conditions imposées à la jonction des deux cordes : identité du déplacement et des tensions au point de jonction de quelque côté qu'on les évalue. Ce problème n'est d'ailleurs traité que dans le cas de cordes indéfinies et pour comparer l'amplitude du mouvement transmis à celle du mouvement réfléchi. Les amplitudes sont les mêmes qu'a retrouvées Fresnel pour la lumière sous l'incidence normale. L'auteur ne paraît pas avoir songé au problème analogue pour les vibrations transversales d'une membrane plane indéfinie, uniformément tendue, mais dont les deux moitiés de part et d'autre d'une droite indéfinie ont des densités superficielles différentes; la propagation d'une onde rectiligne dans cette membrane complexe suit toutes les lois de direction et d'intensité établies pour la réflexion et la réfraction des ondes planes lumineuses par Fresnel pour le rayon dont les vibrations sont normales au plan d'incidence. Les vibrations tangentielles sans variation de densité superficielle sont également intéressantes.

Dans le Chapitre relatif aux cordes, l'auteur s'est servi uniquement des intégrales générales contenant les fonctions arbitraires nécessaires; les solutions simples sont au contraire employées dans le Chapitre XIX, relatif aux membranes. Après avoir établi les équations générales relatives à une membrane plane, l'auteur montre que les vibrations tangentielles ne dépendent que de l'élasticité de la matière, tandis que les vibrations transversales ne dépendent que de la tension appliquée au contour de la membrane.

Il étudie spécialement une membrane rectangulaire soumise à des

tensions inégales parallèlement aux côtés, et en particulier, supposant nulle une des tensions, revient au problème des cordes pour introduire l'emploi des solutions simples. Il passe ensuite à l'étude de la membrane carrée uniformément tendue, montre comment se classent les sons simples successifs, les uns incommensurables, les autres formant série harmonique; enfin comment plusieurs figures nodales distinctes peuvent correspondre au même son. Toute cette étude, moins complète que celle de Lamé, n'est accompagnée d'aucun commentaire expérimental; le lecteur trouvera encore grand profit à étudier les Mémoires de M. Bourget et la discussion qui les accompagne.

Le Chapitre XX, qui n'avait point encore été publié, est consacré à la théorie du choc. Dans le premier paragraphe est exposée la théorie donnée dans les Cours de Mécanique rationnelle; on admet, le plus souvent sans le dire et toujours sans le justifier, que l'énergie interne de chacun des corps est après le choc la même qu'avant le choc. Cette hypothèse est inexacte; le mouvement relatif produit par le choc se propage dans l'intérieur de chaque corps, et, au moment de la séparation, les vitesses internes ne sont généralement pas distribuées comme celles d'un corps solide indéformable, ou bien les corps sont comprimés ou dilatés uniformément. Les corps se séparent emportant, outre leur force vive apparente, une certaine quantité d'énergie de vibration qu'il est impossible d'évaluer sans employer la théorie de l'élasticité. Dans quelques cas particuliers seulement, l'état vibratoire est nul et la théorie élémentaire exacte. L'auteur traite du choc longitudinal de cylindres de même diamètre et de même matière. Tant que les deux cylindres sont en contact, le mouvement se propage comme s'ils formaient un cylindre continu. La séparation commence lorsque la discontinuité des vitesses, après s'être propagée de part et d'autre de la surface de contact, et s'être réfléchie à la surface libre du corps, revient changée de signe à la surface de contact. C'est alors du côté du corps antérieur qu'est la plus grande vitesse; celui-ci s'échappe. Deux cas particuliers sont seulement traités : quand les deux cylindres ont des longueurs égales, il y a échange de leurs vitesses de translation; quand le cylindre antérieur animé d'une vitesse v a une longueur double de l'autre, dont la vitesse initiale est v', il ne prend qu'une vitesse $\frac{1}{2}(v + v')$, ce qui n'est point con-

forme à la théorie élémentaire; mais, au moment de la séparation, il est encore comprimé et, par conséquent, reste animé d'un mouvement vibratoire longitudinal. Dans les deux cas, la durée du choc est la période du son fondamental du plus court des deux cylindres.

L'éditeur, M. Meyer, rappelle les travaux théoriques de M. de Saint-Venant et le Mémoire de M. Hertz sur le choc des sphères; il donne enfin une liste de Mémoires expérimentaux, dont, dit-il, l'accord avec la théorie élastique n'est pas très satisfaisant, peut-être parce qu'on a négligé de tenir compte de la chaleur dégagée; je crois plutôt que les moindres chocs produisent, dans le voisinage de la surface de contact, des déformations trop grandes et trop rapides pour que les forces leur soient proportionnelles, et pour que les frottements et les déformations permanentes soient entièrement négligeables.

Le dernier Chapitre est consacré à la flexion des lames. Pour établir l'équation fondamentale l'auteur emploie un mode de raisonnement (déjà utilisé dans le Chapitre précédent) bien souvent critiqué à juste titre, notamment par M. Maurice Lévy dans son Mémoire sur la flexion des plaques métalliques. Il suppose que, si la section transversale de la lame est assez petite, on peut représenter les déplacements d'un point quelconque d'une section droite jusqu'au bord par les premiers termes d'un développement en série de Taylor par rapport aux deux coordonnées transversales. Ce qui est évident, c'est qu'un pareil développement peut être employé dans une aire très petite par rapport à la section droite, petite ou grande; pour avoir le droit de l'étendre à toute la section droite, sous prétexte qu'elle est petite, il faudrait montrer sous quelles conditions les équations aux dérivées partielles relatives à un élément de volume quelconque sont satisfaites avec une approximation suffisante. Ce mode d'exposition n'est pas beaucoup plus court que celui de M. de Saint-Venant, et est bien moins satisfaisant. Il n'y a pas d'indication de l'existence des deux plans principaux de flexion, et de leur relation avec les axes d'inertie de la section droite. Le principal problème traité est celui des vibrations transversales des lames rectilignes, dont les extrémités sont libres. L'auteur s'arrête après avoir calculé la position des nœuds, et dit

en deux lignes que Strehlke les a trouvés d'accord avec l'expérience.

Ici finit le Livre; son caractère est nettement accusé par l'absence d'un Chapitre sur la flexion des plaques, et d'un autre sur les déformations permanentes et leurs effets optiques, étudiés par M. Fr. Neumann presque au début de sa carrière. Toutes les applications controversées ou exigeant une discussion délicate sont systématiquement exclues. C'est donc bien un Livre élémentaire, un Ouvrage d'enseignement excellent à recommander aux étudiants qui veulent apprendre les généralités de la théorie mathématique de l'élasticité, son application à la théorie de la lumière, et les problèmes particuliers les plus simples qu'elle permet de traiter seulement à titre d'exemples, mais à l'exclusion des plus difficiles d'entre eux. Quant aux expériences, le lecteur curieux de les connaître avec précision devra recourir aux traités de Physique ou aux Mémoires originaux. MARCEL BRILLOUIN.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BERTRAND (J.). — CALCUL DES PROBABILITÉS. 1 vol. in-8°; LVII-332 p. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889.

Les personnes peu versées dans les Mathématiques s'étonnent d'habitude quand elles entendent parler de l'élégance d'une démonstration ou d'un calcul. Les mathématiciens de profession, eux aussi, s'émerveilleraient sans doute qu'on osât louer ce qu'il y a de fin et de spirituel dans un Livre de Mathématiques. Il faut pourtant s'y résoudre cette fois ; au reste, l'étonnement diminue quand on pense au nom de l'auteur. Il convient aussi d'ajouter que la finesse n'est pas absente de tous les écrits mathématiques, bien que, d'ordinaire, on se plaise davantage à y admirer la vigueur avec laquelle les déductions sont poursuivies; elle est nécessaire dès que l'on touche aux principes et que l'on veut regarder les choses en elles-mêmes. « Il n'est question que d'avoir bonne vue, mais il faut l'avoir bonne, car les principes sont si déliés et en si grand nombre, qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe. Or l'omission d'un principe mène à l'erreur; ainsi il faut avoir la vue bien nette pour voir tous les principes, et ensuite l'esprit juste pour ne pas raisonner faussement sur les principes connus. » Cette phrase de Pascal s'applique parfaitement au Calcul des probabilités ; il faut avoir la *vue bien nette* pour s'en occuper, pour ne point faire d'omissions dans les énumérations, et distinguer des choses qui se ressemblent singulièrement, plus que ne font d'habitude la vérité et l'erreur.

Ceux qui ont la vue bonne aiment à l'exercer ; c'est peut-être là une des raisons qui ont amené le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences à traiter de ce calcul, qu'il regrette de voir aussi délaissé qu'il est. Ce n'est pas la seule, assurément ; il y a là souvent, entre deux équations, belle matière à raillerie. Les lecteurs de M. Bertrand ne regretteront pas qu'il s'y complaise et qu'il crève les prétentions de ceux qui voudraient porter le « flambeau de l'Algèbre » où il n'a que faire ; parfois même la fantaisie se donne carrière, c'est merveille alors. Le pauvre *homme moyen* de Quetelet n'est pas épargné; écoutez la fin de son portrait :

« Dans le corps de l'homme moyen, l'auteur belge place une âme moyenne. Il faut, pour résumer les qualités morales, fondre vingt mille caractères en un seul. L'homme type sera donc sans passions et sans vices, ni fou, ni sage, ni ignorant, ni savant, souvent assoupi : c'est la moyenne entre la veille et le sommeil ; ne répondant ni oui ni non ; médiocre en tout. Après avoir mangé pendant trente-huit ans la ration moyenne d'un soldat bien portant, il mourrait, non de vieillesse, mais d'une maladie moyenne que la Statistique révélerait pour lui. » N'est-ce pas achevé ? Cela, à la vérité, est tiré de la Préface, où la verve de l'écrivain se déploie à l'aise ; mais souvent elle perce ailleurs.

Ce n'est pas tout : plus d'un problème classique du Calcul des probabilités conduit à des résultats fort paradoxaux, et l'on soupçonne la joie qu'a eue l'auteur à se jouer parmi ces paradoxes, à percer à jour ceux qui n'ont point de solidité, et à bien mettre en lumière la part de vérité que contiennent les autres. Enfin le Calcul des probabilités permet de poser et de résoudre des problèmes bien « plaisants et délectables », et l'auteur ne s'est pas refusé ce plaisir. On trouvera dans son Livre jusqu'à des solutions politiques, que M. Bertrand, il est vrai, a la modestie de ne pas préconiser. Voulez-vous, par exemple, dans un pays de suffrage universel, où les deux partis opposés sont presque numériquement égaux, avoir une Chambre bien homogène ? Supposons dix millions d'électeurs, 4 500 000 d'une opinion, 5 500 000 de l'autre. Le problème semble difficile. Eh bien, groupez les électeurs par vingt milles, *tirés au sort* dans les dix millions ; que chaque groupe élise un député : sur les cinq cents députés nommés de cette façon, pas un n'appartiendra à la minorité ; ou plutôt, s'il en entre un à la Chambre, le parti de la minorité devra s'estimer beaucoup plus heureux qu'un joueur qui tirerait, l'un après l'autre, deux quines à la loterie. N'y a-t-il pas là un beau projet, une bonne loi électorale « bien juste », que, sans les difficultés d'application, on ferait aisément accepter par d'honnêtes libéraux, soucieux d'enlever au pouvoir central la possibilité de fausser le vote par le remaniement des circonscriptions ?

En lisant la Préface du Livre de M. Bertrand, intitulée *Les lois du hasard*, on ne peut s'empêcher de penser à cette inoubliable Introduction que Laplace a mise en tête de la Théorie analytique

des probabilités. Quel contraste! Ce ne sont plus ces magnifiques périodes, légèrement solennelles, où Laplace expose les principes d'une philosophie un peu trop sûre d'elle-même, et déroule les conséquences d'une science admirable, mais parfois trop confiante dans sa portée : ce sont des anecdotes, des petits faits probants, des petites phrases nettes, précises, courtes, pressées, dont chacune semble comprimée par la pensée qui va suivre, et qui a hâte de sortir ; point de principes hasardeux ; une critique toujours éveillée, et comme joyeuse d'avoir à s'exercer. « L'empreinte du hasard, dit M. Bertrand, est marquée, très curieusement quelquefois, dans les nombres déduits des lois les plus précises. Une table de logarithmes en témoigne. Pour 10 000 nombres successifs, dans les Tables à 10 décimales de Véga, je prends la septième figure du logarithme : rien dans ce choix n'est laissé au hasard. L'Algèbre gouverne tout, une loi inflexible enchaîne tous les chiffres. Si l'on compte cependant les résultats, on aura, à très peu près, sur 10 000, 1000 fois le chiffre 1 et ainsi des autres : la formule se conforme aux lois du hasard. Vérification faite, sur 10 000 logarithmes, le septième chiffre s'est trouvé 990 fois égal à 1, 993 fois égal à 2, 1012 fois égal à 4. En partageant les 10000 nombres en dix séries et prenant pour chacune les moyennes des écarts, j'entends la différence entre le nombre des apparitions de l'un des chiffres et le nombre normal 100, et les comparant à la moyenne du carré des écarts, le rapport des nombres, qui, d'après les lois du hasard, devrait être 1,570796, moitié du nombre que les géomètres désignent habituellement par la lettre π, se trouve être égal à 1,561 ; le même calcul fait à l'aide du chiffre 1 donne 1,598, et la moyenne de ces deux résultats est 1,579. Les trois premiers chiffres sont exacts. » Des observations analogues, si je ne me trompe, ont été faites sur les chiffres décimaux du nombre π.

Certes, voilà des faits curieux, et qui donnent à penser, sur les sujets les plus graves. Mais il est clair qu'il n'y a aucune conclusion positive à tirer de ce rapprochement entre des phénomènes entièrement déterminés et d'autres dont la nature, les causes et les lois (si elles existent) nous sont entièrement inconnues. Ce n'est pas M. Bertrand qui écrit : « Tous les événements, ceux même qui par leur petitesse semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du

Soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité ou sans ordre apparent ; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes. » On peut s'en fier au jugement et à la prudence de M. Bertrand : dans le brillant résumé qui ouvre son Livre, il touche aux questions philosophiques que pose le Calcul des probabilités, il ne les tranche pas avec la sérénité d'un homme qui ignore le doute ; on reste avec lui sur le terrain vraiment scientifique, et les applications à la Statistique, celles à la théorie des jugements, que Stuart Mill déclarait le scandale des Mathématiques, sont réduites à leur valeur, qui, souvent, est petite.

Je me suis bien attardé (non sans plaisir) à ces préliminaires ; j'ai hâte d'arriver à l'analyse de la partie mathématique de l'Ouvrage.

Il est divisé en treize Chapitres. Les trois premiers sont consacrés aux définitions, à des exemples qui les éclaircissent, à divers problèmes qui peuvent se résoudre directement. Tout d'abord, l'auteur insiste sur la nécessité de supposer, dans la définition de la probabilité, les différents cas également probables. Cette remarque suffit à faire justice du paradoxe de d'Alembert qui ne comptait jamais que deux cas, le cas favorable et le cas défavorable, et qui concluait plaisamment que la probabilité de tout événement est $\frac{1}{2}$. Ce raisonnement-là fera toujours la joie de ceux qui n'ont pas envie d'apprendre le Calcul des probabilités. Pour les autres, M. Bertrand donne des exemples très nets, qui montrent bien les précautions à prendre. Un peu plus loin il signale les difficultés qui se présentent quand le nombre de cas possibles est infini.

« On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit ?

» On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité ; la symétrie

du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable, à l'arrivée de l'événement demandé.

» L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent la recevoir la dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$.

» On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable, à l'arrivée de l'événement demandé.

» La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, être égale à $\frac{1}{2}$, ... »

Voilà qui est rassurant. Toutes les fois qu'on rencontre des raisonnements de ce genre, il n'y a qu'à passer outre.

A la vérité, le terrain de la science des probabilités, pour rester aussi solide, semble devoir être bien restreint. Laissons de côté les problèmes où le nombre de cas possibles est infini, et où, pour avoir un sens, la probabilité doit évidemment être définie à nouveau; parmi les autres même, ceux où l'on aperçoit nettement l'égale probabilité des divers cas possibles sont assez limités, et il semble qu'on ne puisse avoir affaire qu'à ces questions concernant les coups de dés, les jeux de cartes, le tirage des boules placées dans des urnes, qui ont donné naissance au Calcul des probabilités; dans ces problèmes, on peut presque dire que l'égalité des chances entre les différents cas est objective, indépendante de l'intelligence qui l'affirme, tant les causes complexes et les lois douteuses qui amènent un événement plutôt qu'un autre échappent à toute évaluation et à toute connaissance. Pour appliquer le calcul des probabilités à d'autres problèmes, il est nécessaire d'étendre

la définition de la probabilité. « La probabilité d'un événement, quelle qu'en soit la nature, est dite égale à une fraction donnée p, lorsque celui qui attend l'événement pourrait échanger indifféremment les craintes ou les espérances, les avantages ou les inconvénients attachés à l'arrivée de cet événement contre les conséquences supposées identiques de la sortie d'une boule puisée dans une urne dont la composition fait naître une probabilité égale à p. » En admettant cette définition, on pourra aborder les problèmes où la probabilité est toute relative à celui qui fait cette assimilation, dépend de sa connaissance ou de son ignorance de certains faits et repose sur une évaluation toute personnelle. Quoi qu'il en soit, la solution de ces problèmes et de tous ceux où l'on acceptera la précédente définition vaudra ce que vaut l'assimilation; qu'elle soit pleinement justifiée ou qu'on l'accepte simplement, il faudra en accepter les conséquences. Par exemple, en supposant acquise la notion de la probabilité composée et cette proposition fondamentale : « La probabilité d'un événement composé est le produit de la probabilité du premier événement par la probabilité qu'acquiert le second quand on sait que le premier est arrivé », on sera en droit de dire : « Si, après avoir appelé un médecin, on évalue à $\frac{9}{10}$ la probabilité pour qu'il vienne, et à $\frac{1}{3}$ la probabilité pour qu'il procure, s'il vient, la guérison du malade; sans discuter ces chiffres, celui qui les admet peut ajouter : la probilité pour que le malade soit visité et guéri par le médecin est, pour moi,

$$\frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}. \text{ »}$$

L'application du principe des probabilités composées exige l'indépendance des événements que l'on considère; si l'arrivée du premier événement change la probabilité du second, le principe ne vaut plus. Il y a là une source d'erreurs contre lesquelles M. Bertrand met le lecteur en garde : il en cite des exemples bien intéressants, entre autres le raisonnement par lequel Maxwell a obtenu la formule

$$Ge^{-kx^2}$$

comme donnant la probabilité pour qu'une molécule, prise dans une masse de gaz, ait une vitesse dont la composante parallèle à une direction donnée soit égale à x.

A côté du principe des probabilités composées se place le principe des probabilités totales : si l'on partage les cas favorables en plusieurs groupes, la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes : ces groupes sont arbitraires, mais ils doivent enfermer tous les cas possibles sans qu'aucun s'y rencontre deux fois. C'est faute d'observer ces conditions indispensables qu'on se trompe le plus souvent en appliquant ce principe.

A ces notions viennent s'ajouter celles de l'*espérance mathématique* et de la *valeur probable* d'une grandeur. L'espérance mathématique d'un joueur qui a la probabilité p de recevoir la somme S est mesurée par le nombre pS; si des événements ayant pour probabilités les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ donnent droit aux sommes $S_1, S_2, \ldots, S_n$, l'espérance mathématique est

$$p_1 S_1 + p_2 S_2 + \ldots + p_n S_n;$$

de même la valeur probable d'une grandeur inconnue x qui peut, selon les décisions du hasard, prendre les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour lesquelles les probabilités respectives sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$, est

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

La valeur probable d'une fonction de plusieurs grandeurs inconnues ne s'obtient pas, en général, en substituant dans cette fonction les valeurs probables de ces grandeurs; cela, toutefois, arrive quand la fonction est une somme, et aussi quand elle est un produit de *facteurs indépendants*.

Telles sont les notions fondamentales que M. Bertrand introduit dans les trois premiers Chapitres et dont il développe les conséquences. Je citerai un peu au hasard quelques-uns des problèmes qu'il traite. Ceux qui appartiennent à un même Chapitre ont été réunis dans un même alinéa.

Quelle est la probabilité pour qu'en jetant deux dés n fois de suite on amène *sonnez* au moins une fois? — La probabilité d'un événement est p, combien faut-il tenter d'épreuves pour que la probabilité de voir l'événement se produire au moins une fois dépasse une fraction donnée r? — Pierre et Paul sont soumis à un scrutin de ballottage; l'urne contient m bulletins favorables à Pierre, n favorables à Paul; m est plus grand que n : Pierre sera

élu. Quelle est la probabilité pour que, pendant le dépouillement du scrutin, les bulletins sortent dans un ordre tel que Pierre ne cesse pas un seul instant d'avoir l'avantage?

Probabilité des brelans au jeu de la bouillotte. — Est-il avantageux pour le ponte ou pour le banquier de demander une carte au jeu de baccarat quand il a le point 5? — $n+1$ joueurs A_1, $A_2, \ldots, A_n$ jouent aux conditions suivantes : A_1 et A_2 jouent une première partie; A_3 remplace le perdant; $A_4, A_5, \ldots$ luttent successivement contre le perdant de la partie précédente. La poule continue ainsi jusqu'à ce qu'un joueur ait gagné successivement tous les autres et, par conséquent, n parties de suite. Quelle est la probabilité que la partie se termine au coup de rang x?

On trace sur un plan indéfini des lignes parallèles équidistantes. Une aiguille est lancée au hasard sur le plan; Pierre recevra 1^{fr} par rencontre de l'aiguille avec une des parallèles. Quelle est l'espérance mathématique de Pierre? — Un nombre n de joueurs ayant déposé chacun 1^{fr} jettent un nombre μ de dés. L'enjeu total appartient à celui qui amènera la plus grande somme de points, ou sera partagé entre ceux qui auront amené le même nombre de points, plus grand que celui des autres joueurs. Pierre joue le premier, il amène k points. Quelle est, avant que les adversaires aient joué, son espérance mathématique? — Pierre ayant obtenu le point k, quel est le nombre d'adversaires le plus favorable à ses intérêts, c'est-à-dire quel est celui qui lui laisse la plus grande espérance mathématique? — Paradoxe de Saint-Pétersbourg.

Les deux Chapitres qui suivent sont consacrés au théorème de Jacques Bernoulli.

La probabilité d'un événement est p; on fait un très grand nombre μ d'épreuves; le nombre le plus probable d'arrivées pour cet événement est μp; tel est, au fond, le théorème de Bernoulli; mais il y a plus, on peut calculer la probabilité de ce nombre d'arrivées ou d'un nombre qui s'en écarte; les probabilités des divers écarts suivent des lois simples.

M. Bertrand donne trois démonstrations distinctes du théorème de Bernoulli : la première, qui conduit à tous les résultats qui viennent d'être signalés, est particulièrement lumineuse.

Soit p la probabilité d'un événement, $q = 1 - p$ la probabilité

de l'événement contraire ; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité pour que le premier événement se présente n fois, le second $\mu - n$ fois?

Si l'on considère un ordre déterminé dans lequel le premier événement se produit ainsi n fois, le second $\mu - n$ fois, la probabilité pour que cet ordre se réalise est

$$p^n q^{\mu-n}.$$

Il y a autant de ces ordres qu'il y a de permutations de μ objets dont n sont égaux à A, et $\mu - n$ à B, c'est-à-dire

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots\mu - n};$$

puisque tous ces ordres sont également probables, la probabilité cherchée est

$$(1) \qquad \frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots\mu - n} p^n q^{\mu-n}.$$

Pour connaître le nombre d'arrivées le plus probable, il faut chercher pour quelle valeur de n l'expression précédente, où p, q, μ sont donnés, est la plus grande possible ; cela a lieu sous les conditions

$$\mu p + q > n > \mu p - q;$$

n est déterminé par ces inégalités et l'on peut prendre μp pour sa valeur approchée.

L'application de la formule de Stirling à l'expression (1), dans laquelle on suppose μ très grand et $n = \mu p - h$ voisin de la valeur μp, donne la valeur approchée que voici :

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}};$$

elle est acceptable même quand l'écart h est grand, en raison des valeurs très petites qu'elle fournit alors pour la probabilité ; elle se réduit, pour $h = 0$, à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}};$$

c'est la probabilité du nombre d'arrivées le plus probable, et l'on voit que cette probabilité tend vers zéro quand μ augmente indéfi-

niment. La probabilité pour que l'écart soit, en valeur absolue, inférieur à α est donnée approximativement par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi pq}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}\,dz = \Theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}\right),$$

en posant

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt;$$

la fonction $\Theta(t)$, dont une Table placée à la fin du Volume donne les valeurs numériques, tend rapidement vers l'unité quand t augmente. Ces formules approchées se trouvent confirmées d'une façon très curieuse par diverses applications qu'indique M. Bertrand, et où la valeur exacte de la probabilité est connue *a priori*: par exemple, la probabilité pour que la valeur absolue de l'écart soit comprise entre zéro et l'infini est manifestement égale à l'unité, et c'est ce que donne exactement la formule précédente, bien qu'elle ne soit qu'approchée.

Ces diverses formules, dont les conséquences sont étudiées avec le plus grand détail, fixent nettement le sens du théorème de Bernoulli et des propositions qui le complètent.

Je laisse de côté, malgré leur intérêt propre, les deux autres démonstrations que M. Bertrand donne de ce théorème; mais je dois signaler un lemme sur lequel repose l'une d'elles, à cause de l'importance qu'il prendra dans la suite.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs possibles d'une grandeur; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ leurs probabilités respectives. On a dit plus haut que la valeur probable de cette grandeur était par définition

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_n\lambda_n = G.$$

Supposons que, pour mesurer cette grandeur, on ait fait un grand nombre d'épreuves et que l'on ait trouvé ainsi les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$; la moyenne arithmétique

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu}{\mu}$$

différera peu de la valeur probable de cette grandeur; c'est-à-dire que la valeur probable du carré de la différence

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu}{\mu} - G$$

tendra vers zéro quand μ augmentera indéfiniment : ce carré, en effet, peut s'écrire

$$\frac{\Sigma x_1^2 + 2\Sigma x_1 x_2}{\mu^2} - 2\frac{G\Sigma x_1}{\mu} + G^2;$$

en désignant par H la valeur probable

$$p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + \ldots + p_n\lambda_n^2$$

d'une quelconque des quantités $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_\mu^2$, on trouve de suite que la valeur probable du carré considéré se réduit à

$$\frac{H - G^2}{\mu};$$

elle tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$.

Le Chapitre VI est intitulé *La ruine des joueurs*. Lorsque deux joueurs luttent indéfiniment l'un contre l'autre, il est inévitable que l'un d'eux finisse par se ruiner. C'est au fond une conséquence des formules qui montrent que la probabilité d'un écart supérieur à un nombre donné se rapproche de la certitude quand le nombre des épreuves augmente indéfiniment. A la vérité, la probabilité de la ruine ne croît que très lentement avec le nombre de parties. Par exemple, au jeu de pile ou face, la mise étant de 1^{fr}, pour que la probabilité d'une perte de 100000^{fr} atteigne 0,999, il faut environ sept millions de milliards de parties. La chance de ruine est moins effrayante que le nombre de parties, mais on a supposé que l'on réglait seulement les comptes à la fin du jeu. Habituellement, au contraire, la mise doit être déposée à chaque partie; si donc, à un certain moment, la perte du joueur dépasse sa fortune, il ne sera pas admis à continuer, et il perdra toute chance de se relever. Dans ces conditions, les chances de ruine croissent bien plus rapidement. De même, si un seul joueur lutte indéfiniment contre une infinité de joueurs, la ruine est certaine si le jeu est équitable; à ce point de vue, un certain avantage pour celui qui tient une banque de jeux est chose équitable. Il va sans dire que, dans la pratique, cet avantage est calculé de façon que la chance de ruine soit à peu près nulle.

Voici quelques-uns des problèmes traités dans ce Chapitre.

Pierre et Paul font un nombre illimité de parties à un jeu dont

les conditions sont équitables (ou non); leurs fortunes sont m et n. Quelle est, pour chacun d'eux, la probabilité de ruiner l'autre? — Pierre joue à un jeu équitable ou non, mais dans des conditions invariables d'une partie à l'autre contre tout adversaire qui se présente. Quelle est la probabilité pour qu'il finisse par se ruiner? — Pierre et Paul jouent à un jeu de hasard. La probabilité de gagner chaque partie est p pour Pierre et q pour Paul. L'enjeu de Pierre est a francs, celui de Paul b francs. Pierre possède m francs, Paul n francs; le jeu est équitable. Quelle est la valeur probable du nombre de parties qui seront jouées avant la ruine de l'un des joueurs? — Solution, due à M. Rouché, du même problème, quand le jeu n'est pas équitable.

Les *causes*, qu'il s'agit de rechercher dans le Chapitre suivant, n'ont rien à faire avec la Métaphysique : ce sont simplement quelques circonstances ou accidents d'un événement que l'on a observé. « Pierre a parié d'amener avec trois dés un point supérieur à 16; il a gagné : tel est l'événement. Le point amené peut être 17 ou 18; telles sont les causes possibles du succès. » Des boules, blanches ou noires, sont placées dans une urne; chacune est marquée de l'un des numéros 1, 2, ..., n; la probabilité d'amener une boule marquée du numéro i est ϖ_i, c'est-à-dire que le rapport du nombre de boules portant le numéro i au nombre total de boules est ϖ_i; la probabilité d'amener une boule blanche marquée du numéro i est p_i, c'est-à-dire que le rapport du nombre de boules blanches marquées du numéro i au nombre de boules blanches ou noires marquées du même numéro est p_i. On tire une boule, elle est blanche : c'est l'événement observé; on demande la probabilité pour qu'elle soit marquée du numéro i. Cette probabilité, comme on le voit sans peine, est

$$\frac{p_i \varpi_i}{p_1 \varpi_1 + p_2 \varpi_2 + \ldots + p_n \varpi_n}.$$

Ici les divers numéros 1, 2, ..., n sont regardés comme les *causes* de l'événement, et le problème précédent peut être regardé comme le type d'un problème général, admettant la même solution, que l'auteur formule comme il suit :

« Diverses causes E_1, E_2, ..., E_n ont pu produire un événement observé. Les probabilités de ces causes, lorsque le résultat

n'était pas encore connu, étaient $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$. L'événement se produit; la cause E_i, lorsqu'on est certain que c'est elle qui agit, donne à l'événement la probabilité p_i. Quelle est la probabilité de chacune de ces causes qui sont, on l'admet, les seules possibles? »

Les *causes,* dans l'exemple particulier, étaient les *numéros* dont les boules sont marquées. On voit que le mot est quelque peu détourné de son sens habituel, assez vague d'ailleurs. Quoi qu'il en soit, l'application du principe précédent demande beaucoup de précautions, que M. Bertrand met bien en évidence. Soit, par exemple, le problème suivant : « Une urne contient des boules noires ou blanches en proportion inconnue. On y fait μ tirages, en remettant dans l'urne, après chaque tirage, la boule qui en est sortie. On a obtenu m boules blanches et n boules noires. Quelle est la composition la plus probable de l'urne? Les données sont insuffisantes ; on peut supposer toutes les compositions de l'urne également probables ; on trouve alors sans peine que la composition la plus probable est celle qui rend les probabilités de sortie des boules blanches ou noires proportionnelles aux nombres de fois qu'elles se sont montrées ; en outre, on peut regarder la formule

$$G e^{-\frac{\varepsilon^2 (m+n)}{2pq}},$$

où G est une constante indépendante de ε, comme donnant approximativement la probabilité pour que la composition de l'urne donne à la sortie d'une boule blanche la probabilité

$$p = \frac{m}{m+n} + \varepsilon,$$

et à celle d'une boule noire la probabilité

$$q = \frac{n}{m+n} - \varepsilon.$$

Mais les résultats seront très différents si l'on ne suppose pas que toutes les compositions de l'urne soient également probables; si, par exemple, on sait que le hasard a présidé à la composition de l'urne, que l'on y a mis N boules en tirant à chaque fois, à pile ou face, s'il faut mettre une boule blanche ou une boule noire, la composition la plus probable de l'urne donne à la sortie d'une

boule blanche la probabilité

$$\frac{N + 2m}{2(N + m + n)},$$

comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{m}{m+n}$.

Après avoir traité ces problèmes précis, M. Bertrand critique avec détail les solutions que l'on a voulu donner de questions que l'on pourrait être tenté d'assimiler à ceux-là, mais où l'on n'a aucun renseignement sur les probabilités respectives des causes; tel est le problème traité par Poisson : Buffon a jeté une pièce de monnaie 4040 fois et obtenu 2048 fois face. Quelle est la probabilité pour que la pièce de Buffon donnât à l'arrivée de face une probabilité plus grande que celle de pile? Telles sont encore les recherches auxquelles a donné lieu la régularité, révélée par la Statistique, du rapport des naissances masculines et féminines; les recherches de Mitchell relatives au rapprochement des étoiles. Il faut encore condamner plus fortement, s'il est possible, la prétention que l'on a eue d'évaluer la probabilité pour que le Soleil se lève demain, en raison du nombre de fois que l'on a observé son lever.

Les Chapitres VIII, IX, X, XI sont consacrés à l'application du Calcul des probabilités à la théorie des observations. L'extrême importance du sujet méritait assurément les développements que lui a donnés l'auteur.

Il expose d'abord le célèbre raisonnement que Gauss a donné dans la *Theoria motus corporum cœlestium* pour établir l'expression

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2},$$

relative à la probabilité d'une erreur d'observation égale à z, et qui se rapproche si nettement de la loi des écarts dans le théorème de Bernoulli. La démonstration repose sur deux postulats :

1° Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs observées d'une même grandeur x, faites dans les mêmes conditions et dignes de la même confiance, la valeur la plus probable de cette valeur x est la moyenne arithmétique

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n};$$

2° La probabilité pour que l'erreur d'une mesure soit comprise entre z et $z + dz$ peut se représenter par $\varphi(z)\,dz$.

Ces deux postulats admis, la démonstration est aisée; il suffit, en effet, d'écrire que la fonction de x

$$\varphi(x - x_1)\varphi(x - x_2)\ldots\varphi(x - x_n)$$

est maxima quand on attribue à x la valeur

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

pour obtenir une équation fonctionnelle qui permet de déterminer aisément la dérivée logarithmique de $\varphi(x)$.

Mais les postulats ne sont pas évidents; Gauss le reconnaissait bien, ainsi qu'il résulte du texte même de la *Theoria motus*, et de la façon dont il est revenu sur le sujet dans les Mémoires contenus sous le titre : *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ*. M. Bertrand leur adresse diverses critiques, dont la force n'est guère douteuse.

Tout d'abord il convient d'éviter une confusion de mots : on a bien démontré que, n croissant indéfiniment, la moyenne arithmétique

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

devait se rapprocher de la valeur probable de la quantité à mesurer. Ce n'est nullement une raison pour regarder cette moyenne comme étant la valeur *la plus probable* de x; c'est-à-dire celle dont la probabilité est la plus grande possible.

« La règle des moyennes, dit l'auteur, n'est ni démontrée ni exacte. S'il était admis que la moyenne entre plusieurs mesures fût toujours la valeur la plus probable, il en résulterait des contradictions. Quand on mesure une grandeur, on mesure, par cela même, toutes les fonctions de cette grandeur, son carré par exemple, ou le logarithme du nombre qui la représente. Pourquoi la valeur la plus probable du carré ne serait-elle pas la moyenne des valeurs obtenues pour le carré, et la valeur probable du logarithme, la moyenne des logarithmes?

» La valeur la plus probable d'une grandeur dont les mesures

successives sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serait alors représentée par l'une ou l'autre des formules

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}},$$

$$\sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots, x_n}.$$

» ... La seconde supposition indispensable à la démonstration, la possibilité d'exprimer la probabilité d'une erreur en fonction de cette erreur seulement, implique également contradiction. Une grandeur étant égale à X, on lui trouve, en la mesurant, la valeur x_1; l'erreur est $X - x_1$. L'erreur sur le carré est $X^2 - x_1^2$. Si l'on pose

$$X - x_1 = z,$$

on aura

$$X^2 - x_1^2 = 2x_1 z + z^2.$$

La probabilité d'une erreur étant $\varphi(z)$, celle de l'erreur $2x_1 z + z^2$ sur le carré sera aussi $\varphi(z)$. Elle n'est pas une fonction de l'erreur commise. »

Et se plaçant à un autre point de vue :

La probabilité d'une erreur « ne dépend-elle pas de la grandeur mesurée ? Si l'on fait une pesée, si l'on mesure un angle, lorsque le poids est un nombre exact de milligrammes, lorsque l'angle contient un nombre exact de secondes, n'a-t-on pas plus de chances d'évaluer juste que s'il faut ajouter une fraction ? Si cette fraction, que l'instrument ne donne pas, est exactement égale à $\frac{1}{2}$, n'a-t-on pas, en l'évaluant, moins de chances d'erreur que si elle est 0,27 ? »

Pourtant, si imparfaitement démontrée qu'elle soit, la formule de Gauss garde assurément toute son importance pratique, en raison des vérifications expérimentales qu'elle a reçues et qu'elle reçoit continuellement; M. Bertrand rapporte avec détail la confirmation de ce genre que lui a donnée Bessel par la discussion de 470 observations de Bradley portant sur les coordonnées, aujourd'hui bien connues, d'une même étoile. L'accord est des plus curieux.

Admettons donc cette formule; le premier problème auquel elle donne lieu est le calcul de la constante k qui, selon Gauss, me-

sure la précision de la série d'observations que l'on considère. Supposons d'abord que l'on connaisse la valeur exacte de la grandeur observée, en sorte que les erreurs soient, elles aussi, exactement connues. On s'appuiera sur cette proposition signalée plus haut : lorsque l'on a un grand nombre d'observations d'une même grandeur, la valeur probable de cette grandeur, c'est-à-dire la somme des valeurs observées respectivement multipliées par leurs probabilités, diffère peu de la moyenne des valeurs observées. La probabilité d'une erreur z étant

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2}.$$

la valeur probable de la valeur absolue de z et celle de z^2 seront données par les formules

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty z e^{-k^2 z^2} dz = \frac{1}{k\sqrt{\pi}},$$
$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty z^2 e^{-k^2 z^2} dz = \frac{1}{2k^2};$$

si donc on désigne par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les erreurs d'observation, qui sont connues, et si l'on pose

$$\frac{S_1}{n} = \frac{e_1 + e_2 + \ldots + e_n}{n},$$
$$\frac{S_2}{n} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}{n},$$

on pourra poser approximativement

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} = \frac{S_1}{n}, \qquad \frac{1}{2k^2} = \frac{S_2}{n};$$

d'où la curieuse formule de vérification

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\frac{S_2}{n}}{\left(\frac{S_1}{n}\right)^2}.$$

M. Bertrand donne d'autres formules analogues pour le calcul de k ; il indique diverses modifications qui rendent plus avantageuses celles qui précèdent ; enfin il discute soigneusement le

degré de confiance qu'il convient d'accorder à ces diverses formules. D'autres méthodes, qui reposent sur le groupement des erreurs, permettent encore de calculer k, et fournissent tout au moins des vérifications.

Lorsqu'on n'a pas la valeur exacte de la grandeur x pour laquelle on a trouvé les mesures $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on prendra pour cette valeur

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

et l'on calculera k comme précédemment. Diverses corrections ont d'ailleurs été proposées ; Gauss a donné des raisons plausibles pour prendre la valeur approchée de $\frac{1}{2k^2}$ égale, non à la $n^{\text{ième}}$ partie de la somme des carrés des erreurs approchées $X - x_1$, $X - x_2, \ldots, X - x_n$, mais bien à la $(n-1)^{\text{ième}}$ partie de cette même somme. M. Bertrand indique en outre quelques résultats plus généraux. Il passe ensuite à la discussion de cette délicate question : dans une série de mesures, doit-on négliger celles qui s'écartent trop de la moyenne? Une autre question du même genre, mais à laquelle on peut faire une réponse plus précise, est celle-ci : Lorsqu'on a plusieurs séries d'observations d'une même grandeur qui n'ont pas la même précision, c'est-à-dire pour lesquelles la constante k n'a pas la même valeur, comment doit-on les faire intervenir dans le calcul de la grandeur à déterminer? Un raisonnement très simple conduit à adopter la formule

$$\frac{\alpha_1 k_1^2 x_1 + \alpha_2 k_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_n k_n^2 x_n}{\alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2 + \ldots + \alpha_n k_n^2},$$

dans laquelle x_i est la moyenne des valeurs dans la $i^{\text{ième}}$ série, que l'on suppose contenir α_i observations, de précision k_i ; le rôle essentiel que jouent les constantes k_i^2 justifie le nom spécial de *poids*, qui leur a été donné par Gauss.

Tous ces résultats, si importants pour les Sciences physiques, sont fondés sur une loi qui n'est qu'imparfaitement démontrée. On ne doit pas s'étonner si Gauss a cherché à les établir indépendamment de cette loi ; il y est parvenu, en supposant seulement qu'il en existe une. C'est ce que M. Bertrand expose dans le Chapitre intitulé : *La théorie des moyennes*.

Soit encore $\varphi(z)$ la fonction qui caractérise la probabilité d'une erreur z; elle doit évidemment satisfaire à la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)\,dz = 0,$$

et si, comme on l'a toujours supposé jusqu'ici, les mesures ne comportent pas d'erreur systématique, aux conditions

$$\varphi(z) = \varphi(-z),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z)\,dz = 0;$$

dans le cas où une telle erreur existerait, elle serait représentée par l'intégrale précédente, et il serait aisé de l'éliminer après l'avoir calculée approximativement en cherchant la moyenne arithmétique des erreurs ; on supposera désormais que cela ait été fait. Soit maintenant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\varphi(z)\,dz = m^2$$

la valeur probable du carré de l'erreur ; il est clair que la valeur de m^2 peut être regardée comme mesurant le degré de confiance qu'il convient d'accorder au système d'observations, car plus m^2 sera petit, moins on aura à craindre de grandes erreurs. On voit du reste que le calcul de m^2 revient à celui de $\frac{1}{2k^2}$; la loi de probabilité des erreurs n'intervient pas.

Ceci posé, étant donné un système de mesures $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'une même grandeur x, on choisira, pour évaluer cette grandeur, celle des expressions

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

pour laquelle la valeur du carré de l'erreur probable est la plus petite possible. Tout d'abord on doit supposer que les quantités λ sont liées par la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1,$$

afin que, si toutes les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ sont exactes, la valeur adoptée le soit aussi. Si l'on désigne par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les erreurs

qui correspondent à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on voit que le carré de l'erreur sera

$$\Sigma \lambda_i^2 e_i^2 + 2 \Sigma \lambda_i \lambda_j e_i e_j,$$

dont on obtiendra la valeur probable en remplaçant e_i^2 et $e_i e_j$ par leurs valeurs probables; puisqu'on suppose qu'il n'y a pas d'erreurs systématiques, la valeur probable de $e_i e_j$ sera nulle comme celle de e_i; si toutes les mesures appartiennent à une même série, les valeurs probables de $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_n^2$ seront égales et il faudra déterminer les λ par la condition que leur somme soit égale à un, et que la somme de leurs carrés soit un minimum, ce qui exige

$$\lambda_i = \frac{1}{n}:$$

c'est la règle de la moyenne; si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ résultent de diverses séries d'observations pour lesquelles les constantes m^2 aient respectivement les valeurs $m_1^2, m_2^2, \ldots, m_n^2$, ces valeurs seront précisément les valeurs probables de $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_n^2$, et l'on est amené à chercher les valeurs des λ qui vérifient la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$$

et qui rendent la plus petite possible la somme

$$\lambda_1^2 m_1^2 + \lambda_2^2 m_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 m_n^2;$$

on trouve sans peine

$$\lambda_i = \frac{\frac{1}{m_i^2}}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \ldots + \frac{1}{m_n^2}},$$

et l'on retombe ainsi sur la même règle que plus haut.

Tout ce qui précède est relatif à la mesure directe d'une ou de plusieurs grandeurs. Comment devra-t-on s'y prendre pour calculer les valeurs des grandeurs inconnues $x, y, z, \ldots$, liées analytiquement, par des équations de formes connues, à des grandeurs mesurées $l_1, l_2, l_3, \ldots$, et entachées d'erreur? Tel est le problème capital qui reste à résoudre.

Supposons que les grandeurs inconnues $x, y, z, \ldots$ soient en nombre n, et les grandeurs mesurées $l_1, l_2, \ldots$ en nombre $n + p$; soient $e_1, e_2, \ldots, e_{n+p}$ les erreurs inconnues commises sur ces

dernières, erreurs que l'on suppose assez petites pour que leurs carrés soient négligeables ; soient enfin

$$\begin{gathered} \varphi(x, y, z, \ldots) = l_1 + e_1, \\ \psi(x, y, z, \ldots) = l_2 + e_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

les équations, en nombre $n + p$, qui lient les grandeur inconnues aux grandeurs mesurées ; ces équations seront incompatibles si, dans les seconds membres, on néglige les quantités e_1, e_2, ... ; on pourra toutefois en déduire des valeurs approchées x_1, y_1, z_1, ... qui les vérifieront approximativement ; en y remplaçant $x, y, z, \ldots$ par $x_1 + \xi$, $y_1 + \eta$, $z_1 + \zeta$, ..., développant par la formule de Taylor et négligeant les termes qui sont d'un degré supérieur au premier en ξ, η, ζ, ..., éliminant ensuite ces dernières quantités, on parviendra à p équations de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} P_1 e_1 + P_2 e_2 + \ldots + P_{n+p} e_{n+p} = h_1, \\ Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + \ldots + Q_{n+p} e_{n+p} = h_2, \\ R_1 e_1 + R_2 e_2 + \ldots + R_{n+p} e_{n+p} = h_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les petites quantités h_1, h_2, ... seront numériquement connues. Il s'agit de choisir parmi les valeurs des e qui satisfont à ces équations ; les valeurs des quantités $x, y, z, \ldots$ résulteront du choix qui aura été fait. M. Bertrand adopte pour la valeur de la grandeur à laquelle correspond la mesure l_1 la forme linéaire

$$l_1 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 + \ldots,$$

justifiée par la petitesse des nombres h_1, h_2, h_3, ..., et détermine les quantités λ par la condition que la valeur probable du carré de l'erreur

$$e_1 + \lambda_1 (P_1 e_1 + P_2 e_2 + \ldots + P_{n+p} e_{n+p}) + \ldots$$

soit la plus petite possible.

En supposant toutes les mesures dignes de la même confiance et en désignant par m^2 la valeur probable du carré de l'erreur commise sur l'une quelconque d'entre elles, on trouve pour la valeur probable du carré de l'erreur précédente l'expression que voici, multipliée par m^2,

$$1 + \lambda_1^2 \Sigma P^2 + \lambda_2^2 \Sigma Q^2 + \lambda_3^2 \Sigma R^2 + \ldots + 2\lambda_1\lambda_2 \Sigma PQ + 2\lambda_1\lambda_3 \Sigma PR + \ldots ;$$

on en déduit immédiatement les équations qui déterminent les valeurs cherchées des quantités λ. Des transformations analytiques très élégantes montrent ensuite qu'on serait parvenu au même résultat final, en cherchant les valeurs des quantités e qui vérifient les équations (3) et qui rendent la plus petite possible la somme

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_{n+p}^2.$$

On voit aussi qu'on pourra diriger les calculs sans faire l'élimination des quantités $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; mais, au contraire, en prenant ces quantités pour inconnues et en les déterminant de façon à satisfaire à la précédente condition de minimum. C'est la règle de Gauss : elle est une conséquence de sa loi des erreurs et il l'a donnée comme telle dans la *Theoria motus ;* il l'a établie sur une autre base dans la *Theoria combinationis observationum* (*Œuvres,* t. IV, p. 22). M. Bertrand reproduit textuellement cette dernière démonstration, très différente de celle qui vient d'être analysée.

Je laisse de côté les intéressantes applications que M. Bertrand fait de cette théorie, mais il est impossible de ne pas dire quelques mots d'une question très grave qu'il soulève à son propos.

« Les formules démontrées, dit-il, sont applicables à des observations qui ne sont pas encore faites ; elles indiquent les calculs par lesquels les inconnues devront se déduire des grandeurs directement mesurées. Les valeurs probables des carrés des erreurs à craindre dépendent de la précision espérée pour les mesures qu'on va prendre. Le cas où cette précision est assez bien connue, *a priori,* pour que les résultats obtenus n'y puissent rien changer, quoi qu'il arrive, est tout à fait exceptionnel.

» C'est à lui que se rapportent les formules.

» On s'est placé quelquefois à un point de vue absolument opposé. La précision des mesures est supposée inconnue ; la concordance plus ou moins parfaite des observations est le seul renseignement d'après lequel on puisse l'apprécier... »

Cette précision, on veut la calculer d'après les résultats, qui sont, cette fois, la seule donnée. Gauss a proposé une solution de ce problème, fondée sur une formule élégante dont M. Bertrand donne d'ailleurs la démonstration :

« La formule est irréprochable, mais l'application est rarement permise...

» Le principe admis est celui-ci :

» Il est permis, à titre d'approximation, d'égaler une fonction des premiers membres des équations (3), dont la valeur est exactement connue à la valeur probable calculée avant l'épreuve.

» Cette égalité, bien entendu, n'a jamais été proposée comme certaine. *Valor verus*, dit Gauss, *prout fors errores obtulit, major minorve medio fieri potest.*

» Ces deux grandeurs, la valeur véritable et la valeur probable, que le hasard peut faire plus grandes ou plus petites l'une que l'autre, dans une proportion inconnue, sont égalées cependant pour former l'équation dont la solution est déduite. »

Ces critiques sont assurément assez fortes ; mais l'auteur va plus loin : il montre comment, le principe admis, on en peut déduire, pour la précision, des valeurs très différentes et dont aucune, par conséquent, ne mérite confiance.

En résumé, tout porte à croire que l'on a là affaire à un de ces problèmes mal posés, où l'on cherche des causes que l'on ne peut atteindre, et dont l'histoire du Calcul des probabilités n'offre que trop d'exemples.

J'ai négligé, pour y revenir maintenant, le Chapitre relatif aux erreurs de situation d'un point, qui contient une importante généralisation de la loi des erreurs de Gauss.

Soient $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ..., $x_n y_n$ les coordonnées des positions présumées d'un point dont les coordonnées véritables sont x, y. M. Schuls a montré comment, en admettant un postulat, énoncé pour la première fois par Cotes, on pouvait, en suivant une voie toute pareille à celle que Gauss a tracée dans le cas d'une seule variable, arriver au résultat suivant, obtenu autrement par Bravais :

La probabilité d'une erreur comprise entre u et $u + du$ pour x et entre v et $v + dv$ pour y est de la forme

$$G e^{-k^2 u^2 - 2\lambda uv - k'^2 v^2} du\, dv,$$

les constantes G, k, k', λ étant liées par la relation

$$G \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 u^2 - 2\lambda uv - k'^2 v^2} du\, dv = 1.$$

Le postulat de Cotes est l'analogue du postulat des moyennes; il consiste à regarder le centre des moyennes distances des points observés comme la position *la plus probable* du point cherché.

Si l'on admet la formule précédente, on voit que les points d'égale probabilité sont distribués sur une même ellipse.

Ces considérations s'appliquent au tir à la cible. A une arme et à un tireur déterminés correspondent des valeurs des constantes k, λ, k' qui se déterminent approximativement par la théorie des moyennes. Après avoir donné des règles pour ce calcul, M. Bertrand discute avec soin la question de la règle à conseiller pour juger les résultats d'un concours de tir. C'est encore une de ces questions qui ne paraissent point admettre de réponse entièrement satisfaisante.

On me permettra de ne pas parler des deux derniers Chapitres relatifs aux lois de la Statistique et à la théorie des jugements. Peut-être l'extrême finesse dont M. Bertrand a donné tant de preuves dans son beau Livre, et que l'immortel écrivain à qui l'on doit les premières recherches sur le Calcul des probabilités prétendait être si rare chez les géomètres, n'était-elle pas nécessaire pour ruiner la confiance qu'inspirent la plupart des recherches mathématiques sur les lois dont la Statistique laisse soupçonner l'existence, et pour dévoiler les vices d'une théorie qui scandalisait si fort Stuart Mill. A coup sûr, il faut plus de sagacité pour critiquer Gauss que pour trouver Condorcet en défaut. Mais M. Bertrand a voulu sans doute que son lecteur se reposât un peu et qu'il fermât son Livre en souriant. J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STEGEMANN. — Grundriss von Differential- und Integral-Rechnung. I. Theil : Differential-Rechnung. Fünfte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage, herausgegeben von L. Kiepert. 1 vol. in-8° ; xii-465 p. Hannover, Helwing, 1888.

Le Traité de Calcul différentiel et intégral de M. Stegemann a déjà eu quatre éditions. M. Kiepert, bien connu par ses beaux travaux sur les fonctions elliptiques, donne aujourd'hui une cinquième édition du Calcul différentiel. « De nombreuses lacunes, dit-il, ont dû être corrigées. »

Le succès du Livre auprès des étudiants s'explique par d'incontestables qualités. Il est facile à lire, même pour quelqu'un qui travaille seul; de nombreuses applications qui, le plus souvent, sont entièrement développées, éclairent continuellement la théorie et chaque point de la théorie; elles permettent au lecteur de se familiariser avec les méthodes et avec les formules : un résumé de toutes les formules fondamentales, placé à la fin du volume, peut être facilement consulté par ceux à qui la mémoire fait défaut et permet, pour employer un mot de la langue des écoliers, de *repasser* rapidement les théories que ces formules condensent. Quant aux démonstrations des principes, fondées assez souvent sur l'intuition géométrique, elles ont ce degré de rigueur qui suffit habituellement dans les applications; elles offrent au moins l'avantage de ne pas fatiguer le lecteur par des subtilités pour lesquelles il n'est peut-être pas préparé. Ce dernier, après avoir étudié le Livre de MM. Stegemann et Kiepert, après avoir traité les applications qu'il contient, est en possession des connaissances de cet ordre que l'on peut réclamer d'un ingénieur; s'il veut d'ailleurs pousser plus loin ses études et pénétrer dans le domaine de la Science abstraite, les connaissances qu'il y aura puisées, l'habitude qu'il y aura prise du calcul ne lui seront assurément pas inutiles.

Quant aux matières que contient cet Ouvrage, il suffira de dire ici que ce sont les matières mêmes qui dans nos lycées sont traitées dans la partie du Cours de Mathématiques spéciales qui

regarde le Calcul différentiel. On peut même ajouter que, à tort ou à raison, la plupart de nos maîtres les enseignent en se plaçant à un point de vue plus élevé. J. T.

MEYER (E.). — DIE RATIONALEN EBENEN CURVEN 4ter ORDNUNG UND DIE BINÄRE FORM 6ter ORDNUNG. Inaugural-Dissertation, 40 p. in-8°. Königsberg, 1888.

Les trois polynômes du quatrième degré, qui définissent une courbe rationnelle du même ordre, peuvent, après une transformation linéaire convenable, être regardés comme les trois dérivées secondes d'une forme binaire du sixième degré ([1]). M. Ernst Meyer s'est proposé de rechercher le parti que l'on pouvait tirer de ce théorème pour l'étude des courbes unicursales du quatrième ordre. Il calcule d'abord la forme du sixième degré, en partant d'un théorème général de M. Stephanos sur les combinants. Ce calcul avait déjà été effectué d'une autre façon par M. Friedrichs ([2]). Il traite ensuite de l'intersection de la courbe du quatrième degré par une droite, de la recherche des points d'inflexion, des points doubles et des points de contact des tangentes doubles et retrouve en terminant un théorème que nous signalerons à la fin du compte rendu de la dissertation inaugurale de M. Gross.

J. T.

J. THIRION. — HISTOIRE DE L'ARITHMÉTIQUE. Bruxelles, Vromant. 1 vol. in-8° de VIII-164 pages.

Résumé de l'histoire de l'Arithmétique dans l'antiquité (Grecs et Romains) et au moyen âge. 1. Numération digitale; numération écrite (hiéroglyphes, numération hérodienne). 2. Numération classique des Grecs (écrite avec 27 signes; arénaire d'Archimède). 3. Fractions : les quantièmes en Grèce et en Égypte; fractions sexa-

---

(1) CLEBSCH-LINDEMANN, *Geometrie*, p. 900.

(2) *Die rationale Plankurve 4ter Ordnung im Zusammenhang mit der binären Form 6ter Ordnung*. Giessen, 1886.

gésimales. 4. Arithmétique pratique : abaque; multiplication par le procédé d'Apollonius; conjecture sur le procédé d'Archimède pour extraire les racines carrées. 5. Pythagore et Platon. 6. Euclide (et incidemment, Ératosthènes, Théon, Nicomaque, Jamblique, Thymaridas). 7. Diophante. 8. Les Romains. 9. Boèce. 10. Les Indiens (22 pages; un des meilleurs Chapitres du Livre). 11. Les Arabes. L'Auteur admet l'authenticité de la Géométrie de Boèce, le passage des chiffres indiens sans le zéro aux néopythagoriciens, puis aux Arabes occidentaux; le zéro vient ensuite des Indiens aux Arabes orientaux. 12. Le premier moyen âge; Gerbert. 13. Abacistes et algorithmistes. Fractions décimales et logarithmes. 14. Notes bibliographiques. Une planche donne les chiffres de l'Inde à diverses époques, des Arabes et du moyen âge.

MÉLANGES.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES LIMITES;

PAR M. E. CESARO.

Il est intéressant de savoir si, dans la recherche de la limite, pour n infini, de l'expression

$$(1) \qquad \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n},$$

où $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est une série divergente à termes positifs, celle-ci peut être remplacée par une série analogue $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$. Il faudrait savoir déterminer le plus petit nombre de conditions que doit remplir la série des v pour qu'il soit permis de la substituer à la série des u. Cette recherche me paraissant assez difficile, je me bornerai à montrer que la substitution indiquée est permise lorsque le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers zéro en décroissant, pourvu que l'expression

$$\frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} = \lambda_n$$

tende, pour n infini, vers une limite λ, finie et déterminée. On a

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$
$$= \frac{u_1}{v_1}\lambda_1 V_1 + \frac{u_2}{v_2}(\lambda_2 V_2 - \lambda_1 V_1) + \ldots + \frac{u_n}{v_n}(\lambda_n V_n - \lambda_{n-1} V_{n-1}).$$

Donc, si l'on pose

$$w_n = \left(\frac{u_n}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right) V_n,$$

et que l'on observe que

(2) $$W_n = U_n - \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} V_n,$$

on peut écrire

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n + \lambda_n (U_n - W_n),$$

puis

$$\frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lambda_n + \frac{W_n}{U_n}\left(\frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} - \lambda_n\right).$$

Pour démontrer que le second membre tend vers λ, il suffit de faire voir que W_n croît indéfiniment avec n ; car, dans cette hypothèse, l'identité (2) montre que $\frac{W_n}{U_n}$ est une fraction proprement dite, et l'on sait, d'autre part, que

$$\lim \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \lambda.$$

Il me reste donc à faire voir que W_n surpasse toute limite lorsque n augmente indéfiniment. Je remarque, dans ce but, que l'on a

$$U_n - U_\nu > \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}(V_n - V_\nu):$$

puis, par substitution dans (2),

(3) $$W_n > U_\nu - \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} V_\nu.$$

Après avoir fixé ν de manière que U_ν surpasse un nombre donné N, arbitrairement grand, je fais croître n jusqu'à ce que l'on ait

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{U_\nu - N}{V_\nu}.$$

Il est clair, d'après (3), que W_n surpasse N. Lorsque n croît, W_n reste supérieur à N; car $w_n > 0$. Donc l'expression (1) tend vers λ.

En particulier, si $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est une série divergente, dont les termes tendent vers zéro en décroissant, on a

$$(4) \qquad \lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

pourvu que le second membre existe. C'est de ce théorème que j'ai déduit la propriété des séries simplement convergentes, dont il a été question dans un récent article de M. Bagnera. Il suffit de faire $a_n = 1$ ou $a_n = -1$, suivant que le terme $a_n u_n$ de la série considérée est positif ou négatif. Alors le premier membre de (4) est nul, et le second membre, s'il existe, est égal à $1 - 2\varpi$, ϖ étant la probabilité de rencontrer un terme négatif. Donc $\varpi = \frac{1}{2}$. Dans une Note : *Sur une distribution de signes,* insérée aux *Rendiconti dei Lincei,* j'ai tenu compte du cas où ϖ n'existe pas.

Lorsqu'on cherche à remplacer la variable entière n par une variable continue x, on trouve que, si les fonctions φ et ψ croissent indéfiniment avec x, et que le rapport de leurs dérivées tende vers zéro en décroissant, on a

$$(5) \qquad \lim \frac{1}{\varphi} \int f \varphi' \, dx = \lim \frac{1}{\psi} \int f \psi' \, dx,$$

pourvu que le second membre existe. Ce théorème est évident si f tend vers une limite, qui est alors, d'après la règle de l'Hospital, la valeur commune des deux membres de (5). Mais je vais démontrer que la proposition énoncée subsiste lors même que f n'admet pas de limite. Soit

$$\int f \psi' \, dx = \mathrm{F} \psi,$$

F tendant, par hypothèse, vers une limite finie et déterminée. On a

$$f \varphi' = \mathrm{F} \varphi' + \mathrm{F}' \psi \frac{\varphi'}{\psi'}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(6) \qquad \chi = \varphi - \frac{\varphi'}{\psi'} \psi,$$

on peut écrire

$$\int f \varphi' \, dx = \mathrm{F} \varphi - \int \mathrm{F}' \chi \, dx,$$

ou bien

$$\int f\varphi'\,dx = (\varphi - \chi)F - \int F\chi'\,dx;$$

puis

(7) $$\frac{1}{\varphi}\int f\varphi'\,dx - \frac{1}{\psi}\int f\psi'\,dx = \frac{\chi}{\varphi}\left(\frac{1}{\chi}\int F\chi'\,dx - F\right).$$

Si je prouve que χ croît à l'infini avec x, j'aurai démontré, du même coup, que le second membre de (7) tend vers zéro; car, en vertu de (6), le premier facteur est une fraction proprement dite, et la règle de l'Hospital dit que le second facteur a zéro pour limite. On déduit de l'égalité (6), en appliquant un théorème de Cauchy,

$$\chi(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}[\psi(x) - \psi(x_0)] - \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\psi(x$$

où $x_0 < x_1 < x$. Donc

(8) $$\chi(x) > \varphi(x_0) - \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\psi(x_0).$$

On peut déterminer x_0 de manière que $\varphi(x_0)$ surpasse un nombre donné N, aussi grand qu'on le veut; puis, ayant fixé x_0, on peut faire croître x jusqu'à ce que l'on trouve

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} < \frac{\varphi(x_0) - N}{\psi(x_0)}.$$

On aura aussi, d'après (8), $\chi(x) > N$, et cette inégalité subsiste lorsque x croît; car $\chi(x)$ est une fonction croissante. En effet,

$$\chi' = -\psi\frac{d}{dx}\frac{\varphi'}{\psi'} > 0.$$

Le théorème (5) est démontré. En supposant que f, φ', ψ' soient des fonctions du plus grand nombre entier contenu dans x, on retrouve la proposition énoncée au commencement de cette Note.

SUR LA MULTIPLICATION DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. C. BOURLET.

1. Avant d'entrer dans mon sujet, j'établirai d'abord une proposition préliminaire.

Soit une fonction $f(x,y)$ des deux variables x et y, définie et finie pour l'ensemble des valeurs qui satisfont aux conditions

$$a_0 \leq x \leq a, \qquad b_0 \leq y \leq b.$$

Supposons cette fonction intégrable par rapport à x pour toutes les valeurs de y comprises dans l'intervalle $(b_0 b)$ et considérons l'intégrale

$$I = \int_{a_0}^{a} f(x, y)\, dx$$

qui définit une fonction de y dans l'intervalle $(b_0 b)$. Soit y_0 une valeur donnée de y, telle que

$$b_0 \leq y_0 < b,$$

et ε un nombre positif, tel que $y_0 + \varepsilon$ appartienne à l'intervalle $(b_0 b)$; je vais montrer que l'intégrale

$$I'_0 = \int_{a_0}^{a} f(x, y_0 + \varepsilon)\, dx$$

a pour limite l'intégrale

$$I_0 = \int_{a_0}^{a} f(x, y_0 + 0)\, dx$$

quand ε tend vers o, si l'on suppose :

1° Que $f(x, y_0 + \varepsilon)$ a une limite $f(x, y_0 + 0)$ quand ε tend vers o; 2° qu'on peut faire correspondre à tout nombre positif η un autre nombre ε, tel que l'on ait

$$|f(x, y_0 + \varepsilon) - f(x, y_0 + 0)| < \eta;$$

et cela *pour toutes les valeurs de x* comprises dans l'intervalle $(a_0 a)$, sauf pour certaines valeurs en nombre fini ou infini, mais telles qu'en choisissant ε suffisamment petit, et en entourant ces

valeurs dans des intervalles suffisamment petits, la somme de tous ces intervalles puisse devenir plus petite qu'une quantité donnée h, aussi petite qu'on le voudra. Pour abréger le langage, nous dirons, avec M. Harnack, que cet ensemble de valeurs forme une *masse discrète* (*discrete Menge*) dans l'intervalle $(a_0 a)$.

Considérons, en effet, la somme

$$S_n(y_0+0) = f(a_0+\theta_1\delta_1, y_0+0)\delta_1 + f(x_1+\theta_2\delta_2, y_0+0)\delta_2 + \ldots + f(x_{n-1}+\theta_n\delta_n, y_0+0)\delta_n,$$

où je pose

$$\delta_1 = x_1 - a_0, \quad \delta_2 = x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad \delta_n = a - x_{n-1}$$
$$(a_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < a)$$

et de même la somme

$$S_n(y_0+\varepsilon) = f(a_0+\theta_1\delta_1, y_0+\varepsilon)\delta_1 + f(x_1+\theta_2\delta_2, y_0+\varepsilon)\delta_2 + \ldots + f(x_{n-1}+\theta_n\delta_n, y_0+\varepsilon)\delta_n.$$

Quand on fera croître n indéfiniment, chacun des δ tendant vers o, $S_n(y_0+0)$ et $S_n(y_0+\varepsilon)$ auront pour limites respectivement I_0 et I'_0.

Désignons par Δ_k la limite maximum de la différence

$$|f(x, y_0+\varepsilon) - f(x, y_0+0)|$$

pour les valeurs de x comprises dans un intervalle δ_k qui contient un ou plusieurs points discrets, et soit Δ la plus grande des quantités Δ_k : si l'on désigne alors par h la somme des intervalles δ_k qui contiennent des points discrets, on pourra choisir ε suffisamment petit pour que, *dans tous les autres intervalles, on ait*

$$|f(x, y_0+\varepsilon) - f(x, y_0+0)| < \frac{\eta}{a-a_0-h};$$

on aura alors certainement

$$|S_n(y_0+\varepsilon) - S_n(y_0+0)| < \eta + h\Delta.$$

Or η peut être choisi aussi petit qu'on le veut et, d'après l'hypothèse (2°), on peut choisir les δ suffisamment petits pour que h soit aussi petit qu'on le voudra; donc on pourra choisir ε assez petit et n assez grand pour que

$$|S_n(y_0+\varepsilon) - S_n(y_0+0)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

d'ailleurs on pourra choisir n suffisamment grand pour que

$$|I_0 - S_n(y_0+0)| < \frac{\varepsilon'}{3},$$

$$|I'_0 - S_n(y_0+\varepsilon)| < \frac{\varepsilon'}{3}.$$

Donc on pourra choisir ε suffisamment petit pour que

$$|I'_0 - I_0| < \varepsilon'.$$

I'_0 a donc pour limite I_0.

2. Ces préliminaires étant posés, considérons deux fonctions $f_1(\theta), f_2(\theta)$, que nous supposerons développables en séries de Fourier, ainsi que leur produit $f_1(\theta), f_2(\theta)$: je vais chercher à établir une règle pour effectuer le produit de ces deux séries, c'est-à-dire une règle qui permette de calculer les coefficients du développement du produit $f_1 f_2$, connaissant les coefficients des développements de f_1 et f_2.

Soient

$$(1)\quad f_1(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \ldots + a_m\cos m\theta + b_m\sin m\theta + \ldots,$$

$$(2)\quad f_2(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta + \ldots + \alpha_m\cos m\theta + \beta_m\sin m\theta + \ldots$$

ces développements, dans lesquels on a, comme on sait,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos m\theta\,d\theta,\qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\sin m\theta\,d\theta,$$

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\cos m\theta\,d\theta,\qquad \beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\sin m\theta\,d\theta.$$

Supposons, pour un instant, la multiplication des deux séries (1) et (2) possible, et supposons de plus qu'on puisse intervertir l'ordre des termes, dans le produit effectué, d'une manière quelconque; puis cherchons, dans cette hypothèse, quels seraient les coefficients de $\cos q\theta$ et $\sin q\theta$, après avoir remplacé les produits de sinus et de cosinus par des sommes ou des différences.

Le coefficient de $\cos q\theta$ serait

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} S_q = \frac{1}{2}\Bigg[& \sum_0^q p(a_{q-p}\alpha_p - b_{q-p}\beta_p) \\ & + \sum_1^\infty p(a_{q+p}\alpha_p + b_{q+p}\beta_p + a_p\alpha_{p+q} + b_p\beta_{p+q}) \Bigg] \end{aligned} \right.$$

et celui de $\sin q\theta$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} U_q = \frac{1}{2}\Bigg[& \sum_1^q p(a_{q-p}\beta_p + b_{q-p}\alpha_p) \\ & + \sum_0^\infty p(b_{q+p}\alpha_p + \beta_{q+p}a_p - b_p\alpha_{p+q} - \beta_p a_{p+q}) \Bigg]; \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\beta_0 = 0, \qquad b_0 = 0,$$

le terme constant serait

$$(5)\qquad \frac{1}{2}S_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty p(a_p\alpha_p + b_p\beta_p)\right].$$

Cela étant, considérons ces séries S et U en elles-mêmes, abstraction faite de la manière dont elles ont été obtenues, et cherchons dans quelles conditions elles sont *convergentes* et dans quelles conditions les limites de S_q et U_q sont respectivement A_q et B_q, A_q et B_q désignant les coefficients de $\cos q\theta$ et $\sin q\theta$ dans le développement du produit $f_1(\theta)f_2(\theta)$ en série de Fourier :

$$A_q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\theta)\cos q\theta\, d\theta,$$

$$B_q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\theta)\sin q\theta\, d\theta.$$

Posons, à cet effet,

$$S_q = \frac{1}{2}\sum_0^q p(a_{q-p}\alpha_p - b_{q-p}\beta_p),$$

$$s'''_q = \frac{1}{2}\sum_1^m p(a_{q+p}\alpha_p + b_{q+p}\beta_p + a_p\alpha_{p+q} + b_p\beta_{p+q})$$

et

$$S_q^m = S_q + s_q^m.$$

Remplaçons dans ces expressions les quantités a, b, α, β par leurs expressions sous forme d'intégrales définies; on aura

$$a_{q+p}\alpha_p = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\tau)\cos(p+q)\theta\cos p\tau\,d\theta\,d\tau$$

et une expression analogue pour $b_{q+p}\beta_p$, etc. : donc

$$s_q^m = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\tau)\sum_1^m p\left\{\begin{array}{l}\cos[q\theta+p(\theta-\tau)]\\ +\cos(q\tau-p(\theta-\tau))\end{array}\right\}d\theta\,d\tau.$$

Sous le signe Σ nous avons une somme de cosinus d'arcs en progression arithmétique.

Par une transformation bien connue, nous aurons donc

$$s_q^m = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\tau)\,2\cos q\frac{\theta+\tau}{2}$$
$$\times\cos\frac{(m+1+q)(\theta-\tau)}{2}\,\frac{\sin\dfrac{m(\theta-\tau)}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\tau}{2}}\,d\theta\,d\tau;$$

par un calcul analogue, on trouverait

$$S_q = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\tau)\cos q\frac{\theta+\tau}{2}\,\frac{\sin(q+1)\dfrac{\theta-\tau}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\tau}{2}}\,d\theta\,d\tau;$$

on en tire

$$S_q^m = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\tau)\,\frac{\cos q\dfrac{\theta+\tau}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\tau}{2}}$$
$$\times\left[\sin(q+1)\frac{\theta-\tau}{2}+2\cos(m+1+q)\frac{\theta-\tau}{2}\sin m\frac{\theta-\tau}{2}\right]d\theta\,d\tau,$$

ce qui peut s'écrire

$$(6)\quad S_q^m = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)f_2(\tau)\cos q\frac{\theta+\tau}{2}\,\frac{\sin(2m+q+1)\dfrac{\theta-\tau}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\tau}{2}}\,d\theta\,d\tau.$$

Faisons alors le changement de variables suivant

$$\frac{\theta+\tau}{2}=x, \qquad \frac{\theta-\tau}{2}=y$$

ou

$$\theta=x+y, \qquad \tau=x-y;$$

on aura

$$(7)\quad S_q^m=\frac{1}{\pi^2}\int\int\frac{\sin(2m+q+1)y}{\sin y}f_1(x+y)f_2(x-y)\cos qx\,dx\,dy,$$

le champ de cette dernière intégrale étant limité par les courbes

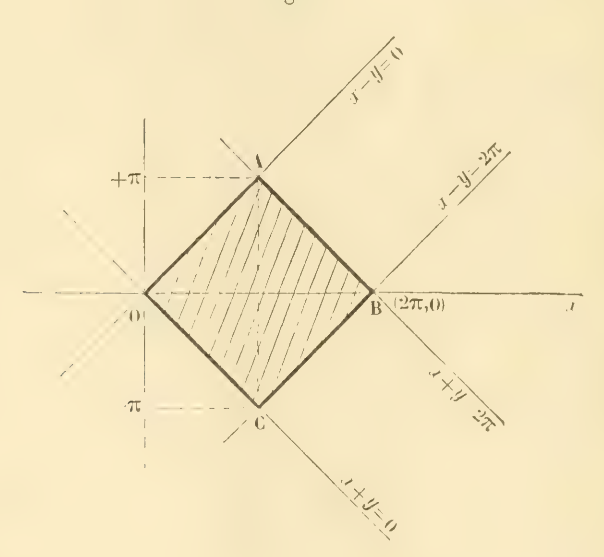
$$x+y=0, \qquad x-y=0, \qquad x+y=2\pi, \qquad x-y=2\pi,$$

limitées elles-mêmes aux quatre points

$$\begin{matrix} x=0, & x=\pi, & x=\pi, & x=2\pi, \\ y=0, & y=-\pi, & y=\pi, & y=0, \end{matrix}$$

ce qui montre que l'intégrale double porte sur l'aire intérieure du carré OABC (*fig.* 1).

Fig. 1.



On a donc

$$(8)\quad \begin{cases} S_q^m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(2m+q+1)y}{\sin y}dy\,\frac{1}{\pi}\int_y^{2\pi-y}f_1(x+y)f_2(x-y)\cos qx\,dx \\ \qquad -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{-\pi}\frac{\sin(2m+q+1)y}{\sin y}dy\,\frac{1}{\pi}\int_{-y}^{2\pi+y}f_1(x+y)f_2(x-y)\cos qx\,dx; \end{cases}$$

changeons dans la seconde partie y en $(-y)$, et nous aurons

$$(9) \qquad S_q^m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(y)\frac{\sin(2m+q+1)y}{\sin y}\,dy,$$

en posant

$$(10)\ F(y) = \frac{2}{\pi}\int_y^{2\pi-y}\frac{f_1(x+y)f_2(x-y)+f_1(x-y)f_2(x+y)}{2}\cos qx\,dx.$$

Supposons $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ finies dans tout l'intervalle $(0,2\pi)$: on voit alors immédiatement que l'on a

$$F(\pi) = 0;$$

cherchons ensuite ce que devient l'intégrale (10) quand y tend vers 0 : $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ étant développables en séries de Fourier, ce sont des fonctions intégrables. Leurs points de discontinuité forment donc une *masse discrète*, c'est-à-dire que les points, pour lesquels on ne peut *pas déterminer* ε *de façon que*

$$(11) \qquad \begin{cases} |f_1(x\pm\varepsilon)-f_1(x)| < \eta, \\ |f_2(x\pm\varepsilon)-f_2(x)| < \eta, \end{cases}$$

forment une masse discrète. On en conclut, *puisque* f_1 *et* f_2 *restent finies* entre 0 et 2π, que les points, pour lesquels on ne peut pas déterminer ε de façon que

$$(12) \quad |f_1(x+\varepsilon)f_2(x-\varepsilon)+f_1(x-\varepsilon)f_2(x+\varepsilon)-2f_1(x)f_2(x)| < \eta,$$

forment une masse discrète. On en conclut, d'après la proposition rappelée plus haut, que, quand y tend vers 0, $F(y)$ a pour limite

$$F(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)f_2(x)\cos qx\,dx,$$

c'est-à-dire que

$$F(0) = A_q.$$

D'ailleurs, pour les mêmes raisons, on voit que, pour

$$y < x < 2\pi - y,$$

les points, pour lesquels on ne peut pas avoir

$$(13) \qquad \begin{cases} |f_1(x\pm y\pm\varepsilon)-f_1(x\pm y)| < \eta, \\ |f_2(x\pm y\pm\varepsilon)-f_2(x\pm y)| < \eta, \end{cases}$$

forment une masse discrète, et l'on en conclut aisément, toujours

sous la condition que f_1 et f_2 restent finies, que $F(y)$ est une fonction continue de y.

De tout ceci il résulte enfin, en vertu d'un théorème bien connu dû à Dirichlet, que

$$\lim_{m=\infty} S_q^m = \lim_{m=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(y)\frac{\sin(2m+q+1)y}{\sin y}\,dy = F(0)+F(\pi).$$

Donc

$$\lim_{m=\infty} S_q^m = F(0) = A_q.$$

Nous en concluons donc que, si les fonctions $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ sont développables en séries de Fourier, ainsi que leur produit, et sont finies entre 0 et 2π, la série S_q sera *toujours convergente* et l'on aura

$$S_q = A_q.$$

Une démonstration toute semblable montrerait que, dans les mêmes conditions, U_q est convergente et que

$$U_q = B_q.$$

Donc, si deux fonctions $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$, finies et définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, sont développables en séries trigonométriques, ainsi que leur produit, on obtiendra les coefficients du développement de ce produit au moyen des coefficients des développements de f_1 et f_2 par la règle représentée par les égalités

$$A_q = S_q, \qquad B_q = U_q, \qquad A_0 = S_0.$$

3. Pour terminer, nous montrerons comment l'application de cette règle peut conduire à la découverte d'identités.

Il est aisé de se rendre compte que la série suivante

$$\varphi_n(x) = \frac{n-1}{2} - \frac{n}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{2\pi x}{n}}{1} + \ldots + \frac{\sin(n-1)\frac{2\pi x}{n}}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\frac{2\pi x}{n}}{n+1} + \ldots + \frac{\sin k\frac{2\pi x}{n}}{k} + \ldots\right],$$

où dans la parenthèse il manque tous les termes où k est un multiple de n, représente $E(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et l'entier n, $E(x)$ étant le plus grand entier contenu dans x.

Effectuons le carré de $\varphi_n(x)$ par notre règle et nous trouverons

$$S_q = 0,$$

quand q est multiple de n, et

$$S_q = \frac{n^2}{\pi^2 q}\left[\frac{1}{q} + \sum_1^{\infty} {}^k \left(\frac{1}{kn+q} - \frac{1}{kn-q}\right)\right]$$

quand q n'est pas un multiple de n.

Calculons, d'autre part, directement les coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction représentant $[E(x)]^2$ entre 0 et n.

Le coefficient A_q de $\cos q \dfrac{2\pi x}{n}$ sera donné par la formule

$$A_q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left[E\left(\frac{n\theta}{2\pi}\right)\right]^2 \cos q\theta \, d\theta;$$

d'où, par un calcul facile,

$$A_q = \frac{n}{q\pi} \cot \frac{\pi q}{n}$$

quand q n'est pas un multiple de n et

$$A_{kn} = 0.$$

En écrivant que ces deux développements sont identiques, on trouve l'identité

$$\pi \cot \frac{\pi q}{n} = \frac{1}{\frac{q}{n}} + \sum_1^{\infty} {}^k \left(\frac{1}{k+\frac{q}{n}} - \frac{1}{k-\frac{q}{n}}\right),$$

qui donne une nouvelle démonstration de la formule bien connue

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} {}^k \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k-x}\right)$$

pour toutes les valeurs commensurables de x non entières : car $\frac{q}{n}$ est un nombre rationnel quelconque. Appliquons à un second exemple : soit

$$B_\alpha(x) = \alpha!\left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} - \frac{1}{2}\frac{x^\alpha}{\alpha!} + \frac{B_1}{1.2}\frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - \frac{B_2}{4!}\frac{x^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!} + \ldots\right]$$

le $\alpha^{\text{ième}}$ polynôme de Bernoulli. Raabe ([1]) a montré les formules suivantes :

$$B_\alpha(x) = \alpha! \sum\nolimits_{\alpha+1}(x).$$

En posant

$$\sum\nolimits_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1}\frac{1}{2^{2p}\pi^{2p+1}}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1^{2p+1}} + \ldots + \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2p+1}} + \ldots\right)$$

et

$$\sum\nolimits_{2p}(x) = (-1)^p\frac{B_p}{2p!} + (-1)^{p+1}\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\left(\frac{\cos 2\pi x}{1^{2p}} + \ldots + \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2p}} + \ldots\right),$$

calculons le terme constant du carré du développement de $\frac{1}{2p!}B_{2p}(x)$, et l'application de notre règle nous donne

$$S_0 = \frac{B_{2p+1}}{(4p+2)!};$$

on a donc

$$\frac{B_{2p+1}}{(4p+2)!} = \left(\frac{1}{2p!}\right)^2 \int_0^1 [B_{2p}(x)]^2\,dx,$$

d'où

$$B_{2p+1} = \frac{(2p+1)(2p+2)\ldots(4p+2)}{1.2\ldots 2p}\int_0^1 [B_{2p}(x)]^2\,dx.$$

On trouverait de même, en effectuant le carré de $B_{2p-1}(x)$, la formule suivante :

$$B_{2p} = \frac{2p(2p+1)\ldots 4p}{1.2\ldots(2p-1)}\int_0^1 [B_{2p-1}(x)]^2\,dx - \frac{(2p+1)\ldots 4p}{1.2\ldots 2p}B_p^2.$$

Ces formules, qui se trouvent d'ailleurs dans le Mémoire déjà cité de Raabe, établies par une voie un peu differente, permettent de calculer B_{2p} et B_{2p+1} connaissant seulement B_1, B_2, ..., B_p.

([1]) RAABE, *Journal de Crelle*, t. 42, p. 348.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J. PTASZYCKI. — SUR L'INTÉGRATION SOUS FORME FINIE DES DIFFÉRENTIELLES ELLIPTIQUES. 149 p. in-8°. Saint-Pétersbourg, 1888. (Russe.)

1. Ce travail est consacré au problème suivant :

Étant donnée une intégrale elliptique, on demande de l'exprimer à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques, en nombre fini, ou de s'assurer qu'une pareille réduction est impossible.

On prend pour point de départ le théorème connu d'Abel concernant l'intégration finie. Soient P, Q des polynômes entiers, et

$$R = x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p;$$

d'après ce théorème, si l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}} \tag{1}$$

est exprimable sous forme finie, sa valeur peut être représentée par la formule

$$\frac{X_0}{Y_0}\sqrt{R} + \sum C \log \frac{X + Y\sqrt{R}}{X - Y\sqrt{R}}, \tag{2}$$

X_0, Y_0, X, Y désignant des polynômes entiers, C une constante.

Le livre est divisé en cinq Chapitres dont chacun est suivi d'exemples.

2. *Chapitre I.* — Le commencement est consacré à la démonstration des propriétés suivantes de la formule (2) :

I. La dérivée du terme algébrique $\frac{X_0}{Y_0}\sqrt{R}$ se réduit à une fonction $\frac{L}{M\sqrt{R}}$; si le polynôme M ne contient ni facteurs multiples, ni facteurs appartenant à R, le degré de cette fonction ne sera pas inférieur à 1.

II. Soit

$$\log \frac{X + Y\sqrt{R}}{X - Y\sqrt{R}} \tag{3}$$

un terme logarithmique composé des fonctions

$$(4)\qquad X+Y\sqrt{R},\qquad X-Y\sqrt{R},$$

dont le produit est

$$X^2-Y^2R=(x-\mathfrak{a}_1)^{m_1}(x-\mathfrak{a}_2)^{m_2}\ldots(x-\mathfrak{a}_l)^{m_l}D,$$

où les racines du polynôme D annulent R; $\mathfrak{a}_i$ n'annule pas R. En posant $\left(\frac{\sqrt{R}}{x^2}\right)_{x=\infty}=1$, on désigne par m_0, m'_0 les degrés des fonctions (4). On suppose que X, Y sont premiers entre eux, de sorte que, en choisissant convenablement $\sqrt{R\mathfrak{a}_i}=(\sqrt{R})_{x=\mathfrak{a}_i}$, les fonctions (4) contiendront respectivement tous les facteurs des expressions

$$(x-\mathfrak{a}_1)^{m_1}(x-\mathfrak{a}_2)^{m_2}\ldots(x-\mathfrak{a}_l)^{m_l}D^{\frac{1}{2}},\qquad D^{\frac{1}{2}},$$

(c'est-à-dire que les fractions $\dfrac{X+Y\sqrt{R}}{(x-\mathfrak{a}_1)^{m_1}\ldots(x-\mathfrak{a}_l)^{m_l}D^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{X-Y\sqrt{R}}{D^{\frac{1}{2}}}$ resteront finies pour les racines des dénominateurs respectifs). Cela étant, la dérivée du terme (3) sera

$$\left[(m_0-m'_0)x+\mathfrak{A}+m_1\frac{\sqrt{R\mathfrak{a}_1}}{x-\mathfrak{a}_1}+m_2\frac{\sqrt{R\mathfrak{a}_2}}{x-\mathfrak{a}_2}+\ldots+m_l\frac{\sqrt{R\mathfrak{a}_l}}{x-\mathfrak{a}_l}\right]\frac{1}{\sqrt{R}},$$

où $\mathfrak{A}$ est une constante.

III. On peut, si l'on veut, supposer $D=$ const., car on peut remplacer le terme (3) par

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{X+Y\sqrt{R}}{X-Y\sqrt{R}}\right)^2=\tfrac{1}{2}\log\frac{X_1+Y_1\sqrt{R}}{X_1-Y_1\sqrt{R}}.$$

3. En considérant l'intégrale (1), on démontre, à l'aide des formules de réduction pour les intégrales $\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{R}}$, qu'on a

$$\int\frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}}=\frac{X_0}{Y_0}\sqrt{R}+\int\frac{P_1\,dx}{Q_1\sqrt{R}},$$

où Q_1 ne contient ni facteurs multiples, ni facteurs appartenant à R; le degré de $\frac{P_1}{Q_1}$ ne dépasse pas zéro. Cette réduction peut être effectuée à l'aide des seules opérations arithmétiques.

Des propositions du n° 2 on conclut que cette réduction résout immédiatement le problème relatif à l'intégrale (1) dans ces cas : 1° $P_1 = 0$, alors l'intégrale est algébrique ; 2° le degré de $\frac{P_1}{Q_1}$ surpasse -1, alors l'intégrale est impossible sous forme finie ; 3° $\frac{P_1}{Q_1}$ se réduit à une constante qui n'est pas égale à zéro, alors l'intégrale est impossible sous forme finie.

Dans ce qui suit, on s'occupera de l'intégrale

$$\int \frac{P_1\,dx}{Q_1\sqrt{R}}, \tag{5}$$

qui ne présente pas les cas mentionnés ci-dessus. Si cette intégrale s'exprime sous forme finie, sa valeur sera

$$\sum C \log \frac{X + Y\sqrt{R}}{X - Y\sqrt{R}}.$$

4. La quantité (5) est toujours égale à $\sum \gamma \int \frac{P_2\,dx}{Q_2\sqrt{R}}$, où les γ désignent des constantes qui ne peuvent satisfaire à l'équation $\Sigma\gamma N = 0$, les N étant des nombres rationnels, et

$$\int \frac{P_2\,dx}{Q_2\sqrt{R}} = \int \left(m_0 x + A + m_1 \frac{\sqrt{R a_1}}{x - a_1} + m_2 \frac{\sqrt{R a_2}}{x - a_2} + \ldots + m_l \frac{\sqrt{R a_l}}{x - a_l} \right) \frac{dx}{\sqrt{R}}, \tag{6}$$

les m étant des entiers rationnels et positifs ; les constantes A sont indéterminées (la somme $\Sigma\gamma A$ est connue).

C'est seulement pour une seule valeur de A que l'intégrale (6) peut s'exprimer sous forme finie (*voir* n° 3, IIIe cas). Si, pour un certain A, l'intégrale s'exprime sous forme finie, sa valeur sera donnée par la formule

$$\frac{1}{\nu} \log \frac{X + Y\sqrt{R}}{X - Y\sqrt{R}},$$

ν désignant un nombre entier positif ; on déterminera sur-le-champ la valeur de A dès qu'on connaîtra la dernière formule.

5. On peut réduire l'intégrale (5) à l'intégrale plus simple et

de même forme (6). On détermine les polynômes X_0, Y_0 satisfaisant aux conditions : 1° les degrés des polynômes sont égaux à

$$\frac{m_0 + m_1 + \ldots + m_l + 1 + \eta}{2}, \qquad \frac{m_0 + m_1 + \ldots + m_l - 3 + \eta}{2},$$

η étant 0 ou 1; 2° le degré de $X_0 - Y_0\sqrt{R}$ est égal à

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_l + 1 + \eta - m_0}{2};$$

3° la fonction $X_0 + Y_0\sqrt{R}$ contient tous les facteurs de l'expression $(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}\ldots(x - a_l)^{m_l}(x - g_0)^{\frac{\eta}{2}}$, g_0 étant racine de R. On aura

$$X_0^2 - Y_0^2 R = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}\ldots(x - a_l)^{m_l}(x - g_0)^{\eta}(dx + e),$$

et la quantité

$$\log\frac{X_0 + Y_0\sqrt{R}}{X_0 - Y_0\sqrt{R}}$$

sera égale (n° 2, II) : 1° à la valeur de l'intégrale (6) pour un certain A, si $\frac{-e}{d}$ est racine de R; 2° à l'intégrale (6) plus l'intégrale $\int\frac{\pm(x + A')\,dx}{\sqrt{R}}$, où A' dépend de A, si $d = 0$; 3° à l'intégrale (6) plus l'intégrale $\int\left(\frac{\sqrt{Ra}}{x - a} + A'\right)\frac{dx}{\sqrt{R}}$, où $a = \frac{-e}{d}$, dans tous les autres cas. En posant $\frac{\sqrt{Ra}}{x - a} = \alpha x_1 + \beta$, α et β étant quelconques, la dernière intégrale deviendra $\int\frac{x_1 + A_1}{\sqrt{R_1}}\,dx_1$.

Dans ce qui suit, on ne s'occupera que des intégrales de la forme

$$J = \int\frac{x + A}{\sqrt{R}}\,dx. \tag{7}$$

C'est M. Tchebycheff qui a démontré, le premier, que la réduction de l'intégrale (6) à une fonction finie se ramène à celle des intégrales de forme (7). (*Journal de Liouville*, t. XVIII, XXI.)

6. On est ainsi amené à la question de la réduction de l'inté-

grale (7) par la formule (*voir* n°s 4; 2, II et III)

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{R}}\,dx = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{X+Y\sqrt{R}}{X-Y\sqrt{R}}, \tag{8}$$

où $X^2 - Y^2R = \text{const.}$ et où λ est un nombre entier positif.

Cette question est équivalente à celle de la résolution de l'équation

$$X^2 - Y^2R = \text{const.} \tag{9}$$

en polynômes entiers; car la solution X, Y (on la supposera toujours, ce qui est possible, telle que le degré de $X + Y\sqrt{R}$ soit un entier positif λ) de cette équation satisfera (n° 2, II), pour un certain A, à l'équation (8).

Dans le Chapitre II on exposera la méthode d'Abel pour la résolution de l'équation (9).

7. On peut présenter d'une autre manière la question relative à l'intégrale (7). En posant $\frac{x-g}{x-g_0} = \alpha z + \beta$, g_0, g étant des racines de R, on mettra l'intégrale (7) sous la forme

$$J = \int\left(\frac{\sqrt{Sb}}{z-b} + B\right)\frac{dz}{\sqrt{S}}, \tag{10}$$

où S est un polynôme du troisième degré; B dépend de A. Si l'intégrale (10) s'exprime sous forme finie, sa valeur sera donnée (n° 4) par la formule

$$\frac{1}{\nu}\log\frac{u+v\sqrt{S}}{u-v\sqrt{S}},$$

possédant les propriétés analogues à celles du n° 2. On peut donc dire que la question de la réduction de l'intégrale (10) à une fonction finie est équivalente à la résolution du problème : *Trouver un nombre entier positif* ν *et des polynômes* u, v *tels que* $u + v\sqrt{S}$ *contienne tous les facteurs de* $(z-b)^\nu$, *et qu'on ait*

$$u^2 - v^2S = (z-b)^\nu(dz+e),$$

où $dz + e$ *représente une constante ou un facteur de* S.

C'est dans le Chapitre III qu'on s'occupera de ce problème.

8. *Chapitre II.* — En écrivant l'équation (9) sous la forme $\frac{X}{Y} - \sqrt{R} = \frac{\text{const.}}{Y(X + Y\sqrt{R})}$, on voit que les polynômes X, Y, satisfaisant à cette équation, peuvent être regardés comme les termes d'une réduite dans le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue. Ce développement est

$$r_0 + \cfrac{1}{\mu_0 + \cfrac{1}{\mu_1 + \ldots}},$$

μ_i étant du premier ou du second degré. En vertu d'une propriété de l'expression $P_i^2 - Q_i^2 R$, où $\frac{P_i}{Q_i}$ est la $(i+1)^{\text{ième}}$ réduite, on obtient ce théorème d'Abel : *Pour que l'équation* (9) *admette des solutions entières, il faut et il suffit que, pour un certain i, μ_i soit du second degré ou, ce qui revient au même, que le développement de $\sqrt{R}$ soit périodique; cette condition remplie, on a $X = P_i$, $Y = Q_i$. Si P_i, Q_i représentent la solution correspondant au plus petit nombre λ dans la formule* (8), *toutes les autres solutions peuvent être trouvées en vertu de la relation* $X + Y\sqrt{R} = (P_i + Q_i\sqrt{R})$.

Le théorème d'Abel permet de trouver la valeur de l'intégrale (7), toutes les fois qu'elle se réduit à une fonction finie; on a ainsi la condition, nécessaire et suffisante, pour que cette réduction soit possible.

9. On obtient diverses propositions relatives à la formule (8) en s'appuyant toujours sur le développement de $\sqrt{R}$. Voici la plus importante, due à M. Tchebycheff : Si la plus petite valeur de λ dans la formule (8) est paire, le polynôme R étant

$$R = x^4 + lx^3 + mx^2 + nx = x(x-g)(x-g')(x-g''),$$

ce polynôme se décompose en deux facteurs

$$x^2 + px = x(x - g''), \qquad x^2 + rx + s = (x-g)(x-g'),$$

tels que les coefficients p, r, s et le nombre

$$\sqrt{s(s - pr + p^2)} = \sqrt{gg'(g'' - g)(g'' - g')}$$

s'expriment rationnellement en l, m, n. Si, de plus, les nombres g, g', g'' sont réels et de même signe, g'' sera le plus grand en valeur absolue.

10. *Chapitre III* [1]. — Avant de passer à la solution du problème du n° 7, on fait ces remarques préliminaires :

1° Le nombre ν n'est pas inférieur à 2; 2° les polynômes u, v,

---

[1] Je crois utile de rappeler les résultats principaux relatifs à l'intégrale (7), dus à MM. Tchebycheff et Zolotareff.

Le travail de M. Tchebycheff (*Journal de Liouville*, 1864) contient : 1° le procédé pour la détermination de l'intégrale (7), les coefficients de R étant rationnels, toutes les fois qu'elle se réduit à une fonction finie; 2° la condition pour la possibilité de cette réduction; 3° le complément à cette condition qui permet de résoudre toujours la question relative à l'intégrale.

M. Tchebycheff a donné ses propositions sans démonstration. C'est Zolotareff qui les a démontrées le premier (*Journal de Liouville*, 1874).

Dans son Ouvrage *Sur les nombres entiers complexes* (Saint-Pétersbourg, 1874, russe), Zolotareff a considéré le cas où les coefficients de R sont des nombres réels quelconques (sauf pourtant quelques nombres exceptionnels). Il a démontré que le procédé et la condition de M. Tchebycheff mentionnés plus haut restent vrais même pour ce cas, et a formulé le complément à la condition qui permet de résoudre la question relative à l'intégrale (7), dans ce cas général. Ce complément, par sa forme, est différent de celui de M. Tchebycheff.

Le procédé de M. Tchebycheff, mentionné ci-dessus, consiste en transformations successives de l'intégrale (7) au moyen de la formule

$$\int \frac{x_i + \mathrm{A}_i}{\sqrt{\mathrm{R}_i}}\, dx_i = \frac{1}{2} \log \frac{\frac{1}{16} l_i^3 - \frac{1}{4} l_i m_i + \frac{1}{2} n_i}{\sqrt{\mathrm{R}_i} - x_i^2 - \frac{l_i}{2} x_i - \frac{4 m_i - l_i^2}{8}} + \frac{1}{2} \int \frac{x_{i+1} + \mathrm{A}_{i+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_{i+1}}}\, dx_{i+1},$$

où $\mathrm{R}_i = x_i^4 + l_i x_i^3 + m_i x_i^2 + n_i x_i$ et $x_{i+1} = \dfrac{\frac{1}{16} l_i^3 - \frac{1}{4} l_i m_i + \frac{1}{2} n_i}{\sqrt{\mathrm{R}_i} - x_i^2 - \frac{l_i}{2} x_i - \frac{4 m_i - l_i^2}{8}}$.

Dans le Chapitre III du présent Livre, on expose un nouveau procédé pour la détermination de l'intégrale (7), toutes les fois qu'elle se réduit à une fonction finie; ce procédé est plus simple que celui de M. Tchebycheff. On déduit dudit procédé la condition pour la possibilité de cette réduction; on peut donner à cette condition la même forme qu'à celle de M. Tchebycheff, de sorte qu'on peut lui appliquer les compléments de MM. Tchebycheff et Zolotareff. On trouvera ces compléments dans le Chapitre V.

Le complément du n° 25 est donné par Zolotareff pour le cas où les coefficients de R sont des nombres algébriques étudiés dans son Ouvrage; mais ce complément subsiste pour les nombres algébriques quelconques. On peut même remarquer que l'application de ce complément n'exige pas la décomposition des nombres entiers algébriques en facteurs premiers (existants ou idéaux).

satisfaisant à l'énoncé, coïncident, pour $i=\nu$, avec la solution du problème suivant : *Trouver les polynômes* U, V *tels que* $U+V\sqrt{S}$ *contienne tous les facteurs de* $(z-b)^i$, *et que* $U^2-V^2S=(z-b)^i(dz+e)$, *le degré de* $(dz+e)$ *étant égal à* 1 *ou à* 0.

Ce problème a toujours, pour $i\geqq 2$, une solution, et une seule (dans un sens facile à concevoir).

11. On se propose de trouver la solution du problème du n° 7 si elle est possible, ainsi que la condition pour qu'elle soit possible. On peut procéder de la manière suivante.

On cherche si l'on ne peut satisfaire au problème en prenant pour ν la plus petite valeur possible, c'est-à-dire (n° 10, 1°) $\nu=2$. Dans ce but (n° 10, 2°), on détermine le polynôme U du premier degré, tel que $U+\sqrt{S}$ contienne les deux facteurs de $(z-b)^2$. On aura

$$U^2-S=(z-b)^2(dx+e),$$

où il est évident que d n'est pas nul ; et, en vertu de la proposition analogue à la proposition II du n° 2, on conclut qu'en désignant par J l'intégrale (10) on peut poser

$$2J=\log\frac{U+\sqrt{S}}{U-\sqrt{S}}+J_1,$$

$$J_1=\int\left(\frac{\sqrt{S\,b_1}}{z-b_1}+B_1\right)\frac{dz}{\sqrt{S}},\qquad b_1=\frac{-e}{d};$$

B_1 dépend de B. Si b_1 est racine de S, J_1 disparaît pour $B_1=0$; c'est-à-dire que, pour une valeur convenable de B, l'intégrale (10) s'exprimera sous forme finie.

Supposons que ce cas n'ait pas lieu. Alors, par notre procédé, nous sommes ramenés à l'intégrale J_1 de la même forme (10) que J. En appliquant notre procédé à cette nouvelle intégrale, on la ramène à J_2. En poursuivant cette marche, on formera la suite

(11) $$J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_{s+1},\ \ldots,\ J_{\sigma-1},\ J_\sigma,\ \ldots$$

dont les termes sont de la forme

$$J_i=\int\left(\frac{\sqrt{S\,b_i}}{z-b_i}+B_i\right)\frac{dz}{\sqrt{S}},$$

et se déterminent successivement à l'aide de la formule

$$(12)\qquad 2J_i = \log\frac{U_i+\sqrt{S}}{U_i-\sqrt{S}} + J_{i+1},$$

où U_i désigne le polynôme du premier degré trouvé par la condition que $U_i+\sqrt{S}$ contienne les deux facteurs de $(z-b_i)^2$.

On a maintenant cette proposition évidente : L'intégrale (10) s'exprime sous forme finie si, pour un certain entier σ, on a soit 1° $J_\sigma = 0$, pour $B_\sigma = 0$; soit 2° $J_\sigma = J_{s+1}$, pour $B_\sigma = B_{s+1}$. Pour déterminer l'intégrale, dans ces cas, on prend σ équations qu'on obtient en posant dans (12) $i = 0, 1, 2, \ldots, \sigma-1$; ces équations jointes à l'équation $J_\sigma = 0$, dans le premier cas, et à l'équation $J_\sigma = J_{s+1}$, dans le second cas, donneront respectivement, dans les cas indiqués,

$$J = \frac{1}{2^\sigma}\log\frac{u+v\sqrt{S}}{u-v\sqrt{S}}, \qquad J = \frac{1}{2^s(2^{\sigma-s-1}-1)}\log\frac{u+v\sqrt{S}}{u-v\sqrt{S}};$$

u, v représentent des polynômes entiers ; on peut supposer qu'ils satisfont au problème du n° 7 respectivement pour

$$\nu = 2^\sigma, \qquad \nu = 2^s(2^{\sigma-s-1}-1).$$

12. La proposition du numéro précédent a sa réciproque : Si l'intégrale (10) s'exprime sous forme finie, la série (11) présentera l'un des deux cas indiqués. Pour s'en convaincre, on examine à part les deux cas qui peuvent se présenter lorsque J s'exprime sous forme finie ; le plus petit nombre ν satisfaisant au problème n° 7 peut être égal soit à 2^σ, soit à $2^s m$, m étant impair et supérieur à 1. Dans le premier cas, on a (n° 7) $J = \frac{1}{2^\sigma}\log\frac{u+v\sqrt{S}}{u-v\sqrt{S}}$; d'autre part, en s'appuyant sur les équations (12), on trouvera $J = \frac{1}{2^\sigma}\frac{u_1+v_1\sqrt{S}}{u_1-v_1\sqrt{S}} + J_\sigma$; les polynômes u, v satisfont au problème du n° 10, pour $i = \nu$, et l'on reconnaît aisément que les polynômes u_1, v_1 peuvent être regardés aussi comme satisfaisant au même problème, pour le même i; on peut donc supposer qu'on a $u = u_1$, $v = v_1$; par conséquent on a $J_\sigma = 0$, pour $B_\sigma = 0$. Dans le second cas, en désignant par σ le plus petit entier tel que $2^{\sigma-s-1}-1$ soit

divisible par m, on démontre, en procédant à peu près comme dans le cas précédent, qu'on a $J_\sigma = J_{s+1}$, pour $B_\sigma = B_{s+1}$.

13. On a ainsi le théorème suivant : *Pour que l'intégrale* J *soit exprimable sous forme finie, il faut et il suffit que la série* (11) *soit pour une certaine valeur de* B *ou finie :* $J_1, J_2, \ldots, J_\sigma = 0$, *ou périodique :* $J_1, J_2, \ldots, J_{s+1}, \ldots, J_{\sigma-1}, J_\sigma = J_{s+1}, J_{\sigma+1} = J_{s+2}, \ldots$. *Ces conditions étant remplies, la valeur de l'intégrale se détermine immédiatement* (nº 11).

14. Les propositions de ce Chapitre peuvent être énoncées autrement. L'intégrale J de la forme (10) est une transformée de l'intégrale (7); supposons, ce qui est toujours possible, que R soit divisible par x. Cela étant, on se propose d'énoncer les propositions, en considérant J sous la forme (7), et représentant de même $J_1, J_2, \ldots$ sous la forme $J_i = \int \frac{x_i + A_i}{\sqrt{R_i}}\,dx_i$, R_i étant divisible par x_i.

On voit sur-le-champ qu'on peut prendre $x_{i+1} = \frac{x_i}{\alpha_i x_i + \beta_i}$, et que les coefficients α_i, β_i ne seront pas complètement déterminés par les conditions posées. Le plus simple sera de les préciser par la condition

$$(13) \qquad \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1}} = \frac{dx_2}{\sqrt{R_2}} = \ldots.$$

15. Cela fait, on obtient aisément ce théorème : *En partant de l'intégrale*

$$J = \int \frac{x + A}{\sqrt{R}}\,dx, \qquad R = x^4 + l x^3 + m x^2 + n x,$$

on forme la série

$$J_1, J_2, \ldots, J_{s+1}, \ldots, J_{\sigma-1}, J_\sigma, \ldots,$$

$$J_i = \int \frac{x_i + A_i}{\sqrt{R_i}}\,dx_i, \qquad R_i = x_i^4 + l_i x_i^3 + m_i x_i^2 + n_i x_i;$$

les termes de la série, les variables $x_1, x_2, \ldots$, *les coefficients de* $R_1, R_2, \ldots$, *les constantes* $A_1, A_2, \ldots$, *sont liés par les*

équations

$$(14)\qquad 2J_i = \log \frac{x_i^2 + \frac{l_i}{2}x_i + \sqrt{R_i}}{x_i^2 + \frac{l_i}{2}x_i - \sqrt{R_i}} + J_{i+1},$$

$$(15)\qquad x_{i+1} = \frac{(8n_i + l_i^3 - 4l_i m_i)x_i}{(2l_i^2 - 8m_i)x_i - 8n_i},$$

$$l_{i+1} = -l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i},$$

$$m_{i+1} = -2m_i + \frac{3}{4}l_i^2, \qquad n_{i+1} = -n_i + \frac{1}{2}l_i m_i - \frac{1}{8}l_i^3,$$

$$(16)\qquad A_{i+1} = 2A_i - \frac{l_i}{2}.$$

Pour que l'intégrale J *s'exprime sous forme finie, il faut et il suffit que, pour un certain entier* σ, *on ait, soit*

$$l_{\sigma-1}^3 - 4l_{\sigma-1}m_{\sigma-1} + 8n_{\sigma-1} = 0,$$

soit

$$l_\sigma = l_{s+1}, \qquad m_\sigma = m_{s+1}, \qquad n_\sigma = n_{s+1}.$$

Ces conditions remplies, la valeur de l'intégrale se détermine à l'aide de $\sigma + 1$ équations dont les σ premières s'obtiendront en faisant dans (14) $i = 0, 1, 2, \ldots, \sigma - 1$; la $(\sigma+1)^{\text{ième}}$ équation sera $J_\sigma = 0$, pour le premier cas, et $J_\sigma = J_{s+1}$, pour le second cas. On peut trouver A à l'aide de $\sigma + 1$ équations dont les σ premières s'obtiendront en faisant dans (16) $i = 0, 1, \ldots, \sigma - 1$; la $(\sigma+1)^{\text{ième}}$ équation sera $A_\sigma = 0$, pour le premier cas, et $A_\sigma = A_{s+1}$, pour le second cas.

16. On remarquera encore que les radicaux $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, ... sont liés par les équations (13). En ayant égard à ces équations, on trouvera, à l'aide de la formule (15), l'expression suivante des racines des polynômes

$$R_i = x_i^4 + l_i x_i^3 + m_i x_i^2 + n_i x_i = x_i(x_i - g_i)(x_i - g'_i)(x - g''_i):$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} g_{i+1} &= \frac{(8n_i + l_i^3 - 4l_i m_i)g_i}{(2l_i^2 - 8m_i)g_i - 8n_i},\\ g'_{i+1} &= \frac{(8n_i + l_i^3 - 4l_i m_i)g'_i}{(2l_i^2 - 8m_i)g'_i - 8n_i},\\ g''_{i+1} &= \frac{(8n_i + l_i^3 - 4l_i m_i)g''_i}{(2l_i^2 - 8m_i)g''_i - 8n_i};\end{aligned}\right.$$

on trouvera ensuite

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} g_{i+1} &= \frac{(g_i+g'_i-g''_i)(g_i+g''_i-g'_i)}{2(g'_i+g''_i-g_i)},\\ g'_{i+1} &= \frac{(g_i+g'_i-g''_i)(g'_i+g''_i-g_i)}{2(g_i+g''_i-g'_i)},\\ g''_{i+1} &= \frac{(g'_i+g''_i-g_i)(g_i+g''_i-g'_i)}{2(g_i+g'_i-g''_i)}. \end{aligned}\right.$$

17. Voici une dernière remarque relative à la méthode du n° 15 : on sera dans le premier cas du théorème ou dans le second cas, suivant que la plus petite valeur de λ, satisfaisant à l'équation (8), sera 2^σ ou $2^s m$ (m est impair et > 1).

18. *Chapitre IV.* — Dans les Chapitres II et III on a exposé des méthodes pour la détermination de l'intégrale (7), si elle se réduit à une fonction finie ; de là on conclut des conditions, nécessaires et suffisantes, pour que cette réduction soit possible. Mais la forme de ces conditions ne permet pas de regarder la question du n° 1 relative à l'intégrale (7) comme entièrement résolue ; ces conditions exigent encore certains compléments. C'est le Chapitre V qui sera consacré au complément à la condition, résultant de la méthode du Chapitre III, pour le cas où les coefficients de R sont des nombres réels quelconques. On y donne encore le complément à la condition, résultant de la méthode du Chapitre II, en se bornant toutefois aux cas les plus simples de R.

Dans le présent Chapitre on s'occupe de deux transformations, qu'on appliquera à l'intégrale (7) avant de procéder suivant les méthodes connues. Ces transformations sont dues à M. Tchebycheff.

19. La première transformation a pour but de remplacer dans l'intégrale (7) le polynôme $R = x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p$ par $R_1 = x_1^4 + l_1 x_1^3 + m_1 x_1^2 + n_1 x_1$, de sorte que l_1, m_1, n_1 s'expriment rationnellement en l, m, n, p.

Si R a une racine qui s'exprime rationnellement en l, m, n, p, et seulement dans ce cas, la transformation demandée peut être effectuée en introduisant une variable x_1 liée à x par une équation du premier degré par rapport à x et x_1. Si R n'a pas de pareille racine, on cherche s'il n'est pas possible d'effectuer notre trans-

formation à l'aide de la variable x_1 liée à x par une équation du second degré en x et x_1 :

$$(ax^2+2bx+c)x_1^2+2(a'x^2+2b'x+c')x_1+(a''x^2+2b''x+c'')=0.$$

En posant

$$\rho=(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c''),$$
$$\rho_1=(bx_1^2+2b'x_1+b'')^2-(ax_1^2+2a'x_1+a'')(cx_1^2+2c'x_1+c''),$$

on a

$$\int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{\rho}}\,dx=\int\frac{dx_1}{ax_1^2+2a'x_1+a''}+\int\left(-\frac{bx_1^2+2b'x_1+b''}{ax_1^2+2a'x_1+a''}+\mathrm{A}\right)\frac{dx_1}{\sqrt{\rho_1}}.$$

Pour que ρ coïncide avec R, que ρ_1 soit de la forme R_1, et que la troisième intégrale fournisse l'intégrale de forme (7), les neuf coefficients de la substitution doivent satisfaire à sept certaines équations qui conduisent à prendre $a=0$, $b=\pm 1$; le plus simple ensuite sera de prendre $a''=0$; alors on a $b''=0$, et, pour tous les autres coefficients de la substitution, ainsi que pour les coefficients de $\rho_1=\mathrm{R}_1$, on trouvera des valeurs s'exprimant rationnellement en l, m, n, p.

La substitution ne peut être appliquée si l'on a $8n+l^3-4lm=0$; mais alors l'intégrale s'exprime par la formule (8) en prenant $\lambda=2$.

20. La seconde transformation a pour but de remplacer l'intégrale (7), dans le cas où les coefficients de $\mathrm{R}=x^4+lx^3+mx^2+nx$ sont des nombres algébriques réels, par une autre de même forme; si cette nouvelle intégrale s'exprime par la formule (8), la plus petite valeur de λ sera impaire; les racines du nouveau polynôme sous le signe de radical seront exprimées rationnellement en l, m, n.

21. Supposons que R satisfasse à la condition du n° 9. Nous allons d'abord indiquer une substitution qui permet de remplacer R par un polynôme R_1, de même forme, dont les racines s'expriment rationnellement par les nombres p, r, s, $\sqrt{s(s-pr+p^2)}$, en sorte que, dans le cas supposé, ces racines s'expriment ration-

nellement par l, m, n. Voici cette substitution :

$$x_1 = \frac{(p-r)^2(x^2+px)}{(r-p)x+s};$$

elle donne

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{R}}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{x_1+\sqrt{x_1[x_1+(p-r)^2]}}{x_1-\sqrt{x_1[x_1+(p-r)^2]}} + \frac{1}{2}\int\frac{x_1+A_1}{\sqrt{R_1}}\,dx_1.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que dans l'intégrale

$$\int \frac{x_1+A_1}{\sqrt{R_1}}\,dx_1$$

les racines du polynôme $\frac{R_1}{x_1}$ sont non seulement réelles, mais aussi de même signe (si cela n'avait pas lieu, on changerait R_1, par la substitution $x_1 = \alpha + x'$, en un polynôme qui posséderait la propriété énoncée).

Remarque. — A l'aide des substitutions de ce numéro, le polynôme $R = x^4 + lx^3 + mx^2 + nx$, l, m, n étant des nombres réels quelconques, peut être remplacé dans l'intégrale (7) par R', tel que toutes les racines de $\frac{R'}{x'}$ soient réelles et de même signe.

22. Supposons que le polynôme

$$R_1 = x_1(x_1 - g_1)(x_1 - g'_1)(x_1 - g''_1),$$

où g_1, g'_1, g''_1 sont rangés par ordre de valeur absolue croissante, satisfasse aussi à la condition du n° 9. En appliquant alors plusieurs fois la substitution du second degré indiquée dans le n° 21, on réduira successivement R_1 à

$$R_i = x_i(x_i - g_i)(x_i - g'_i)(x_i - g''_i), \qquad (i = 2, 3, \ldots),$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
g_{i+1} &= -(g_i + g'_i - g''_i)^2,\\
g'_{i+1} &= -\left[\sqrt{(g''_i - g_i)(g''_i - g'_i)} - \sqrt{g_i g'_i}\right]^2,\\
g''_{i+1} &= -\left[\sqrt{(g''_i - g_i)(g''_i - g'_i)} + \sqrt{g_i g'_i}\right]^2,\\
&0 > g_{i+1} > g'_{i+1} > g''_{i+1}.
\end{aligned}$$

On continuera la réduction jusqu'à ce qu'on parvienne à une

intégrale $\int \frac{x_\nu + A_\nu}{\sqrt{R_\nu}}\,dx_\nu$, présentant l'un de ces deux cas :

1° Ou bien $g_\nu + g'_\nu - g''_\nu$ est nul ; alors on ne peut pas continuer la réduction, mais dans ce cas l'intégrale dernière s'exprime par la formule (8), pour $\lambda = 2$;

2° Ou bien $\sqrt{g_\nu g'_\nu (g''_\nu - g_\nu)(g''_\nu - g'_\nu)}$ ne s'exprime pas rationnellement par les coefficients de R ; alors l'intégrale dernière présentera la transformation cherchée.

Si le premier cas n'a pas lieu, on se trouvera nécessairement dans le second. Pour s'en convaincre, on examine les nombres positifs

$$k_i = \sqrt{\frac{g_i(g''_i - g'_i)}{g'_i(g''_i - g_i)}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

on voit d'abord qu'on a $k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1 + k_i}$, et l'on démontre ensuite, suivant Zolotareff, qu'un certain k_ν ne s'exprimera pas rationnellement par les coefficients de R.

Remarque. — Soient $\int \frac{x_i + A_i}{\sqrt{R_i}}\,dx_i$, $\int \frac{x_{i+1} + A_{i+1}}{\sqrt{R_{i+1}}}\,dx_{i+1}$ les intégrales considérées dans ce numéro ; si la première intégrale s'exprime par la formule (8) et si le plus petit nombre λ_i est pair, le plus petit nombre λ_{i+1} correspondant à la seconde intégrale sera égal à $\frac{\lambda_i}{2}$.

23. *Chapitre V.* — Ce Chapitre est consacré principalement au complément de la condition contenue dans le théorème du n° 15. On distingue deux cas, suivant que les coefficients du polynôme $R = x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p$ sont des nombres réels algébriques ou transcendants.

Premier cas. — On suppose qu'on a effectué, s'il était nécessaire, les transformations du Chapitre IV. On a donc

$$R = x^4 + lx^3 + mx^2 + nx,$$

l, m, n étant des nombres entiers algébriques, et la condition du n° 15 s'énonce (*voir* n° 17) ainsi : pour que l'intégrale (7) soit

exprimable sous forme finie, il faut et il suffit qu'on ait pour un certain entier σ, $l_\sigma = l_1$, $m_\sigma = m_1$, $n_\sigma = n_1$.

Cela posé, on démontre ce théorème : *Si l'intégrale* J *s'exprime sous forme finie, les nombres de tous les systèmes l_i, m_i, n_i seront des entiers algébriques.* Ceci donne le moyen de reconnaître, dans beaucoup de cas, l'impossibilité de l'intégrale sous forme finie.

24. C'est M. Tchebycheff qui a énoncé ce théorème, dans le cas des coefficients l, m, n rationnels, et qui en a déduit, dans ce cas, le complément suffisant à la condition du n° 23.

On voit d'abord, à l'aide des formules (17), qu'on a

$$m_i^2 - 3\,l_i n_i = m^2 - 3\,ln,$$
$$n_i^2(4\,l_i^3 n_i - l_i^2 m_i^2 - 18\,l_i m_i n_i + 4\,m_i^3 + 27\,n_i^2)$$
$$= n^2(4\,l^3 n - l^2 m^2 - 18\,lmn + 4\,m^3 + 27\,n^2);$$

en vertu de ces équations, le théorème cité donne le complément suivant. Les coefficients l, m, n étant des nombres entiers rationnels, en calculant les systèmes l_i, m_i, n_i, on parviendra toujours, après un nombre fini d'opérations, à un système l_σ, m_σ, n_σ qui présentera l'un des deux cas : 1° les nombres du système sont respectivement égaux à ceux du système l_1, m_1, n_1; 2° les nombres du système ne sont pas entiers. On sait que, dans le premier cas, l'intégrale s'exprime sous forme finie; dans le deuxième cas, elle n'est pas possible en termes finis.

25. Revenons au cas général. Aux suppositions faites au commencement du n° 23 on ajoute celle-ci : les racines g, g', g'' du polynôme $R = x(x-g)(x-g')(x-g'')$ sont réelles, de même signe, et rangées par ordre de valeur absolue croissante (*voir* n° 21, *Rem.*).

Soient

$$\alpha = \frac{g'}{g}, \qquad \beta = \frac{g''}{g}, \qquad \alpha_i = \frac{g'_i}{g_i}, \qquad \beta_i = \frac{g''_i}{g_i},$$

g_i, g'_i, g''_i étant calculés d'après les formules (18); posons

$$\alpha = \frac{f}{a}, \qquad \beta = \frac{f}{b}, \qquad \alpha_i = \frac{f_i}{a_i}, \qquad \beta_i = \frac{f_i}{b_i},$$

où a, b, f sont des nombres entiers algébriques; a_i, b_i, f_i sont

des entiers calculés d'après les formules

$$a_{i+1} = (a_i b_i + a_i f_i - b_i f_i)^2,$$
$$b_{i+1} = (a_i b_i + b_i f_i - a_i f_i)^2,$$
$$f_{i+1} = (a_i f_i + b_i f_i - a_i b_i)^2.$$

Nous regarderons ces nombres comme des nombres algébriques dépendant d'une racine de l'équation irréductible, à coefficients entiers rationnels,

$$(19) \qquad v^n + A_1 v^{n-1} + A_2 v^{n-2} + \ldots = 0.$$

Cela posé, on démontre le théorème de Zolotareff qui fournit le complément suffisant à la condition du n° 23. En calculant les systèmes a_i, b_i, f_i, on parvient toujours, après un nombre fini d'opérations, à un système a_σ, b_σ, f_σ qui présentera l'un des deux cas : 1° les nombres du système donnent α_σ, β_σ respectivement égaux à α_1, β_1; 2° un des nombres du système contient des facteurs premiers qui ne divisent pas à la fois deux des nombres $2a$, $2b$, $2f$. Dans le premier cas, on aura $l_\sigma = l_1$, $m_\sigma = m_1$, $n_\sigma = n_1$, et l'intégrale s'exprime sous forme finie; dans le second cas, l'intégrale est impossible sous forme finie.

26. *Remarque.* — Pour reconnaître le second cas du complément, il n'est pas nécessaire de recourir à la décomposition des nombres algébriques en facteurs premiers, car on a la proposition suivante : Soient N, M deux nombres entiers dépendant d'une racine de l'équation (19) et ν l'exposant le plus haut qu'on trouve en décomposant la norme du nombre N en facteurs premiers rationnels; pour que tous les facteurs premiers de N soient contenus dans M, il faut et il suffit que le nombre algébrique $\frac{M^\nu}{N}$ soit entier.

27. *Second cas.* — On suppose $R = x(x-g)(x-g')(x-g'')$, g, g', g'' étant réels, de même signe, et rangés par ordre de valeur absolue croissante (*voir* n° 21, *Rem.*).

Posons $k^2 = \frac{g''}{g'}\,\frac{g'-g}{g''-g}$, $b = \frac{g''-g}{g''}$. Pour que l'intégrale soit possible sous forme finie, les nombres k^2, b doivent être liés par une équation algébrique. Soit M le degré de l'équation irréduc-

tible $b^M + A_1 b^{M-1} + \ldots = 0$, où les A_i sont des nombres composés rationnellement avec k^2.

Cela étant, on a le complément suivant à la condition du n° 15 : Si l'intégrale s'exprime sous forme finie, le nombre σ ne surpasse pas M. Ce complément appartient à Zolotareff.

28. *Remarque.* — En supposant les coefficients de R imaginaires, on peut démontrer les propositions analogues à celles qui font l'objet du Chapitre présent. Ces propositions donnent, pour des cas assez étendus, les compléments suffisants à la condition du n° 15.

HEINRICHS (E.). — UEBER DEN BUNDEL DERJENIGEN KUBISCHEN RAUMCURVEN, WELCHE EIN GEGEBENES TETRAEDER IN DERSELBEN ART ZUM GEMEINSAMEN SCHMIEGUNGSTETRAEDER HABEN. Inaugural-Dissertation; 48 p. in-8°. Wermelskirchen, 1887.

M. R. Sturm, dans un intéressant Mémoire inséré dans le XXVI[e] Volume des *Mathematische Annalen* (¹) avait considéré la figure formée par le système de cubiques gauches passant par les sommets A, C d'un tétraèdre ABCD, admettant en ces points les arêtes opposées AB, CD comme tangentes et les plans BCD, ABD comme plans d'osculation. L'objet principal de M. R. Sturm était d'étudier les collinéations et les corrélations par lesquelles une cubique gauche se reproduit elle-même. L'un de ses disciples, M. Ernst Heinrichs, vient de faire, de l'étude de cette figure, le sujet de sa dissertation inaugurale. Une courbe de ce système est déterminée d'une façon univoque, soit par un point, soit par un plan osculateur, et, si l'on se donne, par exemple, un point, on peut construire géométriquement la tangente et le plan osculateur à la courbe qui passe par le point. Les tangentes aux diverses courbes du système forment un complexe tétraédral. A chaque droite de ce complexe correspondent un point, le point de contact, et un

(¹) *Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren.*

plan, le plan d'osculation; l'étude de cette correspondance fournit plusieurs propositions intéressantes, ainsi que celle du *Nullsystem* d'ordre supérieur déterminé par la correspondance entre chaque point de l'espace et le plan osculateur à la cubique du système qui passe par ce point. Enfin, après s'être occupé de la surface décrite par une cubique du système, quand le point par où elle doit passer se déplace sur une droite, l'auteur termine son travail en donnant quelques propriétés du système de trois points suivant lesquels un plan est rencontré par une cubique du système.

J. T.

TH. D'OPPOLZER. — TRAITÉ DE LA DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES ET DES PLANÈTES. Édition française, publiée d'après la deuxième édition allemande par *E. Pasquier*, professeur d'Astronomie à l'Université de Louvain, Premier volume. Paris, Gauthier-Villars, 1886, XXVI-491 pages in-4° et CCIX pages de Tables.

Voici, d'après la Préface du traducteur, en quoi la traduction française diffère de l'édition allemande : 1° pour la mesure du temps et pour celle des longitudes, le traducteur a admis le temps civil et l'heure universelle, conformément aux décisions du Congrès de Washington, mais en indiquant, dans une Note, les moyens de traduire les données dans l'ancien système; 2° le présent Volume forme un tout complet; il n'y a pas de renvois au tome II, le traducteur ayant emprunté à celui-ci les Tables VId et XIV et la manière de former une position normale; 3° à la suite d'une revision minutieuse, faite par M. von Oppolzer, Schram et Pasquier, le texte et les Tables ont subi diverses corrections et additions. Les Tables corrigées sont Xd. col. B_{II} et X_k; comme correction du texte, il faut signaler les nouveaux critériums relatifs au signe de l'angle $\mathfrak{S}$, qui intervient dans la détermination des orbites paraboliques; parmi les additions, on remarquera l'article x du Chapitre V de la première Partie et l'exemple de la comète Cruls de 1882, relatif aux solutions multiples.

La traduction a été faite avec la collaboration de MM. von Oppolzer, R. Schram et C. Dusausoy.

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$;

PAR UN ANONYME.

Soit

$$f(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du = \int_0^1 x e^{-x^2v^2}\,dv.$$

On a

$$f'(x) = e^{-x^2},$$

$$2f'(x)f(x) = \int_0^1 2x e^{-x^2(1+v^2)}\,dv$$

d'où

$$f^2(x) = C - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+v^2)}}{1+v^2}\,dv.$$

$f(x)$ s'annulant avec x, on trouve $C = \frac{\pi}{4}$ et, par suite,

$$f^2(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+v^2)}}{1+v^2}\,dv.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre est inférieure à

$$e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}.$$

Donc on peut écrire

$$f^2(x) = \frac{\pi}{4}(1 - \Theta e^{-xx}), \qquad 0 < \Theta < 1$$

et, supposant $x > 0$,

$$f(x) = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\sqrt{1 - \Theta e^{-xx}}.$$

On déduit de là

$$\lim f(x)_{x=+\infty} = \int_0^\infty e^{-u^2}\,du = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GROSS (W.). — UEBER DIE COMBINANTEN BINÄRER FORMENSYSTEME WELCHE EBENEN RATIONALEN CURVEN ZUGEORDNET SIND. Inaugural-Dissertation, 51 p. in-8°. Stuttgart, 1887.

Les *combinants* associés à une courbe rationnelle plane, déterminée par les équations

$$x_i = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1}\lambda_1 + \ldots + a_{in}\lambda_1^n, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

sont des fonctions des coefficients a_{ij}, des variables *binaires* λ, λ_1, ou de plusieurs séries de telles variables, des variables *ternaires* x_1, x_2, x_3, ou de plusieurs séries de telles variables, qui, lorsqu'on soumet les variables binaires à une même transformation linéaire, et les variables ternaires x_1, x_2, x_3, ..., ainsi que les coefficients a_{1j}, a_{2j}, a_{nj} ($j = 1, 2, \ldots, n$), à une même transformation linéaire, se reproduisent à un facteur près, qui ne dépend que des coefficients des deux substitutions. L'intérêt géométrique de ces fonctions est bien évident.

La dissertation inaugurale de M. Gross, qui leur est consacrée, comprend trois Chapitres dont le premier se rapporte aux courbes rationnelles générales.

L'auteur nous prévient que les généralités par lesquelles il débute sont empruntées en partie aux Leçons de M. Brill pendant le semestre d'hiver 1885-1886. Il établit d'abord un théorème dû à M. Gordan, et relatif au cas où le combinant ne contient pas de variables ternaires : tous les combinants de cette nature sont des covariants de la forme

$$G = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_1(\mu) & f_1(\nu) \\ f_2(\lambda) & f_2(\mu) & f_2(\nu) \\ f_3(\lambda) & f_3(\mu) & f_3(\nu) \end{vmatrix},$$

où f_1, f_2, f_3 sont les trois polynômes auxquels les coordonnées d'un point de la courbe doivent être proportionnelles et où λ, μ, ν désignent trois séries de variables. La forme G peut être ainsi regardée comme une fonction génératrice de ces combinants. On trouve aussi, par un procédé analogue, des fonctions génératrices dans le cas général. L'auteur montre ensuite comment on peut

remplacer ces fonctions génératrices par des combinants élémentaires, dont les autres combinants sont des invariants ou covariants binaires simultanés. Diverses méthodes permettent d'obtenir ces combinants élémentaires.

Dans le second Chapitre M. Gross applique cette théorie aux courbes rationnelles du troisième ordre, en interprétant géométriquement tous les résultats qui, pour la plupart, se rapportent d'ailleurs à des propriétés connues.

Quand on passe aux courbes du quatrième ordre, dont il est question dans le dernier Chapitre, on rencontre des difficultés assez considérables pour l'interprétation géométrique des invariants et covariants obtenus par les procédés de l'Algèbre. Les combinants élémentaires, toutefois, s'interprètent sans peine. On parvient, en outre, à quelques résultats intéressants, parmi lesquels l'auteur signale le suivant : il existe un faisceau de coniques qui touchent la conique des points d'inflexion, la conique des huit points de contact des quatre tangentes doubles, et la conique tangente aux six coniques d'inflexion. J. T.

AHRENDT (A.). — UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE PARALLELFLÄCHEN DER FLÄCHEN ZWEITEN GRADES. Inaugural-Dissertation. In-8°, 75 p. Rostock, 1888.

Divers auteurs se sont occupés des courbes parallèles aux coniques et des surfaces parallèles aux quadriques. M. Asmus Ahrendt, dans l'exposé historique qui forme le début de sa dissertation inaugurale signale les recherches de Cauchy (1), Catalan (2), Salmon (3), Cayley (4), Fiedler (5), Roberts (6), Craig (7), Neumann (8), Schulze (9).

(1) *Comptes rendus*, t. XIII.
(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III.
(3) *Treatise on the higher plane curves, Treatise on conic sections.*
(4) *Annali di Matematica*, t. III. *Quarterly Journal*, t. XI.
(5) *Grunert's Archiv*, t. XXXIX.
(6) *Quarterly Journal*, t. XII. *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. IV.
(7) *Crelle*, 93 et 94.
(8) *Untersuchungen über die Parallelfläche des Ellipsoïds.* Halle, 1878.
(9) *Ueber die Parallelfläche des elliptischen Paraboloïds.* Halle, 1886.

L'auteur expose les résultats essentiels dus à ses devanciers et y ajoute l'étude des lignes de courbure et la recherche des droites situées sur les surfaces considérées; enfin l'étude des singularités est faite d'une façon nouvelle.

La première Partie est relative aux lignes de courbure, et en particulier à leurs éléments numériques (ordre, classe, rang, etc.). L'auteur étudie successivement le cas d'une quadrique à centre unique et celui d'un paraboloïde.

La seconde Partie est consacrée à la recherche des droites situées sur la surface parallèle si la quadrique est à centre : il y a seize droites à distance finie, qui correspondent aux huit génératrices de la quadrique qui passent par ses ombilics; les droites avaient déjà été signalées par Roberts comme lignes doubles de la surface.

Enfin, dans la troisième Partie, M. Ahrendt s'occupe des lignes doubles. Si la surface est parallèle à une quadrique à centre, on trouve en dehors des seize droites trois coniques dans les plans principaux, et les intersections du plan de l'infini par la quadrique et par une sphère. J. T.

P. MANSION. — Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig, Teubner, 1886; xxiv-66 in-8°.

Pour les pages 1-49, cet Opuscule n'est qu'une *Titelausgabe;* mais l'introduction (p. iiv-xxiv) et l'appendice (p. 50-56) sont nouveaux. L'introduction offre au commencement une exposition très élémentaire des propriétés fondamentales des déterminants à deux ou trois lignes. L'appendice contient : 1° la discussion, dans les cas d'exception, des équations linéaires; 2° la démonstration de la propriété fondamentale des déterminants nuls; 3° un exposé rigoureux de la méthode dialytique d'élimination. Même la proposition fondamentale directe de cette méthode est établie sans recourir au théorème : Toute équation algébrique a une racine.

E. CATALAN. — MÉLANGES MATHÉMATIQUES. Mémoires de la Société royale de Liège, (2), XII et XIII; 1885-1886 (¹).

Dans ces deux Volumes très intéressants, l'Auteur a réuni d'innombrables Notes publiées par lui de 1838 à 1886, dans divers Recueils mathématiques de France, de Belgique et d'Italie, plus un certain nombre d'articles inédits. Celles qui ont été imprimées à partir de 1868 ont été signalées dans le *Bulletin* de Darboux et dans le *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik* au fur et à mesure de leur publication; la plupart des autres sont indiquées à leur place logique, dans le *Discours sur les travaux mathématiques de M. Eugène-Charles Catalan*, par M. P. Mansion, publié en tête du Volume I.

Ces deux Volumes contiennent, entre autres choses, en Arithmétique supérieure, plusieurs Notes sur la partition des nombres, plusieurs aussi sur les nombres de Bernoulli, d'innombrables recherches sur les séries et des intégrales définies particulières, beaucoup de théorèmes généraux ou spéciaux sur la théorie des surfaces (surfaces développables, élassoïdes, surfaces orthogonales, coordonnées curvilignes).

Il y en a aussi un certain nombre plus élémentaires, sur l'Algèbre, la Géométrie, la Géométrie analytique plane, la Trigonométrie sphérique; quelques-unes ont rapport au Calcul des probabilités. Mais il est impossible de classer, en peu de lignes, sous des titres précis, les 215 Notes, grandes ou petites, que l'Auteur a réunies en 800 pages écrites avec la clarté et la concision qui caractérisent tous ses Ouvrages.

(¹) Un troisième Volume a paru en 1888. Nous en rendrons compte ultérieurement.

MÉLANGES.

SUR LES EXPRESSIONS DES ANGLES D'EULER, DE LEURS FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET DES NEUF COEFFICIENTS D'UNE SUBSTITUTION ORTHOGONALE AU MOYEN DES FONCTIONS THÊTA D'UN SEUL ARGUMENT;

Par M. Ferdinand CASPARY.

Les neuf coefficients d'une substitution orthogonale ont été exprimés pour la première fois par *Euler* à l'aide des fonctions trigonométriques.

Ces fonctions, les angles qui y entrent, ainsi que les coefficients d'une substitution orthogonale peuvent être représentés, d'une manière extrêmement simple, par les fonctions thêta d'un seul argument.

Dans le Mémoire présent, je me propose d'établir ces expressions générales et d'en déduire les formules particulières qui fournissent la résolution de quelques problèmes de rotation. On verra que *les unes et les autres ne sont que des identités, légèrement transformées.*

Quant aux résultats de mes recherches, j'en ai déjà communiqué quelques-uns dans deux Notes, insérées aux *Comptes rendus* (¹).

Les expressions générales que je vais établir se déduisent, sans exception, au moyen d'un simple système de quatre équations qui représentent les transformations du second degré, relatives aux fonctions thêta d'un seul argument. Pour ne supposer rien, dans ce Mémoire, de la théorie de ces transcendantes, je démontrerai, d'une façon tout à fait élémentaire, même ces quatre équations bien connues.

1. *Formules préliminaires.* — Soient $\alpha_{k\lambda} (k, \lambda = 1, 2)$ quatre quantités quelconques. En désignant par $a_{mn} (m, n = 1, 2, 3)$ les neuf coefficients d'une substitution orthogonale, liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + a_{m3}^2 &= 1, \\ a_{l1} a_{m1} + a_{l2} a_{m2} + a_{l3} a_{m3} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (l \gtrless m; \quad l, m = 1, 2, 3),$$

les coefficients a_{mn} peuvent être représentés *identiquement* de la

(¹) *Voir* t. CVII, p. 859, 901, 937.

manière suivante :

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21},\\
2\mathcal{A}a_{11} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2,\\
2i\mathcal{A}a_{21} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2,\\
i\mathcal{A}a_{31} &= \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22};\\[1ex]
2i\mathcal{A}a_{12} &= \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2,\\
2\mathcal{A}a_{22} &= -\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2,\\
\mathcal{A}a_{32} &= -\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22};\\[1ex]
i\mathcal{A}a_{13} &= \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22},\\
\mathcal{A}a_{23} &= -\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22},\\
\mathcal{A}a_{33} &= -\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.
\end{aligned}
\right.
$$

D'après les formules d'*Euler*, on a, d'autre part,

$$
(E_1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi,\\
a_{21} &= \cos\theta\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi,\\
a_{31} &= -\sin\theta\sin\varphi;\\[1ex]
a_{12} &= \cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi,\\
a_{22} &= \cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi,\\
a_{32} &= -\sin\theta\cos\varphi;\\[1ex]
a_{13} &= \sin\theta\sin\psi,\\
a_{23} &= \sin\theta\cos\psi,\\
a_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les expressions des coefficients a_{mn}, établies dans ces deux systèmes d'équations, on trouve immédiatement

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\cos\theta = -\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}, &&\sin\theta = \frac{2i\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}},\\
&\cos\varphi = \frac{\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}}{2i\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}}, &&\sin\varphi = \frac{\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}}{2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}},\\
&\cos\psi = -\frac{\alpha_{11}\alpha_{12}-\alpha_{21}\alpha_{22}}{2i\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}}; &&\sin\psi = -\frac{\alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}}{2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}};\\[1ex]
&\theta = \frac{1}{2i}\log\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}+2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}}{\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}-2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}},\\
&\varphi = \frac{1}{2i}\log -\frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{21}},\\
&\psi = \frac{1}{2i}\log -\frac{\alpha_{21}\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{12}}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. *Formules auxiliaires, relatives aux fonctions thêta (Transformations du second degré).* — Jacobi (¹) a défini les quatre fonctions thêta par les séries

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta(w, q) &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} q^{\mu^2} e^{2\mu w i} \\
&= 1 - 2q\cos 2w + 2q^4 \cos 4w - 2q^9 \cos 6w + \ldots, \\
\vartheta_1(w, q) &= -\sum_{\mu} i^{2\mu+1} q^{\frac{1}{4}(2\mu+1)^2} e^{(2\mu+1)wi} \\
&= 2\sqrt[4]{q}(\sin w - q^2 \sin 3w + q^6 \sin 5w - \ldots), \\
\vartheta_2(w, q) &= \sum_{\mu} q^{\frac{1}{4}(2\mu+1)^2} e^{(2\mu+1)wi} \\
&= 2\sqrt[4]{q}(\cos w + q^2 \cos 3w + q^6 \cos 5w + \ldots), \\
\vartheta_3(w, q) &= \sum_{\mu} q^{\mu^2} e^{2\mu w i} \\
&= 1 + 2q\cos 2w + 2q^4 \cos 4w + 2q^9 \cos 6w + \ldots
\end{aligned}\right.$$

$$(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty).$$

Si l'on multiplie les deux fonctions $\vartheta_3(w, q)$ et $\vartheta_3(x, q)$ dont les arguments w et x sont différents et dont les modules q sont égaux, on a

$$\vartheta_3(w, q)\,\vartheta_3(x, q) = \sum_{\mu} q^{\mu^2} e^{2\mu w i} \sum_{\nu} q^{\nu^2} e^{2\nu x i},$$

$$(\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty).$$

En posant

$$\mu + \nu = 2s, \qquad \mu - \nu = 2d,$$

cette formule devient, à cause des identités

$$\mu^2 + \nu^2 = 2(s^2 + d^2), \qquad \mu w + \nu x = s(w + x) + d(w - x),$$

la suivante :

$$\vartheta_3(w, q)\,\vartheta_3(x, q) = \sum_{s} (q^2)^{s^2} e^{2s(w+x)i} \sum_{d} (q^2)^{d^2} e^{2d(w-x)i}.$$

On voit aisément que ces sommes représentent des fonctions thêta dont les modules sont égaux à q^2 et dont les arguments sont $w + x$ et $w - x$.

(¹) *Œuvres complètes*, t. I, p. 501.

Comme la somme et la différence de deux nombres sont $\equiv 0 \bmod. 2$, les nombres $2s$ et $2d$ sont, l'un et l'autre, ou pairs ou impairs.

Par conséquent, dans le second membre de la dernière formule, les nombres $2s$ et $2d$ prendront toutes les valeurs possibles, depuis $-\infty$ à $+\infty$, et chaque valeur une seule fois, si l'on fait parcourir les nombres $2s$ et $2d$ d'abord tous les nombres pairs et ensuite tous les nombres impairs. Ainsi la dernière formule prend la forme

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_3(w, q)\mathfrak{I}_3(x, q) = \;&\mathfrak{I}_3(w+x, q^2)\mathfrak{I}_3(w-x, q^2)\\ &+\mathfrak{I}_2(w+x, q^2)\mathfrak{I}_2(w-x, q^2).\end{aligned}$$

Si l'on change w et x en $w+\frac{1}{2}\pi$ et $x+\frac{1}{2}\pi$, les fonctions

$$\mathfrak{I}_3(w, q), \qquad \mathfrak{I}_3(x, q), \qquad \mathfrak{I}_3(w+x, q^2), \qquad \mathfrak{I}_2(w+x, q^2),$$

se changent en

$$\mathfrak{I}(w, q), \qquad \mathfrak{I}(x, q), \qquad \mathfrak{I}_3(w+x, q^2), \qquad -\mathfrak{I}_2(w+x, q^2).$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(w, q)\mathfrak{I}(x, q) = &+\mathfrak{I}_3(w+x, q^2)\mathfrak{I}_3(w-x, q^2)\\ &-\mathfrak{I}_2(w+x, q^2)\mathfrak{I}_2(w-x, q^2).\end{aligned}$$

De plus, si l'on change w et x en $w+\frac{1}{2}i\log q$ et $x+\frac{1}{2}i\log q$, les fonctions

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{I}(w, q), & \mathfrak{I}_3(w+x, q^2),\\ \mathfrak{I}(x, q), & \mathfrak{I}_2(w+x, q^2)\end{array}$$

se changent en

$$\begin{array}{ll}-iq^{-\frac{1}{4}}e^{wi}\mathfrak{I}_1(w, q), & q^{-\frac{1}{2}}e^{(w+x)i}\mathfrak{I}_2(w+x, q^2),\\ -iq^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\mathfrak{I}_1(x, q), & q^{-\frac{1}{2}}e^{(w+x)i}\mathfrak{I}_3(w+x, q^2).\end{array}$$

Donc on tire de la formule précédente

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(w, q)\mathfrak{I}_1(x, q) = &+\mathfrak{I}_3(w+x, q^2)\mathfrak{I}_2(w-x, q^2)\\ &-\mathfrak{I}_2(w+x, q^2)\mathfrak{I}_3(w-x, q^2).\end{aligned}$$

Enfin, en changeant w et x en $w+\frac{1}{2}\pi$ et $x+\frac{1}{2}\pi$, les fonctions

$$\vartheta_1(w,q),\qquad \vartheta_1(x,q),\qquad \vartheta_3(w+x,q^2),\qquad \vartheta_2(w+x,q^2)$$

se changent en

$$\vartheta_2(w,q),\qquad \vartheta_2(x,q),\qquad \vartheta_3(w+x,q^2),\qquad -\vartheta_2(w+x,q^2),$$

et par conséquent on déduit de la dernière formule

$$\begin{aligned}\vartheta_2(w,q)\vartheta_2(x,q) =&+\vartheta_3(w+x,q^2)\vartheta_2(w-x,q^2)\\ &+\vartheta_2(w+x,q^2)\vartheta_3(w-x,q^2).\end{aligned}$$

En réunissant les quatre formules que je viens de démontrer, on a

$$\text{(II)}\quad\left\{\begin{aligned}\vartheta(w,q)\vartheta(x,q) =&+\vartheta_3(w+x,q^2)\vartheta_3(w-x,q^2)\\ &-\vartheta_2(w+x,q^2)\vartheta_2(w-x,q^2),\\ \vartheta_1(w,q)\vartheta_1(x,q) =&+\vartheta_3(w+x,q^2)\vartheta_2(w-x,q^2)\\ &-\vartheta_2(w+x,q^2)\vartheta_3(w-x,q^2),\\ \vartheta_2(w,q)\vartheta_2(x,q) =&+\vartheta_3(w+x,q^2)\vartheta_2(w-x,q^2)\\ &+\vartheta_2(w+x,q^2)\vartheta_3(w-x,q^2),\\ \vartheta_3(w,q)\vartheta_3(x,q) =&+\vartheta_3(w+x,q^2)\vartheta_3(w-x,q^2)\\ &+\vartheta_2(w+x,q^2)\vartheta_2(w-x,q^2).\end{aligned}\right.$$

Ces formules, bien connues sous le nom de *transformations du second degré*, sont d'une importance remarquable pour la théorie des fonctions thêta et fournissent, en particulier, tous les résultats suivants.

3. *Formules définitives à deux arguments quelconques.* — Soient A_1 et A_2 deux fonctions quelconques. Si l'on pose

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\alpha_{11}&=A_1\vartheta_3(w+x,q^2), & \alpha_{21}&=A_2\vartheta_3(w-x,q^2),\\ \alpha_{12}&=A_1\vartheta_2(w+x,q^2), & \alpha_{22}&=A_2\vartheta_2(w-x,q^2),\end{aligned}\right.$$

les formules (II) prennent la forme

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}&=A_1A_2\vartheta(w)\vartheta(x),\\ \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}&=A_1A_2\vartheta_1(w)\vartheta_1(x),\\ \alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}&=A_1A_2\vartheta_2(w)\vartheta_2(x),\\ \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}&=A_1A_2\vartheta_3(w)\vartheta_3(x).\end{aligned}\right.$$

où j'ai supprimé, dans la notation des fonctions thêta, le module q, abréviation que j'emploierai dès à présent.

On déduit des formules (II) de plus

$$(5)\quad \begin{cases} 2\alpha_{11}\alpha_{12} = A_1^2\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_2(w+x), \\ 2\alpha_{21}\alpha_{22} = A_2^2\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_2(w-x), \\ 2\alpha_{11}\alpha_{21} = A_1 A_2[\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x) + \vartheta(w)\,\vartheta(x)], \\ 2\alpha_{12}\alpha_{22} = A_1 A_2[\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x) - \vartheta(w)\,\vartheta(x)], \\ 2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}} = A_1 A_2\,\vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-x)}, \\ 2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}} = A_1 A_2\sqrt{\vartheta_3^2(w)\,\vartheta_3^2(x) - \vartheta^2(w)\,\vartheta^2(x)}. \end{cases}$$

Enfin on tire des formules (II)

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = A_1^2\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(w+x), \\ \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 = A_1^2\,\vartheta(0)\,\vartheta(w+x), \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = A_2^2\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(w-x), \\ \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2 = A_2^2\,\vartheta(0)\,\vartheta(w-x). \end{cases}$$

Par la substitution des valeurs (4) et (5) en les expressions (2), on a les formules définitives

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)}, & \sin\theta = \dfrac{i\,\vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-}}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} \\ \cos\varphi = \dfrac{\vartheta(w)\,\vartheta(x)}{i\,\vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-x)}}, & \sin\varphi = \dfrac{\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-}} \\ \cos\psi = -\dfrac{A_1^2\,\vartheta_2(w+x) - A_2^2\,\vartheta_2(w-x)}{2iA_1A_2\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-x)}}; & \sin\psi = -\dfrac{A_1^2\,\vartheta_2(w+x) + A_2^2\,\vartheta_2(w-}{2A_1A_2\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-}} \\ \theta = \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x) + \vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-x)}}{\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x) - \vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-x)}}, & \\ \varphi = \dfrac{1}{2i}\log - \dfrac{\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x) - \vartheta(w)\,\vartheta(x)}{\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x) + \vartheta(w)\,\vartheta(x)}, & \\ \psi = \dfrac{1}{2i}\log - \dfrac{A_2^2\,\vartheta_2(w-x)}{A_1^2\,\vartheta_2(w+x)}. & \end{cases}$$

Dans ces formules l'expression

$$\vartheta_2(0)\sqrt{\vartheta_2(w+x)\,\vartheta_2(w-x)}$$

peut être remplacée par l'expression équivalente

$$\sqrt{\mathfrak{I}_3^2(w)\,\mathfrak{I}_3^2(x)-\mathfrak{I}^2(w)\,\mathfrak{I}^2(x)}.$$

Si l'on substitue les valeurs (4), (5), (6) en les expressions (1), on obtient les formules suivantes, que j'ai données dans les *Comptes rendus*, t. CVII, p. 861 :

$$(\mathrm{IV})\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\,\mathfrak{I}_1(w)\,\mathfrak{I}_1(x),\\
2\mathcal{A}a_{11} &= \mathfrak{I}_3(0)[\mathrm{A}_1^2\,\mathfrak{I}_3(w+x)+\mathrm{A}_2^2\,\mathfrak{I}_3(w-x)],\\
2i\mathcal{A}a_{21} &= \mathfrak{I}_3(0)[\mathrm{A}_1^2\,\mathfrak{I}_3(w+x)-\mathrm{A}_2^2\,\mathfrak{I}_3(w-x)],\\
i\mathcal{A}a_{31} &= \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\,\mathfrak{I}_3(w)\,\mathfrak{I}_3(x);\\
2i\mathcal{A}a_{12} &= \mathfrak{I}(0)[\mathrm{A}_1^2\,\mathfrak{I}(w+x)+\mathrm{A}_2^2\,\mathfrak{I}(w-x)],\\
2\mathcal{A}a_{22} &= -\,\mathfrak{I}(0)[\mathrm{A}_1^2\,\mathfrak{I}(w+x)-\mathrm{A}_2^2\,\mathfrak{I}(w-x)],\\
\mathcal{A}a_{32} &= -\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\,\mathfrak{I}(w)\,\mathfrak{I}(x);\\
2i\mathcal{A}a_{13} &= \mathfrak{I}_2(0)[\mathrm{A}_1^2\,\mathfrak{I}_2(w+x)+\mathrm{A}_2^2\,\mathfrak{I}_2(w-x)],\\
2\mathcal{A}a_{23} &= -\,\mathfrak{I}_2(0)[\mathrm{A}_1^2\,\mathfrak{I}_2(w+x)-\mathrm{A}_2^2\,\mathfrak{I}_2(w-x)],\\
\mathcal{A}a_{33} &= -\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\,\mathfrak{I}_2(w)\,\mathfrak{I}_2(x).
\end{aligned}\right.$$

4. *Deuxième système de formules d'Euler. Leurs expressions au moyen des fonctions thêta.* — Comme les expressions (E_1) ne sont pas symétriques, *Euler* (¹) les a remplacées par un deuxième système d'expressions sur lequel Jacobi a dirigé, à plusieurs reprises (²), l'attention des géomètres.

Voici ce système :

$$(\mathrm{E}_2)\quad\left\{\begin{array}{lll}
a_{11}=\sin\psi_1\sin\theta_1, & a_{12}=\sin\psi_2\sin\theta_2, & a_{13}=\sin\psi\sin\theta,\\
a_{21}=\cos\psi_1\sin\theta_1, & a_{22}=\cos\psi_2\sin\theta_2, & a_{23}=\cos\psi\sin\theta,\\
a_{31}=\cos\theta_1; & a_{32}=\cos\theta_2; & a_{33}=\cos\theta.
\end{array}\right.$$

En comparant ces valeurs des coefficients a_{mn} avec celles du

(¹) *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. XX, p. 196.

(²) *Journal de Crelle*, t. 2, p. 188. *Œuvres complètes*, t. II, p. 458; t. III, p. 147.

système (1), on obtient

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\theta_1 = \frac{\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}}{i(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})}, && \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2+\alpha_{2}\ldots}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\\
&\cos\theta_2 = -\frac{\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}; && \sin\theta_2 = \frac{i\sqrt{(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2-\alpha\ldots}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\\
&\cos\psi_1 = \frac{\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2-\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2}{2i\sqrt{(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2)}}, && \sin\psi_1 = \frac{\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{21}^2+\alpha\ldots}{2\sqrt{(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2+\ldots}}\\
&\cos\psi_2 = -\frac{\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2-\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2}{2i\sqrt{(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2)}}; && \sin\psi_2 = -\frac{\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2+\alpha_{21}^2-\alpha\ldots}{2\sqrt{(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2-\ldots}}\\
&\theta_1 = \frac{1}{2i}\log\frac{\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}-\sqrt{(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2)}}{\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\sqrt{(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2)}},\\
&\theta_2 = \frac{1}{2i}\log\frac{\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}+\sqrt{(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2)}}{\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}-\sqrt{(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2)(\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2)}},\\
&\psi_1 = \frac{1}{2i}\log-\frac{\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2}{\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2},\\
&\psi_2 = \frac{1}{2i}\log-\frac{\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2}{\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2}.
\end{aligned}\right.$$

A l'aide des valeurs (4), (5), (6) ces formules prennent la forme :

$$(\mathrm{V})\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\theta_1 = \frac{\mathfrak{J}_3(w)\mathfrak{J}_3(x)}{i\mathfrak{J}_1(w)\mathfrak{J}_1(x)}, && \sin\theta_1 = \frac{\mathfrak{J}_3(0)\sqrt{\mathfrak{J}_3(w+x)\mathfrak{J}_3(w-\ldots}}{\mathfrak{J}_1(w)\mathfrak{J}_1(x)}\\
&\cos\theta_2 = -\frac{\mathfrak{J}(w)\mathfrak{J}(x)}{\mathfrak{J}_1(w)\mathfrak{J}_1(x)}, && \sin\theta_2 = \frac{i\mathfrak{J}(0)\sqrt{\mathfrak{J}(w+x)\mathfrak{J}(w-\ldots}}{\mathfrak{J}_1(w)\mathfrak{J}(x)}\\
&\cos\psi_1 = \frac{A_1^2\mathfrak{J}_3(w+x)-A_2^2\mathfrak{J}_3(w-x)}{2iA_1A_2\sqrt{\mathfrak{J}_3(w+x)\mathfrak{J}_3(w-x)}}, && \sin\psi_1 = \frac{A_1^2\mathfrak{J}_3(w+x)+A_2^2\mathfrak{J}_3(w-\ldots}{2A_1A_2\sqrt{\mathfrak{J}_3(w+x)\mathfrak{J}_3(w-\ldots}}\\
&\cos\psi_2 = -\frac{A_1^2\mathfrak{J}(w+x)-A_2^2\mathfrak{J}(w-x)}{2iA_1A_2\sqrt{\mathfrak{J}(w+x)\mathfrak{J}(w-x)}}; && \sin\psi_2 = -\frac{A_1^2\mathfrak{J}(w+x)+A_2^2\mathfrak{J}(w-\ldots}{2A_1A_2\sqrt{\mathfrak{J}(w+x)\mathfrak{J}(w-\ldots}}\\
&\theta_1 = \frac{1}{2i}\log\frac{\mathfrak{J}_3(w)\mathfrak{J}_3(x)-\mathfrak{J}_3(0)\sqrt{\mathfrak{J}_3(w+x)\mathfrak{J}_3(w-x)}}{\mathfrak{J}_3(w)\mathfrak{J}_3(x)+\mathfrak{J}_3(0)\sqrt{\mathfrak{J}_3(w+x)\mathfrak{J}_3(w-x)}},\\
&\theta_2 = \frac{1}{2i}\log\frac{\mathfrak{J}(w)\mathfrak{J}(x)+\mathfrak{J}(0)\sqrt{\mathfrak{J}(w+x)\mathfrak{J}(w-x)}}{\mathfrak{J}(w)\mathfrak{J}(x)-\mathfrak{J}(0)\sqrt{\mathfrak{J}(w+x)\mathfrak{J}(w-x)}},\\
&\psi_1 = \frac{1}{2i}\log-\frac{A_2^2\mathfrak{J}_3(w-x)}{A_1^2\mathfrak{J}_3(w+x)},\\
&\psi_2 = \frac{1}{2i}\log-\frac{A_2^2\mathfrak{J}(w-x)}{A_1^2\mathfrak{J}(w+x)}.
\end{aligned}\right.$$

5. *Formules définitives à quatre arguments quelconques.* — Les expressions établies dans les paragraphes précédents dépendent de *deux* arguments quelconques w et x. Afin d'en déduire les formules qui dépendent de *quatre* arguments quelconques, je remplace, dans les expressions (1), successivement les quantités $\alpha_{k\lambda}$, $\mathfrak{A} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$, a_{mn} par les quantités $\beta_{k\lambda}$, $\mathfrak{B}$, b_{mn} et $\gamma_{k\lambda}$, $\mathfrak{C}$, c_{mn}. Alors les quantités b_{mn} et c_{mn} seront elles-mêmes les coefficients de deux nouvelles substitutions orthogonales.

Si l'on établit entre les quantités $\alpha_{k\lambda}$, $\beta_{k\lambda}$, $\gamma_{k\lambda}$ les relations

$$(8) \qquad \gamma_{k\lambda} = \alpha_{k1}\beta_{\lambda 2} - \alpha_{k2}\beta_{\lambda 1}, \qquad (k, \lambda = 1, 2),$$

on a d'abord

$$(9) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

et de plus on trouve immédiatement que les coefficients c_{mn} sont liés avec les coefficients a_{mn} et b_{mn} par les équations identiques

$$(10) \qquad c_{mn} = a_{m1}b_{n1} + a_{m2}b_{n2} + a_{m3}b_{n3}, \qquad (m, n = 1, 2, 3).$$

Afin de transformer ces formules au moyen des fonctions thêta, je pose

$$(11) \qquad \begin{cases} \beta_{11} = B_1\mathfrak{I}_3(y+z, q^2), & \beta_{21} = B_2\mathfrak{I}_3(y-z, q^2), \\ \beta_{12} = B_1\mathfrak{I}_2(y+z, q^2), & \beta_{22} = B_2\mathfrak{I}_2(y-z, q^2), \end{cases}$$

B_1, B_2 étant deux fonctions et y, z deux arguments quelconques. Ceci établi, à cause de la deuxième formule (II), les relations (8) prennent la forme

$$(\text{VI}) \qquad \gamma_{k\lambda} = A_k B_\lambda \mathfrak{I}_1(u_k + v_\lambda)\mathfrak{I}_1(u_k - v_\lambda), \qquad (k, \lambda = 1, 2),$$

où j'ai posé

$$(\text{VII}) \qquad w + x = 2u_1, \qquad w - x = 2u_2, \qquad y + z = 2v_1, \qquad y - z = 2v_2.$$

Comme on a de plus

$$\mathfrak{A} = A_1 A_2 \mathfrak{I}_1(w)\mathfrak{I}_1(x),$$
$$\mathfrak{B} = B_1 B_2 \mathfrak{I}_1(y)\mathfrak{I}_1(z),$$

la formule (9) devient

$$(\text{VIII}) \qquad \mathfrak{C} = A_1A_2B_1B_2\mathfrak{I}_1(u_1+u_2)\mathfrak{I}_1(u_1-u_2)\mathfrak{I}_1(v_1+v_2)\mathfrak{I}_1(v_1-v_2).$$

Si l'on remplace dans les formules (1), (2), (7) les quantités $\alpha_{k\lambda}$, $\mathfrak{A}$ par les quantités $\gamma_{k\lambda}$, $\mathfrak{C}$, définies par les équations VI, VII, VIII, *les neuf coefficients d'une substitution orthogonale, les*

angles d'Euler et leurs fonctions trigonométriques sont exprimés, à l'aide de quatre arguments quelconques, uniquement par la fonction thêta impaire.

Ces expressions sont des identités absolues et, par conséquent, elles ne donnent pas des relations pour les fonctions thêta impaires qui y entrent. La seule relation qui existe découle de l'équation (9)

$$\mathfrak{S} = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21};$$

et devient, à cause des équations VI et VIII, la suivante :

$$\begin{aligned} & \vartheta_1(u_1+u_2)\,\vartheta_1(u_1-u_2)\,\vartheta_1(v_1+v_2)\,\vartheta_1(v_1-v_2) \\ = \;& \vartheta_1(u_1+v_1)\,\vartheta_1(u_1-v_1)\,\vartheta_1(u_2+v_2)\,\vartheta_1(u_2-v_2) \\ & -\vartheta_1(u_1+v_2)\,\vartheta_1(u_1-v_2)\,\vartheta_1(u_2+v_1)\,\vartheta_1(u_2-v_1). \end{aligned}$$

due à M. *Weierstrass* (¹).

Les expressions c_{mn} qui dépendent de quatre arguments quelconques u_1, u_2, v_1, v_2 représentent les neuf coefficients d'une substitution orthogonale. Cette substitution se compose de deux autres de façon que l'on ait les relations (10). Les coefficients a_{mn}, b_{mn} des substitutions orthogonales composantes sont donnés par les expressions IV, si l'on y attribue aux arguments w, x respectivement les valeurs u_1+u_2, u_1-u_2 et v_1+v_2, v_1-v_2 (²).

6. *Transformations des expressions* (1) *et* (8). — Les expressions (1) et (8) dont j'ai déduit les résultats obtenus peuvent être transformées en des formules bien connues qui appartiennent, d'un côté à la Géométrie cinématique en espace et, de l'autre côté, à la théorie des formes quadratiques.

Si l'on pose

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = \sqrt{\mathcal{A}}\,\sin\frac{1}{2}\omega\,(\cos g + i\cos h), \\ \alpha_{12} = i\sqrt{\mathcal{A}}\left(\sin\frac{1}{2}\omega\,\cos l + i\cos\frac{1}{2}\omega\right), \\ \alpha_{21} = i\sqrt{\mathcal{A}}\left(\sin\frac{1}{2}\omega\,\cos l - i\cos\frac{1}{2}\omega\right), \\ \alpha_{22} = \sqrt{\mathcal{A}}\,\sin\frac{1}{2}\omega\,(\cos g - i\cos h), \end{cases}$$

(¹) *Sitzungsberichte der Berliner Academie*; 1882, p. 505.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVII, p. 862.

où

$$\cos^2 g + \cos^2 h + \cos^2 l = 1,$$

les expressions (1) se transforment en celles que l'on doit à *Euler* (¹). En introduisant les quantités λ, μ, ν, définies par les équations

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega \cos g, \\ \mu &= \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega \cos h, \\ \nu &= \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega \cos l, \end{aligned} \right.$$

on a

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\omega = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

$$\cos^{-2} \frac{1}{2}\omega = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Par conséquent, les substitutions (12) prennent la forme (²)

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mathfrak{A}(\lambda + \mu i), \\ \alpha_{12} &= i\mathfrak{A}(\nu + i), \\ \alpha_{21} &= i\mathfrak{A}(\nu - i), \\ \alpha_{22} &= \mathfrak{A}(\lambda - \mu i), \end{aligned} \right.$$

où $\mathfrak{A} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{A}}}{\sqrt{1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}$, et, en portant ces valeurs dans les formules (1), on obtient les expressions des neuf coefficients d'une substitution orthogonale, dues à M. *Olinde Rodrigues* (³).

Si l'on exprime par des formules, analogues à (14), les quantités $\beta_{k\lambda}$; $\gamma_{k\lambda}$ $(k, \lambda = 1, 2)$ au moyen des quantités λ', μ', ν'; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, définies par des équations, analogues à (13), les expressions

$$(8)\qquad \gamma_{k\lambda} = \alpha_{k1}\beta_{\lambda 2} - \alpha_{k2}\beta_{\lambda 1}, \qquad (k, \lambda = 1, 2)$$

se transforment en les formules que M. *Rodrigues* a données (*loc. cit.*, p. 408). Les formules dues à *Euler* et à M. *Rodrigues* appartiennent à la Géométrie cinématique en espace et déterminent le mouvement d'un corps solide au moyen des quantités g, h, l et ω. Les quantités g, h, l désignent les angles que l'axe instantané

(¹) *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. XX, p. 220.

(²) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 34.

(³) *Journal de Liouville*, 1ʳᵉ série, t. V, p. 405.

forme avec trois axes rectangulaires, fixes en espace; la quantité ω désigne l'angle de rotation autour de l'axe instantané.

La distance de deux points quelconques, liés invariablement avec un corps mobile, mais *solide,* ne change pas, quelle que soit la position du corps. Par conséquent, la forme quadratique qui représente la distance se transforme, pour deux positions quelconques du corps, en elle-même. Or la forme quadratique dont il s'agit est égale à la somme de trois carrés. Pour ce cas les formules ([1]) que M. *Hermite* a établies dans son célèbre Mémoire *Sur la théorie des formes quadratiques* se transforment en celles de M. *Rodrigues.*

Si l'on veut choisir ces formules connues de M. *Rodrigues* ou de M. *Hermite* comme point de départ, on en tire, au moyen de la substitution

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\alpha_{11}+\alpha_{22}}{\alpha_{21}-\alpha_{12}}, \\[2ex] \mu = \dfrac{\alpha_{11}-\alpha_{22}}{i(\alpha_{21}-\alpha_{12})}, \\[2ex] \nu = \dfrac{\alpha_{21}+\alpha_{12}}{i(\alpha_{21}-\alpha_{12})}, \end{cases}$$

jointe à la substitution (14), les expressions (1) et (8).

Les expressions (1) ont été données, sous cette forme remarquable, par *Jacobi* ([2]). L'illustre géomètre les a trouvées, avec des valeurs particulières des quantités $\alpha_{k\lambda}$, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument. Sachant par des recherches antérieures ([3]) que ces expressions représentent *identiquement* les neuf coefficients d'une substitution orthogonale, quelles que soient les quatre quantités qui y entrent, j'ai obtenu aisément les résultats précédents.

([1]) Voir *Journal de Crelle,* t. 47, p. 315 et 320.

([2]) *Œuvres complètes,* t. II, p. 505.

([3]) Voir *Journal de M. Kronecker,* t. 94, p. 75. Dans ce Mémoire, relatif aux fonctions thêta de deux arguments, j'ai exprimé *identiquement* les seize coefficients $g_{ik}(i, k = 1, 2, 3, 4)$ d'une substitution orthogonale au moyen de deux systèmes de quatre quantités quelconques α_i, β_k. En posant, dans ces expressions générales, $\alpha_1 = \beta_1 = -1$; $\alpha_2 = \beta_2 = \nu$; $\alpha_3 = \beta_3 = \mu$; $\alpha_4 = \beta_4 = \lambda$, les six coefficients g_{m4} et $g_{4n}(m, n = 1, 2, 3)$ s'évanouissent et les neuf quotients $g_{mn} : g_{44}$ deviennent, au moyen de la substitution (15), les neuf coefficients a_{mn} qui forment les expressions (1).

7. *Formules particulières, relatives à quelques problèmes de la rotation* (¹). — Les expressions générales des angles d'*Euler*, de leurs fonctions trigonométriques et des neuf coefficients d'une substitution orthogonale que j'ai établies, sous deux formes différentes, dans les §§ 3, 4, 5 de ce Mémoire, peuvent être employées pour en déduire immédiatement les formules particulières qui fournissent la résolution de quelques problèmes de la rotation. Afin d'obtenir ces formules importantes exactement sous la forme établie par les géomètres qui les ont découvertes, j'introduis au lieu des fonctions $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ les fonctions correspondantes Θ, H, H_1, Θ_1 et je pose

$$w = -\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(ia + \mathrm{K}), \qquad x = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(u - i\mathrm{K}').$$

Alors on a

$$w + x = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(u - ia - \mathrm{K} - i\mathrm{K}'), \qquad w - x = -\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(u + ia - \mathrm{K} - i\mathrm{K}').$$

De plus, on trouve

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}\,(w) &= \Theta_1(ia), & \mathfrak{S}\,(x) &= -if(u)\,\mathrm{H}\,(u), \\ \mathfrak{S}_1(w) &= -\mathrm{H}_1(ia), & \mathfrak{S}_1(x) &= -if(u)\,\Theta\,(u), \\ \mathfrak{S}_2(w) &= -\mathrm{H}\,(ia), & \mathfrak{S}_2(x) &= f(u)\,\Theta_1(u), \\ \mathfrak{S}_3(w) &= \Theta\,(ia), & \mathfrak{S}_3(x) &= f(u)\,\mathrm{H}_1(u), \end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}\,(w \pm x) &= f(u \mp ia)\,\mathrm{H}_1(u \mp ia), \\ \mathfrak{S}_1(w \pm x) &= -f(u \mp ia)\,\Theta_1(u \mp ia), \\ \mathfrak{S}_2(w \pm x) &= \mp if(u \mp ia)\,\Theta\,(u \mp ia), \\ \mathfrak{S}_3(w \pm x) &= -if(u \mp ia)\,\mathrm{H}\,(u \mp ia). \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules la fonction $f(u)$ a la valeur

$$f(u) = e^{\pi\frac{\mathrm{K}' + 2u}{4\mathrm{K}}}$$

et, par conséquent, on a

$$f(u + ia)\,f(u - ia) = f^2(u).$$

8. *Formules de Jacobi et de M. Hermite, relatives au pro-*

(¹) On pourra consulter, à ce sujet, l'excellent Ouvrage de M. Halphen : *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. IIᵉ Partie, Chap. I III. Paris, Gauthier-Villars ; 1888.

blème de la rotation d'un corps solide, agité par aucune force accélératrice. A l'aide des formules (16) et (17) on déduit des expressions (III), (IV), (V) les formules suivantes :

$$(18)\quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{H}(ia)\Theta_1(u)}{i\,\mathrm{H}_1(ia)\Theta(u)}, \\[2ex] \cos\varphi = -\dfrac{\Theta_1(ia)\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}_1(o)\sqrt{\Theta(u-ia)\Theta(u+ia)}}, \\[2ex] \cos\psi = -\dfrac{\Omega\,\Theta(u-ia)+\Omega^{-1}\Theta(u+ia)}{2\sqrt{\Theta(u-ia)\Theta(u+ia)}}; \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{\mathrm{H}_1(o)\sqrt{\Theta(u-ia)\Theta(u+ia)}}{\mathrm{H}_1(ia)\Theta(u)}, \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{\Theta(ia)\mathrm{H}_1(u)}{\mathrm{H}_1(o)\sqrt{\Theta(u-ia)\Theta(u+ia)}}, \\[2ex] \sin\psi = \dfrac{\Omega\,\Theta(u-ia)-\Omega^{-1}\Theta(u+ia)}{2i\sqrt{\Theta(u-ia)\Theta(u+ia)}}; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \psi + \dfrac{1}{i}\log - \Omega = \dfrac{1}{2i}\log \dfrac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\psi', \\[2ex] \psi_1 + \dfrac{1}{i}\log - \Omega = \dfrac{1}{2i}\log - \dfrac{\mathrm{H}(u+ia)}{\mathrm{H}(u-ia)} = \pm\psi'_1, \\[2ex] \psi_2 + \dfrac{1}{i}\log - \Omega = \dfrac{1}{2i}\log - \dfrac{\mathrm{H}_1(u+ia)}{\mathrm{H}_1(u-ia)} = \pm\psi'_2; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{H}_1(ia)\Theta(u), \\[1ex] 2\mathrm{A}a_{11} = \Theta_1(o)[\Omega\mathrm{H}(u-ia)+\Omega^{-1}\mathrm{H}(u+ia)], \\ 2\mathrm{A}a_{12} = \Theta(o)[\Omega\mathrm{H}_1(u-ia)+\Omega^{-1}\mathrm{H}_1(u+ia)], \\ 2i\mathrm{A}a_{13} = \mathrm{H}_1(o)[\Omega\Theta(u-ia)-\Omega^{-1}\Theta(u+ia)]; \\[1ex] 2i\mathrm{A}a_{21} = \Theta_1(o)[\Omega\mathrm{H}(u-ia)-\Omega^{-1}\mathrm{H}(u+ia)], \\ 2i\mathrm{A}a_{22} = \Theta(o)[\Omega\mathrm{H}_1(u-ia)-\Omega^{-1}\mathrm{H}_1(u+ia)], \\ 2\mathrm{A}a_{23} = -\mathrm{H}_1(o)[\Omega\Theta(u-ia)+\Omega^{-1}\Theta(u+ia)]; \\[1ex] \mathrm{A}a_{31} = -\Theta(ia)\mathrm{H}_1(u), \\ \mathrm{A}a_{32} = \Theta_1(ia)\mathrm{H}(u), \\ i\mathrm{A}a_{33} = \mathrm{H}(ia)\Theta_1(u). \end{cases}$$

La quantité Ω qui entre dans ces formules est une fonction quelconque ; exprimée par les fonctions quelconques A_1, A_2, elle a la valeur

$$-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}e^{\frac{a\pi}{2\mathrm{K}}}.$$

Les formules (18), (19), (20) qui fournissent la résolution du problème de la rotation d'un corps solide, lorsqu'il n'est sollicité par aucune force accélératrice, sont dues à *Jacobi* et à M. *Hermite*. En effet, si l'on pose successivement $\Omega = -1$ et $\Omega = -e^{in'u}$, on a les formules que *Jacobi* a données dans son célèbre Mémoire : *Sur la rotation d'un corps* (*Œuvres complètes*, p. 315, 316, 329, 293 ; 311, 335, 466). En posant

$$ia = \omega, \qquad \Omega = e^{i(\lambda u + \nu)},$$

les expressions (20) deviennent celles de M. *Hermite* (¹).

β. *Formules de Jacobi, de MM. Lottner et Hess, relatives au problème de la rotation d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe.* — Soient

$$w = -\frac{\pi}{2K}(ia + ib + K), \qquad y = -\frac{\pi}{2K}(ia - ib + K),$$

$$x = \frac{\pi}{2K}(u - iK'), \qquad z = \frac{\pi}{2K}(u - iK').$$

Alors on a

$$w + x = 2u_1 = \frac{\pi}{2K}(u - ia - ib - K - iK'),$$

$$w - x = 2u_2 = -\frac{\pi}{2K}(u + ia + ib + K - iK'),$$

$$y + z = 2v_1 = \frac{\pi}{2K}(u - ia + ib - K - iK'),$$

$$y - z = 2v_2 = -\frac{\pi}{2K}(u + ia - ib + K - iK'),$$

et, par conséquent,

$$u_1 + v_1 = \frac{\pi}{2K}(u - ia - K - iK'), \qquad u_1 - v_1 = -\frac{\pi}{2K}ib,$$

$$u_1 + v_2 = -\frac{\pi}{2K}(ia + K), \qquad u_1 - v_2 = \frac{\pi}{2K}(u - ib - iK'),$$

$$u_2 + v_1 = -\frac{\pi}{2K}(ia + K), \qquad u_2 - v_1 = -\frac{\pi}{2K}(u + ib - iK'),$$

$$u_2 + v_2 = -\frac{\pi}{2K}(u + ia + K - iK'), \qquad u_2 - v_2 = -\frac{\pi}{2K}ib.$$

(¹) Voir HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 27, p. 34. Paris, Gauthier-Villars ; 1885.

A cause de ces expressions on trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1(u_1+v_1) &= -f(u-ia)\,\Theta_1(u-ia), & \mathfrak{S}_1(u_1-v_1) &= -\mathrm{H}(ib),\\
\mathfrak{S}_1(u_1+v_2) &= -\mathrm{H}_1(ia), & \mathfrak{S}_1(u_1-v_2) &= -i\,f(u-ib)\,\Theta(u-ib),\\
\mathfrak{S}_1(u_2+v_1) &= -\mathrm{H}_1(ia), & \mathfrak{S}_1(u_2-v_1) &= i\,f(u+ib)\,\Theta(u+ib),\\
\mathfrak{S}_1(u_2+v_2) &= -f(u+ia)\,\Theta_1(u+ia); & \mathfrak{S}_1(u_2-v_2) &= -\mathrm{H}(ib);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1(w) &= -\mathrm{H}_1(ia+ib),\\
\mathfrak{S}_1(x) &= -i\,f(u)\,\Theta(u),\\
\mathfrak{S}_1(y) &= -\mathrm{H}_1(ia-ib),\\
\mathfrak{S}_1(z) &= -i\,f(u)\,\Theta(u).
\end{aligned}$$

En vertu de ces formules les expressions (VI) et (VIII) prennent la forme

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 f(u-ia)\mathrm{H}\,(ib)\,\Theta_1(u-ia),\\
\gamma_{12} &= i\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 f(u-ib)\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta\,(u-ib),\\
\gamma_{21} &= -i\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 f(u+ib)\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta\,(u+ib),\\
\gamma_{22} &= \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2 f(u+ia)\mathrm{H}\,(ib)\,\Theta_1(u+ia),\\
\mathfrak{C} &= -\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 f^2(u)\mathrm{H}_1(ia+ib)\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta^2(u).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on détermine les fonctions quelconques $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{B}_2$ par les équations

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 f(u-ia) &= \rho,\\
\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 f(u-ib) &= \rho,\\
\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 f(u+ib) &= \rho,
\end{aligned}$$

ρ étant une nouvelle fonction quelconque, on trouve, en multipliant les deux dernières équations,

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 f^2(u) = \rho^2,$$

et, par conséquent, on obtient aussi, à cause de la première équation,

$$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2 f(u+ia) = \rho.$$

Donc les expressions (21) prennent la forme plus simple

$$(\mathrm{J})\qquad \left\{\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \rho\,\mathrm{H}(ib)\;\Theta_1(u-ia) = i\rho\mathrm{P},\\
\gamma_{12} &= i\rho\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta(u-ib) = i\rho\mathrm{Q}',\\
\gamma_{21} &= -i\rho\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta(u+ib) = -i\rho\mathrm{Q},\\
\gamma_{22} &= \rho\,\mathrm{H}(ib)\;\Theta_1(u+ia) = i\rho\mathrm{P}',\\
\mathfrak{C} &= -\rho^2\,\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta^2(u) = -\rho^2\Lambda.
\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans les expressions

$$(\text{IX})\quad\left\{\begin{aligned}
2\Theta c_{11} &= \gamma_{11}^2+\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2+\gamma_{22}^2,\\
2i\Theta c_{21} &= \gamma_{11}^2+\gamma_{12}^2-\gamma_{21}^2-\gamma_{22}^2,\\
i\Theta c_{31} &= \gamma_{11}\gamma_{21}+\gamma_{12}\gamma_{22};\\
2i\Theta c_{12} &= \gamma_{11}^2-\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2-\gamma_{22}^2,\\
2\Theta c_{22} &= -\gamma_{11}^2+\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2-\gamma_{22}^2,\\
\Theta c_{32} &= -\gamma_{11}\gamma_{21}+\gamma_{12}\gamma_{22};\\
i\Theta c_{13} &= \gamma_{11}\gamma_{12}+\gamma_{21}\gamma_{22},\\
\Theta c_{23} &= -\gamma_{11}\gamma_{12}+\gamma_{21}\gamma_{22},\\
\Theta c_{33} &= -\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21},
\end{aligned}\right.$$

qui proviennen des expressions (I), si l'on y remplace $\alpha_{k\lambda}$, A, a_{mn} par $\gamma_{k\lambda}$, Θ, c_{mn}, on a exactement les expressions des neuf coefficients que Jacobi [1] a données pour le problème de la rotation d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe.

De plus, on tire des équations (2) les formules

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\vartheta &= \frac{2i\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_{22}}}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}},\\
e^{2i\varphi'} &= -\frac{\gamma_{12}\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{21}},\\
e^{2i\psi'} &= -\frac{\gamma_{21}\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{12}}.
\end{aligned}\right.$$

Au moyen des valeurs (J), on en déduit

$$\sin\vartheta = -\frac{2i\,\mathrm{H}_1(ia)\,\mathrm{H}(ib)\sqrt{\Theta_1(u-ia)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u-ib)\,\Theta(u+ib)}}{\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta^2(u)},$$

$$e^{i\varphi'} = -\sqrt{\frac{\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-ib)}{\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u+ib)}},$$

$$e^{i\psi'} = -\sqrt{\frac{\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u+ib)}{\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-ib)}}.$$

Comme on a, d'après les définitions des fonctions H_1 et Θ_1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_1(ia) &= \mathrm{H}(\mathrm{K}-ia),\\
\Theta_1(u-ia) &= \Theta(u+\mathrm{K}-ia),\\
\Theta_1(u+ia) &= \Theta(u-\mathrm{K}+ia),\\
\mathrm{H}_1(ia+ib) &= \mathrm{H}(\mathrm{K}-ia-ib),\\
\mathrm{H}_1(ia-ib) &= \mathrm{H}(\mathrm{K}-ia+ib),
\end{aligned}$$

(1) *Œuvres complètes*, t. II, p. 500. Dans l'expression de (N_3) s'est glissée une petite faute de signe; on y doit lire $+Q_2Q_3$ au lieu de $-Q_2Q_3$.

les formules précédentes prennent la forme

$$\sin\mathfrak{I} = \frac{2\,\mathrm{H}(\mathrm{K}-ia)\,\mathrm{H}(ib)\sqrt{\Theta(u+\mathrm{K}-ia)\,\Theta(u-\mathrm{K}+ia)\,\Theta(u-ib)\,\Theta(u+ib)}}{i\,\mathrm{H}(\mathrm{K}-ia+ib)\,\mathrm{H}(\mathrm{K}-ia-ib)\,\Theta^2(u)},$$

$$e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{\Theta(u-\mathrm{K}-ia)\,\Theta(u-ib)}{\Theta(u+\mathrm{K}-ia)\,\Theta(u+ib)}},$$

$$e^{i\psi} = -\sqrt{\frac{\Theta(u-\mathrm{K}+ia)\,\Theta(u+ib)}{\Theta(u-\mathrm{K}-ia)\,\Theta(u-ib)}}.$$

Ce sont exactement les formules, établies par Jacobi (*loc. cit.*, p. 502 et 503).

Enfin on a, d'après les formules (10),

$$c_{mn} = a_{m1}b_{n1} + a_{m2}b_{n2} + a_{m3}b_{n3}, \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

où les coefficients a_{mn} et b_{mn} sont donnés par les expressions (20), si l'on y remplace ia successivement par $ia + ib$ et $ia - ib$.

Ces relations, établies par Jacobi au moyen d'un calcul ingénieux, mais un peu compliqué (voir *loc. cit.*, p. 505-510), fournissent le théorème célèbre, dû à l'illustre géomètre, d'après lequel le mouvement de rotation du corps pesant de révolution peut être ramené à une combinaison des mouvements de rotation de deux solides différents sur lesquels n'agit aucune force accélératrice (¹). Ce théorème est devenu le point de départ des excellentes recherches dues à M. Halphen et à M. Darboux. M. Halphen (²) a donné au théorème de Jacobi une forme nouvelle et énoncé, sans démonstration, une série de résultats importants. M. Darboux (³) les a démontrés et établi d'une manière aussi élégante que simple, les relations qui existent entre les constantes; d'ailleurs, il a déduit de ses considérations ingénieuses des théorèmes cinématiques qui sont, pour la théorie et pour les applications, du plus haut intérêt.

Dans son Mémoire important, inséré au tome 50 du *Journal de Crelle*, M. Lottner a établi les expressions des neuf coefficients

---

(¹) *Voir* aussi la Note de M. Lottner, au tome II des *Œuvres complètes de Jacobi*, p. 510.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. C, p. 1065.

(³) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. C, p. 1555; t. CI, p. 11, 115, 199. *Journal de Liouville*, 4ᵉ série, t. I, p. 403. *Voir* aussi Despeyrous Darboux, *Cours de Mécanique*, t. II, Notes XVIII et XIX.

c_{mn} sous une forme, légèrement différente de celle due à Jacobi. Pour obtenir les expressions de M. Lottner, je pose

$$ia = -ia_1 - K,$$
$$ib = -ia_2 - K;$$

par conséquent, on a

$$ia + ib = -(ia_1 + ia_2 + 2K),$$
$$ia - ib = -(ia_1 - ia_2),$$

et l'on déduit des formules (22), en employant les notations de M. Lottner,

$$(\mathrm{L})\quad \begin{cases} \gamma_{11} = -\rho H(K + ia_2)\Theta(u + ia_1) = -\rho H(K + ia_2)B', \\ \gamma_{12} = -i\rho H(ia_1)\Theta(u + ia_2 + K) = -i\rho H(ia_1)B'', \\ \gamma_{21} = i\rho H(ia_1)\Theta(u - ia_2 - K) = i\rho H(ia_1)A'', \\ \gamma_{22} = -\rho H(K + ia_2)\Theta(u - ia_1) = -\rho H(K + ia_2)A'; \\ \mathfrak{S} = -\rho^2 H(ia_1 + ia_2 + K)H(ia_1 - ia_2 - K)\Theta^2(u) = -\rho^2 D\,\Theta^2(u). \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions (IX), on obtient exactement les expressions des neuf coefficients, dues à M. Lottner. De plus on déduit des formules (2), si l'on y remplace les quantités $\alpha_{k\lambda}$ par $\gamma_{k\lambda}$, établies dans les expressions (L), les expressions suivantes

$$\cos\mathfrak{I} = \frac{H^2(ia_1)A''B'' + H^2(ia_2 + K)A'B'}{D\,\Theta^2(u)},$$

$$\cos\varphi' = -\frac{A''B' + A'B''}{2\sqrt{A'A''B'B''}},$$

$$\cos\psi' = -\frac{B'B'' + A'A''}{2\sqrt{A'A''B'B''}};$$

$$\sin\mathfrak{I} = -\frac{2iH(ia_1)H(ia_2 + K)\sqrt{A'A''B'B''}}{D\,\Theta^2(u)},$$

$$\sin\varphi' = \frac{A''B' - A'B''}{2i\sqrt{A'A''B'B''}},$$

$$\sin\psi' = \frac{B'B'' - A'A''}{2i\sqrt{A'A''B'B''}};$$

$$e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{A'B''}{A''B'}},$$

$$e^{i\psi} = \sqrt{\frac{A'A''}{B'B''}}.$$

Ce sont, pour $\sqrt{A'A''B'B''} = -\sqrt{N}$, les formules de M. Lottner (voir *loc. cit.*, p. 119, 120 et 122).

En remplaçant, dans les équations (L), les arguments u, a_1, a_2 respectivement par $u + K$, a, b et en employant la notation de M. Hess, on obtient

$$(H)\quad \begin{cases} \gamma_{11} = -\rho H_1(ib)\Theta_1(u+ia) = -\rho H_1(ib)A_1, \\ \gamma_{12} = -i\rho H(ia)\Theta(u+ib) = -i\rho H(ia)B_1, \\ \gamma_{21} = i\rho H(ia)\Theta(u-ib) = i\rho H(ia)B_2, \\ \gamma_{22} = -\rho H_1(ib)\Theta_1(u-ia) = -\rho H_1(ib)A_2, \\ \mathfrak{S} = \rho^2 H_1(ia+ib)H_1(ia-ib)\Theta_1^2(u) = \rho^2\Delta\Theta_1^2(u). \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions (IX) et dans les formules

$$(23)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{\gamma_{21}-\gamma_{12}}, \\ \mu = \dfrac{\gamma_{11}-\gamma_{22}}{i(\gamma_{21}-\gamma_{12})}, \\ \nu = \dfrac{\gamma_{21}+\gamma_{12}}{i(\gamma_{21}-\gamma_{12})}, \\ \cos\dfrac{1}{2}\omega = \dfrac{\gamma_{21}-\gamma_{12}}{2\sqrt{\mathfrak{S}}}, \end{cases}$$

déduites des équations (15) et (13), on a les formules de M. Hess [1].

Les expressions (IX), (22) et (23) mettent en évidence que les formules précédentes deviennent des identités absolues, si l'on y attribue au dénominateur $\mathfrak{S}$ sa valeur $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{22}$ au lieu de lui donner les valeurs équivalentes, établies par les équations (J), (L), (H).

On conclut de là que, *par cette simple substitution, les expressions de Jacobi, de M. Lottner et de M. Hess se transforment en des identités absolues.*

Cette remarque simplifie beaucoup la solution du problème de la rotation d'un corps pesant, suspendu par un point de son axe.

Afin d'obtenir la solution complète de ce problème, on a encore besoin des expressions des composantes de la vitesse de rotation autour des axes mobiles et fixes, dont l'étude de M. Lottner a

[1] Voir *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 568, 570.

déjà abordé à la fin de son Mémoire. Sans entrer ici dans les détails, je me borne à indiquer les formules générales et identiques dont on peut tirer ces expressions.

Soient

$$\begin{aligned} P_h &= -(c_{1k}\,dc_{1l} + c_{2k}\,dc_{2l} + c_{3k}\,dc_{3l}),\\ V_h &= c_{k1}\,dc_{l1} + c_{k2}\,dc_{l2} + c_{k3}\,dc_{l3}, \end{aligned}$$

où les indices $h, k, l = 1, 2, 3$ appartiennent à la même classe que les indices 1, 2, 3; désignons de plus par p_h, v_h et $p_h^\star$, $v_h^\star$ les quantités qui proviennent des expressions de P_h et V_h si l'on y remplace c_{mn} par a_{mn} et b_{mn}. Ceci établi, on a

$$\begin{aligned} P_h &= c_{1h} V_1 + c_{2h} V_2 + c_{3h} V_3,\\ V_h &= c_{h1} P_1 + c_{h2} P_2 + c_{h3} P_3 \end{aligned}$$

et des relations analogues pour p_h, v_h; $p_h^\star$, $v_h^\star$. Au moyen de ces relations, on tire des identités (10) les formules

$$\left.\begin{aligned} P_h &= b_{h1}\pi_1 + b_{h2}\pi_2 + b_{h3}\pi_3,\\ V_h &= a_{h1}\pi_1 + a_{h2}\pi_2 + a_{h3}\pi_3,\\ \pi_l &= p_l - p_l^\star. \end{aligned}\right\} \quad (h, l = 1, 2, 3).$$

Comme les expressions p_h, v_h; $p_h^\star$, $v_h^\star$ ainsi que les coefficients a_{mn}, b_{mn} sont connus (¹), les dernières formules donnent les valeurs de P_h et V_h et, par elles, les composantes cherchées.

γ. *Pendule conique.* — Les expressions des coefficients c_{13}, c_{23}, c_{33} méritent un intérêt particulier. Si on les forme au moyen des valeurs (21), on obtient aisément les formules de M. Dumas relatives au pendule conique.

En effet, si l'on pose

$$X = \frac{H_1^2(ia)\,H^2(ib)}{H_1(ia+ib)\,H_1(ia-ib)},$$

on tire, au moyen des valeurs (21), des expressions (IX), les for-

(¹) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVII, p. 901 et 902.

mules suivantes

$$(24)\left\{\begin{aligned} c_{13} &= \frac{\Lambda}{\mathrm{H}_1(ia)\,\mathrm{H}(ib)}\left[\prod\frac{\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u+ib)}{\Theta^2(u)} - \prod^{-1}\frac{\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-i\ldots}{\Theta^2(u)}\right.\\ c_{23} &= \frac{i\Lambda}{\mathrm{H}_1(ia)\,\mathrm{H}(ib)}\left[\prod\frac{\Theta_1(u+ia)\,\Theta(u+ib)}{\Theta^2(u)} + \prod^{-1}\frac{\Theta_1(u-ia)\,\Theta(u-i\ldots}{\Theta^2(u)}\right.\\ c_{33} &= \Lambda\left[\frac{\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)}{\mathrm{H}_1^2(ia)\,\Theta^2(u)} + \frac{\Theta(u+ib)\,\Theta(u-ib)}{\mathrm{H}^2(ib)\,\Theta^2(u)}\right]. \end{aligned}\right.$$

où

$$\prod = \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_1}e^{-\frac{\pi(a+b)}{4\mathrm{K}}}$$

désigne une fonction quelconque.

D'après la relation

$$\Theta^2(0)\,\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib) = \mathrm{H}_1^2(ia)\,\Theta^2(ib) - \Theta_1^2(ia)\,\mathrm{H}^2(ib),$$

on trouve d'abord

$$(25)\qquad \Lambda = \frac{\Theta^2(0)}{\dfrac{\Theta^2(ib)}{\mathrm{H}^2(ib)} - \dfrac{\Theta_1^2(ia)}{\mathrm{H}_1^2(ia)}} = -\frac{[\mathrm{H}'(0)]^2}{\mathrm{sn}^{-2}(\mathrm{K}+ia) - \mathrm{sn}^{-2}(ib)}.$$

Si l'on remplace de plus

$$\Theta_1(u+ia),\quad \mathrm{H}_1(ib)$$

par les valeurs équivalentes

$$\Theta(u+\mathrm{K}\pm ia),\quad \mathrm{H}(\mathrm{K}+ib),$$

et si l'on pose enfin

$$a = a_1, \qquad b = a_2,$$

$$\Pi = e^{i(\Phi u+\varphi_0)},$$

Φ, φ_0 étant des constantes, les formules (24) et (25) représentent les coordonnées de l'extrémité du pendule conique exactement sous la forme que M. Dumas a établie dans un Mémoire qui fait partie du tome 50 du *Journal de Crelle* (*voir* p. 67).

Dans l'article V de ce Mémoire, on trouve une transformation remarquable des expressions $c_{13}+ic_{23}$ et $c_{13}-ic_{23}$ dont on tire aisément pour ces quantités la forme, extrêmement élégante, que

M. Hermite a déduite de ses profondes recherches, relatives à l'équation différentielle de Lamé [1].

En terminant ce Mémoire, je remarque que les résultats obtenus peuvent être généralisés aux fonctions thêta de plusieurs arguments.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. J. TANNERY PAR M. G. TEIXEIRA.

Si $f(x, t)$ et $f'_t(x, t)$ sont des fonctions continues aux environs de t pour toutes les valeurs de x de $x = a$ jusqu'à $x = b$, et si dans le même intervalle la fonction $\varphi(x)$ est continue ou discontinue pour des valeurs de x en nombre limité, on a

$$\frac{d\int_a^b \varphi(x) f(x, t)\, dx}{dt} = \int_a^b \varphi(x) f'_t(x, t)\, dx.$$

même quand a et b sont infinis, si les intégrales

$$\int_a^b |\varphi(x)|\, dx, \quad \int_a^b \varphi(x) f'_t(x, t)\, dx$$

sont finies et déterminées aux environs de t.

Ce théorème, que je me propose de démontrer, donne le théorème qu'on trouve dans les ouvrages d'Analyse en posant

$$\varphi(x) = 1,$$

et peut être démontré d'une manière semblable.

En donnant à t un accroissement infiniment petit h, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\int_a^b \varphi(x) f(x, t)\, dx}{dt} &= \lim_{h=0} \frac{\int_a^b \varphi(x)[f(x, t+h) - f(x, t)]\, dx}{h} \\ &= \lim_{h=0} \int_a^b \varphi(x) f'_t(x, t+\theta h)\, dx.\end{aligned}$$

Mais, à cause de la continuité de $f'_t(x, t)$, on peut, quelque

(1) *Voir* HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 112.

petite que soit la constante positive α, déterminer h de telle sorte qu'on ait dans l'intervalle de $x = a$ à $x = b$

$$|f'_t(x, t + \theta h) - f'_t(x, t)| = |\varepsilon| < \alpha,$$

et, par conséquent,

$$\left|\int_a^b \varepsilon\varphi(x)\,dx\right| < \int_a^b |\varepsilon|\,|\varphi(x)|\,dx < \alpha \int_a^b |\varphi(x)|\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h=0} \int_a^b \varepsilon\varphi(x)\,dx = 0.$$

Nous avons donc

$$\frac{d\int_a^b \varphi(x) f(x, t)\,dx}{dt}$$
$$= \int_a^b \varphi(x) f'_t(x, t)\,dx + \lim_{h=0} \int_a^b \varepsilon\varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x) f'_t(x, t)\,dx.$$

On peut appliquer ce théorème à un grand nombre d'intégrales; aux intégrales, par exemple, de la forme suivante

$$\int_0^1 \frac{f(x, t)\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} f(x, t)\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} f(x, t)\,dx, \quad \ldots.$$

Porto, le 22 octobre 1888.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIE (Sophus), Professor der Geometrie an der Universität Leipzig. — Theorie der Transformationsgruppen. I. Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr Friedrich Engel bearbeitet (x u. 632 S.). Gr. in-8°.

M. Sophus Lie se propose de donner sous ce titre une exposition systématique des recherches qu'il a publiées, depuis une vingtaine d'années, sur les groupes de transformations. Le premier Volume de cet Ouvrage (le seul qui ait paru jusqu'à présent) est consacré aux propriétés générales des groupes continus et finis. Nous allons essayer de donner un aperçu des nombreuses théories qu'il renferme. Afin de mettre en évidence les quelques notions communes à la théorie des groupes de transformations et à la théorie des substitutions, et de réunir plusieurs notions qui présentent entre elles certaines analogies, nous nous permettrons de modifier en quelques points l'ordre logique suivi par l'illustre savant. Nous serions heureux si cette trop courte analyse, où nous avons dû omettre beaucoup de résultats intéressants, pouvait engager le lecteur à étudier dans l'Ouvrage lui-même les théories si originales et si fécondes en applications que la Science doit au grand géomètre norvégien. Elles y sont développées avec la plus grande clarté et avec toute la rigueur que l'on est habitué à rencontrer dans les recherches modernes [1].

I. Dans l'introduction, l'auteur rappelle ce que l'on entend par une transformation et par un groupe de transformations. Il divise les groupes de transformations en groupes discontinus et groupes continus; ces derniers peuvent être finis ou infinis. L'Ouvrage est consacré aux groupes de transformations continus et finis.

Un tel groupe est défini par un seul système de n équations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(1) Toutes les théories, tous les résultats contenus dans le Livre sont dus à M. Sophus Lie; il faut en excepter seulement la théorie élémentaire des systèmes complets, exposée au Chap. V, et une partie des résultats contenus dans le Chap. X. Pour la part qui revient à M. Engel dans la rédaction de l'Ouvrage, nous renvoyons à la préface du Livre.

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1, \ldots, x_n$ et des paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Ces fonctions doivent être telles que deux transformations du groupe

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$$
$$x''_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r),$$

effectuées successivement, donnent une transformation du groupe

$$x''_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r).$$

Les propriétés fondamentales des groupes de transformations sont exposées dans les quatre premiers Chapitres et dans le Chapitre IX. La démonstration rigoureuse de ces propriétés exige que l'on fasse certaines hypothèses sur les fonctions $f_1, \ldots, f_n$; aussi l'auteur a-t-il soin, dans le premier Chapitre, de préciser la définition des groupes considérés. Les variables $x_1, \ldots, x_n$ et les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ ne doivent varier que dans des domaines convenablement choisis. De plus, les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ sont supposés essentiels, c'est-à-dire que leur nombre ne peut être diminué par le choix de nouveaux paramètres. Pour que les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ soient essentiels, il faut et il suffit que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne vérifient simultanément aucune équation aux dérivées partielles de la forme

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0.$$

Ceci posé, la définition du groupe revient à dire que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ doivent satisfaire aux n équations fonctionnelles

$$f_i[f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a); b_1, \ldots, b_r] = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r),$$

où $c_1, \ldots, c_r$ sont des fonctions de $a_1, \ldots, a_r$ et $b_1, \ldots, b_r$. M. Lie démontre que ces fonctions sont des fonctions analytiques de leurs arguments et que leurs déterminants fonctionnels pris par rapport à $a_1, \ldots, a_r$ et à $b_1, \ldots, b_r$ ne s'annulent pas identiquement.

L'auteur fait ensuite une digression sur les groupes de transformations Cremona; il montre que les transformations de ces groupes sont toujours deux à deux inverses l'une de l'autre, d'où il résulte

que ces groupes contiennent la transformation identique. Mais rien ne prouve qu'il en soit ainsi pour tous les groupes; et, en effet, on trouve plus loin (¹) un exemple très simple d'un groupe ne contenant pas la transformation identique. Aussi M. Lie ne fait-il, dans ce qui suit, aucune hypothèse à ce sujet.

Le Chapitre se termine par une représentation des groupes de transformations à n variables empruntée à la Géométrie à n dimensions. Chaque groupe de transformations définit, comme dit l'auteur, un groupe de permutations des points de l'espace à n dimensions. Il suffit pour cela de considérer $x_1, \ldots, x_n$ comme les coordonnées d'un point. M. Sophus Lie fait dans la suite l'usage le plus remarquable de cette représentation. Elle conduit immédiatement à une notion fondamentale dans la théorie des groupes de transformations. Il est clair, en effet, que le groupe des permutations considéré n'est pas modifié si l'on fait un changement de paramètres, ou même un changement de variables, ce qui revient à changer le système de coordonnées. On ne doit donc pas considérer comme essentiellement distincts deux groupes de transformations tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par un changement convenable de paramètres et de variables. M. Lie dit dans ce cas que les deux groupes sont semblables.

Le Chapitre II est consacré à la démonstration d'un système d'équations aux dérivées partielles qui joue dans la théorie des groupes un rôle fondamental. Voici la marche générale du raisonnement.

Partons des équations fonctionnelles

$$f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r) = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r),$$

où

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$c_k = \varphi_k(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ étant, comme nous l'avons vu, des fonctions analytiques. Nous écrirons, pour abréger, f'_i au lieu de

$$f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, b_2, \ldots, b_r).$$

(¹) Chap. IX, p. 163. Cet exemple est dû à M. Engel.

Eu égard aux propriétés des fonctions φ_k établies dans le Chapitre précédent, on peut considérer comme variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et $c_1, c_2, \ldots, c_r$; si nous différentions alors par rapport à chacune des variables $a_1, a_2, \ldots, a_r$, nous obtenons les relations

$$\frac{\partial f'_i}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial f'_i}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial a_k} + \frac{\partial f'_i}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial f'_i}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_k} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

On en déduit, en résolvant par rapport à $\frac{\partial x'_1}{\partial a_k}, \ldots, \frac{\partial x'_n}{\partial a_k}$, des équations de la forme

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \Phi_{1i}(x', b)\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \ldots + \Phi_{ri}(x', b)\frac{\partial b_r}{\partial a_k}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r),$$

qu'on met, en se servant des relations $c_k = \varphi_k(a, b)$, sous la forme

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \Psi_{jk}(a, b)\Phi_{ji}(x', b) \qquad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots, n) \\ (k = 1, 2, \ldots, r) \end{cases};$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ n'entrent plus dans ces relations; on peut y considérer de nouveau $x_1, \ldots, x_n$; $a_1, \ldots, a_r$; $b_1, \ldots, b_r$ comme variables indépendantes et par suite donner à $b_1, \ldots, b_r$ des valeurs numériques particulières, d'où le théorème suivant :

Si les équations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe de transformations continu et fini dont les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *sont essentiels, les quantités* $x'_1, \ldots, x'_n$ *considérées comme fonctions des* x *et des* a *satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme*

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=i}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots n) \\ (k = 1, 2, \ldots r) \end{cases}.$$

M. Lie montre de plus que ces équations peuvent s'écrire

$$\xi_{ki}(x'_1, \ldots, x'_n) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1, \ldots, a_r)\frac{\partial x'_i}{\partial a_j} \qquad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots, n) \\ (k = 1, 2, \ldots, r) \end{cases}$$

et qu'il est impossible de déterminer r constantes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ qui ne soient pas toutes nulles et telles que les n expressions

$$e_1 \xi_{1i}(x') + \ldots + e_r \xi_{ri}(x') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soient identiquement nulles.

Dans le Chapitre III, l'auteur étudie spécialement les groupes à un paramètre et introduit la notion si importante de transformation infinitésimale.

Dans le cas où il n'y a qu'un paramètre, les équations aux dérivées partielles du Chapitre précédent sont des équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx'_i}{da} = \psi(a)\,\xi_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces équations définissent complètement le groupe si l'on connaît la transformation particulière qui correspond à une valeur a_0 du paramètre ; en les intégrant, on a les équations finies du groupe. On simplifie ces équations en faisant le changement de paramètre

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\,da.$$

Elles deviennent

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1, \ldots, x'_n).$$

Admettons maintenant que le groupe contienne la transformation identique : on peut supposer qu'elle correspond à la valeur $t = 0$ du nouveau paramètre ; la forme des intégrales montre alors que les transformations du groupe sont deux à deux inverses l'une de l'autre, que deux transformations quelconques sont échangeables et enfin que le groupe est semblable à un groupe de translations

$$y'_1 = y_1, \quad \ldots, \quad y'_{n-1} = y_{n-1}, \quad y'_n = y_n + t.$$

M. Lie introduit ensuite la notation

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Les équations finies du groupe peuvent alors s'écrire sous la forme remarquable

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1}\xi_i + \frac{t^2}{1.2}X\xi_i + \frac{t^3}{1.2.3}XX\xi_i + \frac{t^4}{1.2.3.4}XXX\xi_i + \ldots$$

M. Sophus Lie appelle transformation infinitésimale du groupe la transformation qui correspond à une valeur infiniment petite δt du paramètre t; on peut l'écrire, en négligeant tous les termes en δt de degré supérieur au premier,

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Quand on connaît la transformation infinitésimale du groupe, le groupe est complètement déterminé. De plus, on peut dire que chacune des transformations du groupe s'obtient en répétant un nombre infini de fois la transformation infinitésimale. M. Lie dit encore que le groupe est engendré par sa transformation infinitésimale. Le savant norvégien représente cette transformation infinitésimale par le symbole

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Xf est aussi le symbole du groupe à un paramètre, contenant la transformation identique, que cette transformation infinitésimale engendre; de sorte que l'on peut parler de la transformation infinitésimale Xf et du groupe à un paramètre Xf.

Il est inutile d'insister sur les nombreux avantages que présente cette heureuse notation. Elle permet d'écrire sous une forme condensée et frappante toutes les relations qui se présentent dans la théorie des groupes de transformations. De plus, elle se prête très bien aux changements de variables, comme le montre le théorème suivant :

Si le symbole $Xf = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ *prend, par le changement de variables*

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la forme

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} Xy_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial f}{\partial y_i} = Yf.$$

les équations du groupe engendré par Xf, *à savoir*

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1}\xi_i + \frac{t^2}{1.2}X\xi_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

prennent par le changement de variables la forme

$$y'_i = y_i + \frac{t}{1}\eta_i + \frac{t^2}{1.2}Y\eta_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le nouveau groupe est donc engendré par la transformation infinitésimale Yf.

Nous arrivons maintenant à une belle représentation cinématique et géométrique des transformations infinitésimales et des groupes à un paramètre. Si l'on considère $x_1, \ldots, x_n$ comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace à n dimensions, et le paramètre comme représentant le temps, les équations

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

définissent un mouvement stationnaire d'un fluide compressible. Une transformation du groupe indique le déplacement subi par les particules du fluide au bout du temps t, et la transformation infinitésimale n'est autre chose que le mouvement infiniment petit, toujours le même, qui se produit à chaque instant. Toutes les particules du fluide qui passent successivement par un même point de l'espace décrivent la même courbe. Par chaque point de l'espace passe une de ces courbes, que M. Lie appelle les trajectoires de la transformation infinitésimale Xf.

On peut encore considérer la transformation infinitésimale

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

comme faisant correspondre à chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace une direction définie par les coefficients de direction $\xi_1, \ldots, \xi_r$ et sur cette direction un segment, celui qui a pour origine le point $(x_1, \ldots, x_n)$ et pour extrémité le point $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Les trajectoires sont tangentes en chaque point à la direction correspondante.

Sur les groupes à un paramètre qui pourraient ne pas contenir

la transformation identique, M. Sophus Lie donne le théorème suivant :

A tout groupe à un paramètre correspond une transformation infinitésimale déterminée Xf; *et toute transformation du groupe peut être obtenue en effectuant successivement : 1° une transformation quelconque du groupe, toujours la même; 2° une transformation convenablement choisie du groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale* Xf.

L'auteur donne ensuite une définition importante : r transformations infinitésimales

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

sont dites indépendantes s'il est impossible de trouver r constantes $e_1, \ldots, e_r$ qui ne soient pas toutes nulles et telles que l'on ait l'identité

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \ldots + e_r X_r f = 0.$$

Suivent plusieurs conséquences de cette définition qui trouvent leur application plus tard et dont l'une des principales est la suivante : si les r transformations infinitésimales $X_k f$ sont indépendantes, le faisceau de tous les groupes à un paramètre

$$\lambda_1 X_1 f + \ldots + \lambda_r X_r f$$

forme une famille de transformations

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1.2} X_k \xi_{ji} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour laquelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des paramètres essentiels.

Le Chapitre IV contient l'étude des groupes à plusieurs paramètres. Reprenons les équations aux dérivées partielles obtenues au Chapitre II

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\,\xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots, n) \\ (k = 1, 2, \ldots, r) \end{cases};$$

elles peuvent s'écrire

$$\xi_{ki}(x'_1, \ldots, x'_n) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_j} \quad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots, n) \\ (k = 1, 2, \ldots, r) \end{cases}.$$

M. Lie y introduit de nouveaux paramètres, en posant

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r),$$

ce qui définit $a_1, a_2, \ldots, a_r$ comme fonctions de t et de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ou plutôt comme fonctions des seuls produits $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$. On obtient alors les équations

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

d'où résulte le théorème suivant :

A tout groupe à r paramètres correspondent r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \ldots, X_r f$, et toute transformation du groupe peut être obtenue en effectuant successivement : 1° une transformation quelconque du groupe, toujours la même; 2° une transformation convenablement choisie d'un groupe à un paramètre engendré par une transformation infinitésimale de la forme

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_r X_r f.$$

Si le groupe considéré contient la transformation identique, les résultats précédents se simplifient et l'on a ce beau théorème :

Si un groupe à r paramètres

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$$

contient la transformation identique, l'ensemble de ses transformations se confond avec l'ensemble des transformations d'un faisceau de ∞^{r-1} groupes à un paramètre contenant la transformation identique.

Pour trouver ces groupes à un paramètre, il suffit de former les

équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\, \xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (k = 1, 2, \ldots, r), \end{array} \right.$$

que vérifient les fonctions $x'_i = f_i(x, a)$. Si l'on pose alors

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

l'expression

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k f,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des paramètres arbitraires, représente les transformations infinitésimales de tous ces groupes. Les équations du groupe peuvent se mettre sous la forme canonique

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1.2} X_k \xi_{ji} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les transformations de ce groupe sont deux à deux inverses l'une de l'autre. Enfin le groupe ne contient pas d'autres groupes à un paramètre que ceux qui ont pour transformations infinitésimales les transformations infinitésimales du faisceau $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k f$.

L'auteur donne ensuite un procédé plus rapide pour trouver les transformations infinitésimales d'un groupe contenant la transformation identique et applique ce procédé au groupe de toutes les transformations projectives à une variable.

C'est au Chapitre IX que M. Sophus Lie, revenant sur les propriétés générales des groupes, établit le théorème fondamental qui donne la condition nécessaire et suffisante pour que r transformations infinitésimales données appartiennent à un même groupe à r paramètres.

La première partie de cette belle proposition s'obtient en écrivant les conditions d'intégrabilité des équations aux dérivées partielles établies au Chapitre II. L'auteur y arrive de la manière la

plus élégante en transformant ces équations de manière à pouvoir appliquer les propriétés des systèmes complets, ce qui donne en même temps d'autres résultats qui sont utiles dans la suite.

Les r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui correspondent à un groupe à r paramètres, sont liées par des relations de la forme

$$(X_k X_j) = X_k X_j f - X_j X_k f = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s f$$
$$(k, j = 1, 2, \ldots, r),$$

où les quantités c_{kjs} sont des constantes.

Appliquée à un groupe contenant la transformation identique, elle peut s'énoncer ainsi :

Si un groupe à r paramètres contient les r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \ldots, X_r f$, *ces transformations infinitésimales sont liées deux à deux par des relations de la forme*

$$(X_k X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s f \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, r).$$

M. Lie établit ensuite la réciproque :

Si r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \ldots, X_r f$ *sont liées deux à deux par des relations de la forme*

$$(X_k X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s f \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, r),$$

le faisceau des groupes à un paramètre

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_r X_r f$$

forme un groupe continu à r paramètres, qui contient la transformation identique et dont les transformations sont deux à deux inverses l'une de l'autre.

On peut dire dès lors que les r transformations infinitésimales $X_1f, \ldots, X_rf$ définissent un groupe à r paramètres et appeler ce groupe le groupe $X_1f, \ldots, X_rf$; et tous les groupes contenant la transformation identique peuvent être considérés comme définis de cette manière.

Quant aux groupes qui ne contiennent pas la transformation identique, ils ne présentent qu'un intérêt purement théorique.

M. Sophus Lie démontre, en effet, qu'un tel groupe peut toujours s'obtenir en faisant dans un certain groupe à transformation identique un changement de paramètres convenable. Aussi M. Lie ne considère-t-il plus, dans la suite de l'Ouvrage, que des groupes contenant la transformation identique.

Comme on l'a vu, les transformations infinitésimales qui définissent un groupe de transformations sont liées par les relations

$$(X_iX_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_sf \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Les constantes c_{iks} qui figurent dans ces relations satisfont aux équations suivantes :

$$c_{iks} + c_{kis} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{r}(c_{iks}c_{sjt} + c_{kjs}c_{sit} + c_{jis}c_{skt}) = 0$$

$$(i, k, j, t = 1, 2, \ldots, r).$$

Les premières résultent de la définition même du crochet (X_iX_k); les secondes s'obtiennent au moyen de l'identité connue de Jacobi.

Dans le Chapitre suivant, M. Lie s'occupe de l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes arbitraires. A cette classe particulière d'équations aux dérivées partielles appartiennent les équations que M. Lie appelle les équations de définition d'un groupe, et qui jouent un rôle fondamental dans les belles méthodes d'intégration dues au grand géomètre. Soient

$$X_kf = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

r transformations infinitésimales indépendantes d'un groupe à r paramètres. Considérons la transformation générale

$$X_k f = \sum_{k=1}^{r} e_k X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

où $\xi_i = \sum_{k=1}^{r} \xi_{ki} e_k$.

L'élimination des constantes arbitraires $e_1, e_2, \ldots, e_r$ conduit à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles qui est le système des équations de définition du groupe. Ces équations étant données, le groupe est entièrement déterminé. D'ailleurs, dans beaucoup d'applications, on ne connaît un groupe que par ses équations de définition. Il est donc important de savoir en déduire les propriétés principales du groupe. M. Lie introduit à cet effet la notion de transformation infinitésimale d'ordre k.

Une transformation infinitésimale Xf est dite d'ordre k au point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si le développement en série de Xf par rapport aux puissances croissantes de $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ commence par des termes de degré k.

A chaque groupe de transformations correspond un nombre s, tel qu'en chaque point le groupe contient des transformations infinitésimales d'ordre 0, d'ordre 1, ..., d'ordre $s-1$ et aucune d'ordre s. De plus, on peut en chaque point choisir les transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, qui définissent le groupe, de manière que toute combinaison linéaire des transformations d'ordre k de la suite $X_1 f, \ldots, X_r f$ soit elle-même d'ordre k. Le nombre de ces transformations d'ordre k est indépendant du point choisi. Si p est ce nombre, on dit que le groupe contient précisément p transformations infinitésimales d'ordre k.

M. Lie montre comment, à l'inspection des équations de définition d'un groupe, on peut dire combien il contient de transformations infinitésimales de chaque ordre.

On peut considérer des groupes continus dont les transformations finies sont données, non plus par un système unique d'équations, mais par l'ensemble de plusieurs systèmes d'équations. Tel est, par exemple, le groupe formé par l'ensemble des transfor-

mations de coordonnées rectangulaires dans le plan. M. Lie étudie ces groupes au Chapitre XVIII et arrive aux résultats suivants :

Si les transformations d'un groupe à r paramètres, défini par m systèmes d'équations, sont deux à deux inverses l'une de l'autre : 1° *ce groupe contient un sous-groupe* G *à r paramètres engendré par r transformations infinitésimales, et il n'en contient qu'un seul;* 2° *le groupe* G *est invariant dans le groupe considéré;* 3° *si l'on représente par* S *la transformation générale du sous-groupe* G, *le groupe proposé est formé de l'ensemble des m familles de transformations*

$$S, \quad T_1 S, \quad \ldots, \quad T_{m-1} S,$$

$T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$ *étant $m - 1$ transformations déterminées du groupe.*

La réciproque de ce théorème est d'ailleurs vraie et donne le moyen de former autant de groupes que l'on veut de l'espèce considérée.

II. Les fonctions qui admettent toutes les transformations d'un groupe jouent dans la théorie des groupes un rôle fort important.

M. Lie les appelle les *invariants du groupe* (¹). Il démontre que les seuls invariants d'un groupe à un paramètre Xf sont les intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles $Xf = 0$. Un groupe à n variables et r paramètres $X_1 f, \ldots, X_r f$ n'a d'invariants que si les r équations $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$ peuvent se réduire à moins de n équations indépendantes; ces invariants sont alors les intégrales du système complet défini par ces r équations.

M. Sophus Lie considère aussi des systèmes d'équations invariants. Dire qu'un système d'équations

$$\Pi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Pi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

admet la transformation

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est dire que ce système est équivalent au suivant :

$$\Pi_i[f_1(x), \ldots, f_n(x)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(¹) Chap. VI et aussi Chap. XIII, p. 215.

Au point de vue géométrique, cela signifie que chaque point de la multiplicité définie par le système d'équations se change par la transformation en un point de cette même multiplicité; ce que l'auteur exprime en disant que la multiplicité admet la transformation, ou encore qu'elle reste invariante par la transformation.

Les considérations qui précèdent permettent d'interpréter d'une manière nouvelle les intégrales d'un système complet :

$$X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_q f = 0.$$

D'abord ce sont des invariants pour tous les groupes à un paramètre engendrés par des transformations infinitésimales de la forme

$$\chi_1(x_1, \ldots, x_n) X_1 f + \ldots + \chi_q(x_1, \ldots, x_n) X_q f.$$

Soient de plus $\psi_1, \ldots, \psi_{n-q}$ $n - q$ intégrales indépendantes du système complet. Les équations

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \quad \ldots, \quad \psi_{n-q}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-q}$$

définissent, pour chaque système de valeurs des constantes C, une multiplicité à q dimensions. M. Lie appelle toutes ces multiplicités les multiplicités caractéristiques du système complet. Par chaque point de l'espace passe une multiplicité caractéristique et une seule, ce que l'auteur exprime en disant que le système complet définit une décomposition de l'espace en multiplicités caractéristiques. Chacune de ces multiplicités reste invariante par les transformations de tous les groupes à un paramètre

$$\chi_1 X_1 f + \ldots + \chi_q X_q f;$$

en chacun de ses points elle est tangente à chacune des directions que les transformations infinitésimales $\chi_1 X_1 f + \ldots + \chi_q X_q f$ font correspondre à ce point. Enfin chaque multiplicité caractéristique peut être considérée comme engendrée par les trajectoires de chacune de ces transformations infinitésimales.

Dans le Chapitre suivant [1], l'auteur s'occupe de la détermination de tous les systèmes d'équations qui admettent des transformations infinitésimales données. M. Lie dit qu'un système d'é-

[1] Chap. VII, p. 107.

quations

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \Omega_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

admet la transformation infinitésimale Xf si chacune des expressions XΩ_k s'annule en vertu des équations du système. C'est d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que le système admette chacune des transformations du groupe à un paramètre Xf. Au point de vue géométrique, elle signifie qu'en chacun de ses points la multiplicité définie par le système d'équations est tangente à la direction que la transformation infinitésimale fait correspondre à ce point.

M. Lie arrive à une règle générale permettant de former tous les systèmes d'équations qui admettent un nombre quelconque de transformations infinitésimales données.

Les résultats se simplifient dans le cas où ces transformations définissent un groupe ([2]).

Soient $X_1 f, \ldots, X_r f$ ces transformations

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si, parmi les équations

$$X_1 f = 0, \qquad \ldots, \qquad X_r f = 0,$$

il y en a moins de n indépendantes, elles définissent un système complet. En écrivant des relations quelconques entre les intégrales de ce système complet, on obtient un système d'équations qui admet toutes les transformations du groupe. On obtient encore des systèmes d'équations invariants en égalant à zéro tous les déterminants d'un même ordre formés avec les éléments du tableau des coefficients de $X_1 f, \ldots, X_r f$ (pourvu toutefois que ces équations soient compatibles). Mais, pour avoir tous les systèmes d'équations invariants, il faut en général intégrer encore d'autres systèmes complets que M. Lie apprend à former.

Les résultats contenus dans ce Chapitre sont fondamentaux. Beaucoup de problèmes peuvent en effet se ramener à la recherche des systèmes d'équations admettant des transformations infinité-

([1]) Chap. XIV, p. 222.

simales données. On a donc là au fond une méthode puissante pour résoudre un grand nombre de questions difficiles. C'est ainsi que M. Lie traite le problème de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes arbitraires. Les Chapitres XIX et XX contiennent aussi de belles applications de cette méthode.

Un des Chapitres les plus importants au point de vue des applications est le Chapitre VIII, car il contient le point de départ des belles recherches de M. Sophus Lie sur l'intégration des systèmes complets. M. Lie dit que le sytème complet

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

admet la transformation

$$x'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si l'on a q identités de la forme

$$X_k f = \sum_{j=1}^{q} \psi_{kj}(x'_1, \ldots x'_n) \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

L'auteur cherche alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système complet admette toutes les transformations d'un groupe à un paramètre Yf. Si l'on désigne par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}$ un système d'intégrales du système complet, cette condition est que l'on ait $n - q$ relations de la forme

$$Y\varphi_k = \omega_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-q).$$

Cette condition se transforme en une autre plus avantageuse où n'entrent pas les intégrales [1] : Il faut et il suffit que l'on ait q relations de la forme

$$(X_k Y) = \sum_{j=1}^{q} \chi_{kj}(x_1, \ldots, x_n) X_j f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

[1] LIE, *Gesellschaft d. w. zu Christiania*, nov. 1874.

M. Lie donne ensuite plusieurs conséquences de cet important résultat.

Voici maintenant l'interprétation géométrique de la notion précédente :

Si le système complet admet toutes les transformations d'un groupe, ces transformations ne font qu'échanger entre elles les multiplicités caractéristiques du système complet. Ces multiplicités définissent donc une décomposition de l'espace invariante par les transformations du groupe.

Ceci conduit à une notion nouvelle, celle des familles de multiplicités invariantes [1].

Une famille de multiplicités définie par les équations

$$\Omega_i(x_1, \ldots, x_n; l_1, \ldots, l_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - q),$$

où $l_1, \ldots, l_m$ sont des paramètres arbitraires, admet une transformation

$$x'_i = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si le système d'équations se change par cette tranformation en un nouveau système représentant la même famille de multiplicités. Alors les multiplicités de la famille sont simplement échangées entre elles par la transformation.

Si l'on considère maintenant une famille de multiplicités admettant toutes les transformations d'un groupe, il y a lieu d'étudier la loi suivant laquelle se fait l'échange de ces multiplicités. Cette loi est donnée par un certain groupe de transformations entre les paramètres $l_1, \ldots, l_m$ dont M. Lie expose les propriétés au Chapitre XXIII.

Nous insisterons davantage sur le Chapitre [2] que l'auteur consacre aux invariants différentiels. On sait que M. Sophus Lie a donné une théorie générale des invariants différentiels. Cette belle théorie permet de trouver les invariants différentiels d'un groupe quelconque. Elle est fondée sur les principes suivants :

---

(1) Chap. XXIII, p. 458.

(2) Chap. XXV, p. 522.

Soit donnée la transformation à trois variables x, y, z

$$(1) \qquad x_1 = f(x, y, z), \qquad y_1 = g(x, y, z), \qquad z_1 = h(x, y, z).$$

Supposons que y et z soient fonctions de x, alors y_1 et z_1 peuvent être considérés comme fonctions de x_1. Soient y' et z' les dérivées de y et z par rapport à x et y'_1 et z'_1 les dérivées de y_1 et z_1 par rapport à x_1. Il est aisé d'évaluer les deux dernières au moyen des deux premières et de x, y, z.

$$(2) \qquad y'_1 = \mathrm{M}(x, y, z, y', z'), \qquad z'_1 = \mathrm{N}(x, y, z, y', z').$$

Si, dans les relations (1) et (2), on considère x, y, z, y', z' comme des variables indépendantes, on obtient une transformation à cinq variables qui correspond d'une manière bien déterminée à la transformation (1). M. Lie l'appelle une *transformation prolongée* (*erweiterte Transformation*). La signification géométrique de cette nouvelle transformation est évidente : cette transformation prolongée indique la loi suivant laquelle la transformation donnée échange entre eux les éléments linéaires de l'espace.

On peut prolonger la transformation (1) d'une autre manière. Supposons que z soit une fonction des deux variables indépendantes x et y ayant pour dérivées partielles p et q. Alors z_1 pourra être considérée comme fonction de x_1 et y_1. Soient p_1 et q_1 les dérivées partielles du premier ordre de z_1

$$(3) \qquad p_1 = \mathrm{M}(x, y, z, p, q), \qquad q_1 = \mathrm{N}(x, y, z, p, q).$$

Si, dans les relations (1) et (3), on considère x, y, z, p, q comme variables indépendantes, on obtient une transformation à cinq variables qui est dite également une *transformation prolongée*. Cette transformation indique la loi suivant laquelle la transformation donnée échange les éléments plans de l'espace.

Ces transformations prolongées jouent un rôle très important dans les recherches de M. Lie. A l'égard de ces transformations, M. Lie démontre le théorème fondamental suivant :

Si les transformations à r paramètres

$$(I) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z, a_1, \ldots, a_r), \\ y_1 = g(x, y, z, a_1, \ldots, a_r), \\ z_1 = h(x, y, z, a_1, \ldots, a_r), \end{cases}$$

forment un groupe, il en est de même des transformations prolongées.

M. Lie montre qu'il est facile de déterminer les transformations infinitésimales des groupes prolongés connaissant les r transformations infinitésimales

$$X_k = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

qui définissent le groupe (I).

Le premier groupe prolongé est défini par les r transformations infinitésimales

$$X'_k = X_k + \left(\frac{d\eta_k}{dx} - y'\frac{d\xi_k}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial y'} + \left(\frac{d\zeta_k}{dx} - z'\frac{d\xi_k}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial z'},$$

où

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z}.$$

Le deuxième groupe prolongé est défini par les r transformations infinitésimales

$$X'_k = X_k + \pi_k \frac{\partial f}{\partial p} + \chi_k \frac{\partial f}{\partial q},$$

où

$$\pi_k = \frac{d\zeta_k}{dx} - p\frac{d\xi_k}{dx} - q\frac{d\eta_k}{dx}, \qquad \chi_k = \frac{d\zeta_k}{dy} - p\frac{d\xi_k}{dy} - q\frac{d\eta_k}{dy}$$

et

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}.$$

M. Lie étend les considérations précédentes aux dérivées d'ordre supérieur au premier et aux groupes à n variables. On peut, dans ce cas, considérer un nombre quelconque de ces variables comme fonctions des autres et prolonger les transformations du groupe de bien des manières.

Cela posé, les invariants différentiels d'un groupe sont précisément les invariants de tous les groupes que l'on en déduit en prolongeant ses transformations de toutes les manières possibles. Les théorèmes démontrés dans le Chapitre XIII permettent donc de les trouver : il suffit pour cela d'intégrer des systèmes complets.

Supposons, par exemple, que les variables soient x, y, z et que

le groupe soit défini par les r transformations infinitésimales

$$X_k = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial z}{\partial f} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on veut avoir les invariants différentiels du deuxième ordre du groupe, z étant considéré comme fonction de x et de y, on opère ainsi. On prolonge le groupe proposé de manière que les variables nouvelles soient x, y, z, p, q, r, s, t. Soient

$$X'_i = X_i + \varpi_i \frac{\partial f}{\partial p} + \chi_i \frac{\partial f}{\partial q} + \rho_i \frac{\partial f}{\partial r} + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial s} + \tau_i \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

les transformations infinitésimales ainsi obtenues. Les invariants différentiels cherchés sont les intégrales du système complet

$$X'_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

On voit donc qu'à chaque groupe (fini et continu) de transformations correspond une infinité d'invariants différentiels.

De même, en cherchant les systèmes d'équations invariants des groupes prolongés, on obtient les systèmes d'équations différentielles invariants du groupe donné.

III. Les principales notions qui se présentent dans la théorie des groupes de substitutions se retrouvent dans celle des groupes de transformations.

Étant donné un groupe $X_1 f, \ldots, X_r f$, on peut se proposer de déterminer ses sous-groupes. M. Lie traite ce problème au Chapitre XII. La question revient à celle-ci : déterminer de la manière la plus générale m transformations infinitésimales du groupe

$$Y_\mu f = \sum_{\rho=1}^{r} h_{\mu\rho} X_\rho f \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

de façon que l'on ait des relations de la forme

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\pi=1}^{m} l_{\mu\nu\pi} Y_\pi f \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m).$$

C'est donc un problème purement algébrique.

Dans le même Chapitre, M. Lie indique plusieurs cas où l'on

peut reconnaître immédiatement que plusieurs transformations infinitésimales du groupe définissent un sous-groupe.

Voici maintenant ([1]) comment l'auteur étend aux groupes de transformations les notions de transitivité et de primitivité :

Un groupe de transformations entre les variables $x_1, \ldots, x_n$ est dit transitif s'il existe dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$ une région à n dimensions telle qu'il y ait au moins une transformation du groupe qui change un point quelconque de cette région en un autre quelconque de ses points. Au point de vue analytique, cela revient à dire que les équations du groupe

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

peuvent être résolues par rapport à n des paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Un groupe ne peut donc être transitif que s'il contient au moins autant de paramètres que de variables. Un groupe transitif à r paramètres et r variables est appelé par M. Lie *simplement transitif*. Il existe alors une transformation du groupe et une seule qui change un point en un autre point donné.

Connaissant les transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$ d'un groupe, on reconnaît qu'il est transitif à ce que, parmi les équations $X_1 f = 0, \ldots; X_r f = 0$, il y en a n indépendantes (n étant toujours le nombre des variables). Il en résulte qu'un groupe transitif n'a pas d'invariants. Au contraire, un groupe intransitif a toujours des invariants, et M. Lie montre comment, si l'on connaît les équations du groupe sous forme finie, on peut obtenir ces invariants par de simples éliminations.

M. Lie donne ici une extension de la notion d'invariants, en considérant des invariants qui seraient fonctions des coordonnées de plusieurs points. La suite des nombres des invariants relatifs à un point, à deux points, etc., définit une propriété importante d'un groupe intransitif.

L'auteur montre ensuite qu'il suffit de connaître les équations de définition d'un groupe pour savoir s'il est transitif ou intransitif. Un groupe transitif à n variables est caractérisé par ce fait qu'il contient, en chaque point, n transformations infinitésimales

---

([1]) Chap. XIII, p. 211.

d'ordre zéro, dont on ne peut déduire, par combinaison linéaire, aucune transformation d'ordre supérieur.

M. Lie dit qu'un groupe est *non-primitif* s'il existe au moins une décomposition de l'espace en multiplicités qui reste invariante par toutes les transformations du groupe. Cela revient à dire que le groupe laisse invariant au moins un système complet. Un groupe qui n'est pas non-primitif est dit *primitif*. Il résulte de cette définition que tout groupe intransitif est non-primitif et que tout groupe primitif est transitif. Il y a donc deux espèces de groupes transitifs : ceux qui sont primitifs et ceux qui sont non-primitifs.

Les sous-groupes invariants sont étudiés par M. Sophus Lie au Chap. XV. L'auteur introduit d'abord une notion nouvelle, celle des faisceaux de transformations infinitésimales invariants. Considérons q transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

et posons, pour abréger,

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x'_1, \ldots, x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Si la transformation

$$x'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donne lieu à une identité de la forme

$$\sum_{k=1}^{q} e_k X_k f = \sum_{k=1}^{q} e'_k X'_k f,$$

où $e_1, \ldots, e_q$ sont des paramètres arbitraires, et $e'_1, \ldots, e'_q$ sont fonctions de $e_1, \ldots, e_q$ seulement, on dit que le faisceau de transformations infinitésimales $e_1 X_1 f + \ldots + e_q X_q f$ admet la transformation

$$x'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ces conditions, la transformation finie du groupe à un paramètre $\Sigma e_k X_k f$

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_{k=1}^{q} e_k X_k x_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

devient, en faisant le changement de variables,

$$\bar{x}'_i = x'_i + \sum_{k=i}^{q} e'_k X'_k x'_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que l'ensemble des transformations de tous les groupes à un paramètre $\Sigma e_k X_k f$ est aussi invariant.

M. Lie remarque que l'expression $\Sigma e_k X_k f$ définit complètement la transformation finie considérée ; on peut donc la regarder comme le symbole de cette transformation, et dire que, par le changement de variables $x'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n)$, la transformation finie $\Sigma e_k X_k f$ se change en la transformation finie $\Sigma e'_k X'_k f$.

L'auteur démontre alors que la condition pour que le faisceau $\Sigma e_k X_k f$ reste invariant par toutes les transformations du groupe à un paramètre Yf est que l'on ait q relations de la forme

$$(YX_k) = \sum_{j=1}^{q} g_{kj} X_j f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

où les quantités g_{kj} sont des constantes.

M. Lie en conclut que, pour que l'ensemble des transformations finies $\sum_{k=1}^{r} e_k X_k f$ reste invariant par chacune des transformations qu'il renferme, il faut et il suffit que les transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$ soient liées deux à deux par des relations de la forme

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

où les quantités c_{iks} doivent être des constantes, c'est-à-dire que cet ensemble forme un groupe.

Si l'on représente par $T_{(a)}$ la transformation finie $\Sigma a_k X_k f$, on peut énoncer ainsi ce beau résultat : *La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)}$ appartienne toujours à l'ensemble des transformations $T_{(a)}$, quelles que soient les valeurs des paramètres $a_1, \ldots, a_r$; $b_1 \ldots, b_r$, est que cet ensemble forme un groupe.*

Une autre conséquence du résultat précédent est la suivante : pour que deux groupes à un paramètre Xf et Yf soient échan-

geables, c'est-à-dire pour que leurs transformations soient échangeables deux à deux, il faut et il suffit que le crochet (XY) s'annule identiquement. M. Lie dit alors que les deux transformations infinitésimales Xf et Yf sont échangeables.

Voici maintenant la définition des sous-groupes invariants : si un groupe à r paramètres $X_1 f, \ldots, X_r f$ est contenu dans un groupe à $r+m$ paramètres $X_1 f, \ldots, X_r f, Y_1 f, \ldots, Y_m f$, on dit qu'il en est un sous-groupe invariant, s'il reste invariant par chacune des transformations de ce groupe. Cela revient à dire que, si S est une transformation quelconque du sous-groupe et T une transformation du groupe qui le contient, la transformation $T^{-1}ST$ appartient encore au sous-groupe [1].

La condition pour qu'il en soit ainsi est simplement que chacun des crochets $(Y_i X_k)$ soit une combinaison linéaire à coefficients constants de $X_1 f, \ldots, X_r f$.

Comme dans la théorie des substitutions, un groupe est dit *simple* s'il ne contient aucun sous-groupe invariant; il est *composé* dans le cas contraire.

M. Lie donne, dans le reste du Chapitre, divers exemples de sous-groupes invariants. Il étudie ensuite une classe de groupes composés qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, et donne un procédé extrêmement remarquable pour reconnaître ces groupes.

C'est au Chap. XVII que l'auteur définit les groupes isomorphes. M. Lie fait dépendre la notion d'isomorphisme d'une autre notion importante, celle de la *structure* (*Zusammensetzung*) d'un groupe. Si un groupe est défini par les r transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, ces transformations sont liées deux à deux par les relations

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f.$$

M. Lie dit que le système des constantes c_{iks} définit la structure du groupe. Il y a d'ailleurs une infinité de systèmes de con-

---

[1] Suivant le mode de langage employé dans la théorie des substitutions, toutes les transformations du groupe sont permutables à son sous-groupe. (*Voir* JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 24.)

stantes qui correspondent à une même structure : ce sont tous ceux que l'on obtient en remplaçant les transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$ par r autres transformations infinitésimales indépendantes quelconques du groupe.

Si l'on considère maintenant un second groupe à r paramètres, pour qu'il ait la même structure que le premier, il faut et il suffit que l'on puisse choisir parmi ses transformations infinitésimales r transformations infinitésimales $Y_1 f, \ldots, Y_r f$ qui soient liées par les relations

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f,$$

où les constantes c_{iks} sont les mêmes que pour le premier groupe. Deux groupes à r paramètres qui ont même structure sont dits *isomorphes*, et l'isomorphisme est *holoédrique*.

Plus généralement, M. Lie dit qu'un groupe à $r-q$ paramètres est isomorphe avec le groupe $X_1 f, \ldots, X_r f$, s'il est possible de trouver r transformations infinitésimales de ce groupe $Y_1 f, \ldots, Y_r f$, telles que parmi elles il y en ait $r-q$ indépendantes, et que l'on ait encore les relations

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f,$$

et l'isomorphisme est dit alors *mériédrique*.

Cette définition de l'isomorphisme ne semble pas l'analogue de la définition donnée par M. Jordan pour les groupes de substitutions. Les deux définitions sont cependant équivalentes, comme M. Sophus Lie le montre dans un Chapitre suivant.

Les constantes c_{iks} qui définissent la structure d'un groupe sont, comme on l'a vu, liées par les relations

$$c_{iks} + c_{kis} = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{r} (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0$$

$$(i, k, j, s = 1, 2, \ldots, r).$$

A leur égard, M. Lie énonce le beau théorème suivant, dont la démonstration sera publiée dans la seconde partie de l'Ouvrage :

A tout système de constantes c_{iks} vérifiant les relations

précédentes correspondent r transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, *liées deux à deux par les relations*

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

c'est-à-dire formant un groupe de la structure c_{iks}.

L'auteur montre enfin que la recherche de toutes les structures possibles de groupes à r paramètres est un problème purement algébrique, et indique une marche à suivre pour résoudre ce problème dans chaque cas particulier.

IV. A la théorie des groupes de transformations se rattachent plusieurs théories intéressantes que nous allons passer en revue.

C'est d'abord celle du groupe adjoint d'un groupe donné [1]. Considérons un groupe à r paramètres

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il résulte de considérations développées à la fin des Chap. II et IV que, si l'on fait, dans la transformation infinitésimale de ce groupe

$$e_1 X_1 f + \ldots + e_r X_r f$$

le changement de variables

$$x'_i = f_i(x, a),$$

elle prend la forme

$$e'_1 X'_1 f + \ldots + e'_r X'_r f,$$

où

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x'_1, \ldots, x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

et où $e'_1, \ldots, e'_r$ sont donnés par des relations de la forme

$$e'_k = \sum_{j=1}^{r} \rho_{kj}(a_1, \ldots, a_r) e_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Ces équations définissent un groupe linéaire et homogène par rapport aux variables e. M. Lie lui donne le nom de *groupe adjoint du groupe proposé*. Ce groupe est engendré par r trans-

[1] Chap. XVI, p. 270.

formations infinitésimales qui sont

$$E_\mu f = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} c_{j\mu k} e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r),$$

où les constantes c_{iks} sont celles qui définissent la structure du groupe proposé. On a de plus les relations

$$(E_i E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} E_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui prouvent que le groupe donné et son groupe adjoint sont isomorphes. Le groupe adjoint a r paramètres essentiels, comme le groupe proposé, à moins que celui-ci ne contienne des transformations échangeables avec toutes ses transformations. On arrive donc à ce beau résultat qu'en général il existe un groupe linéaire d'une structure donnée, ou, autrement dit, qu'un groupe quelconque est isomorphe avec un certain groupe linéaire et homogène, et qu'en général l'isomorphisme est holoédrique.

Le groupe adjoint joue un rôle important dans les recherches théoriques sur les groupes. Voici à ce sujet quelques indications : on a vu comment l'expression $\Sigma e_k X_k f$ représente une transformation finie du groupe ; le groupe adjoint donne donc la loi suivant laquelle s'échangent les transformations du groupe, quand on y fait un changement de variables défini par l'une des transformations du groupe. M. Lie représente la transformation finie qui a pour symbole $\Sigma e_k X_k f$ par un point de coordonnées $e_1, \ldots, e_r$ dans l'espace à r dimensions. Les sous-groupes à m paramètres sont alors représentés par des multiplicités linéaires (*Ebene Mannigfaltigkeiten*) à m dimensions passant par l'origine des coordonnées. Le groupe adjoint définit un certain échange de ces multiplicités. Étant données deux de ces multiplicités, qui représentent deux sous-groupes à m paramètres, s'il existe une transformation du groupe adjoint qui change l'une de ces multiplicités dans l'autre, M. Lie dit que les deux sous-groupes appartiennent au même type. On a ainsi un mode de classification rationnelle des sous-groupes d'un groupe donné. M. Lie donne d'ailleurs une méthode pour déterminer les divers types de sous-groupes d'un groupe donné.

La considération du groupe adjoint a enfin l'avantage de permettre de déduire des propriétés des groupes linéaires certaines propriétés générales de tous les groupes. On en verra plus loin un bel exemple.

Nous avons indiqué plus haut la définition de deux groupes semblables. M. Lie donne au Chapitre XIX le moyen de reconnaître si deux groupes donnés à r paramètres et contenant le même nombre de variables sont semblables.

Une étude préliminaire montre que le problème revient au suivant :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse, par un changement de variables, transformer r transformations infinitésimales indépendantes du premier groupe en r transformations infinitésimales du second?

Une première condition nécessaire est que les deux groupes aient la même structure. Cette condition est suffisante toutes les fois qu'il n'existe aucune relation linéaire entre r transformations infinitésimales indépendantes de chacun de ces groupes : tel est le cas de deux groupes simplement transitifs. S'il n'en est pas ainsi, les conditions cherchées peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Soient $X_1 f, \ldots, X_r f$ r transformations infinitésimales indépendantes du premier groupe; on doit pouvoir choisir, parmi les transformations infinitésimales du second, r transformations infinitésimales indépendantes $Y_1 f, \ldots, Y_r f$, telles que :

1° Si on a les relations

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

on ait aussi

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r);$$

2° Si $X_1 f, \ldots, X_m f$ ne sont liés par aucune relation linéaire, $X_{m+1} f, \ldots, X_r f$ s'exprimant linéairement au moyen de $X_1 f, \ldots,$

$X_m f$ par les relations

$$X_{m+k} f = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n) X_\nu f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-m),$$

$Y_1 f, \ldots, Y_m f$ ne soient liées par aucune relation linéaire, et que $Y_{m+1} f, \ldots, Y_r f$ s'expriment au moyen de $Y_1 f, \ldots, Y_m f$ par des relations

$$Y_{m+k} f = \sum_{\nu=1}^{m} \psi_{k\nu}(y, \ldots, y_n) Y_\nu f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-m),$$

et que les équations

$$\varphi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n) - \psi_{k\nu}(y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, r-m \\ \nu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

soient compatibles et n'établissent aucune relation ni entre les variables $x_1, \ldots, x_n$ seules, ni entre $y_1, \ldots, y_n$ seuls.

L'auteur donne d'ailleurs, dans le cas où ces conditions sont remplies, les changements de variables les plus généraux qui permettent de passer de l'un des groupes à l'autre.

Dans le Chapitre XX, M. Lie traite le problème suivant :

Étant donné un groupe, trouver toutes les transformations infinitésimales échangeables avec chacune des transformations infinitésimales de ce groupe.

La solution dépend de l'intégration d'un système complet. Le résultat prend une forme tout à fait remarquable quand le groupe donné est un groupe simplement transitif. Les transformations infinitésimales cherchées sont alors toutes les transformations infinitésimales d'un second groupe simplement transitif ayant le même nombre de paramètres que le premier. La relation qui lie le premier groupe au second est réciproque, car le premier se compose aussi de toutes les transformations infinitésimales qui sont échangeables avec toutes celles du second. Aussi M. Lie appelle-t-il ces deux groupes *deux groupes simplement transitifs réciproques*. Ces deux groupes sont isomorphes.

Connaissant le groupe réciproque d'un groupe simplement transitif donné, on peut obtenir tous les systèmes complets qui admettent ce groupe : il suffit d'égaler successivement à zéro les

transformations infinitésimales qui définissent chacun des sous-groupes du groupe réciproque.

M. Lie montre encore, par des considérations géométriques très curieuses, comment, connaissant les équations finies d'un groupe simplement transitif, on peut obtenir sans intégration les équations finies du groupe réciproque.

La théorie des groupes réciproques joue un rôle remarquable dans la belle théorie donnée par M. Lie de l'intégration des systèmes complets qui admettent des transformations infinitésimales connues.

Le Chapitre suivant (¹) contient les propriétés du groupe des paramètres d'un groupe donné. Si les équations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe, il existe r fonctions

$$\varphi_k(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui donnent lieu aux identités

$$f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r) = f_i[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(a, b), \ldots, \varphi_r(a, b)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

M. Lie remarque que les r équations

$$a'_k = \varphi_k(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

définissent elles-mêmes un groupe de transformations des variables $a_1, \ldots, a_r$; c'est ce groupe que M. Lie appelle le *groupe des paramètres* du groupe proposé. Ce groupe est simplement transitif; ses transformations infinitésimales sont faciles à obtenir; enfin le groupe donné et son groupe des paramètres sont isomorphes, et l'isomorphisme est holoédrique.

M. Lie montre ensuite que, si deux groupes sont isomorphes (l'isomorphisme étant holoédrique), on peut toujours faire dans l'un d'eux un changement de paramètres, tel que les deux groupes aient le même groupe de paramètres; et réciproquement, quand deux groupes ont le même groupe de paramètres, ils ont même structure. Or, quand deux groupes ont le même groupe de paramètres, les transformations des deux groupes qui correspondent

(¹) Chap. XXI, p. 401.

aux mêmes valeurs des paramètres se correspondent de telle sorte qu'au produit de deux transformations de l'un des groupes correspond dans l'autre le produit des deux transformations correspondantes. De là résulte l'équivalence entre la définition de l'isomorphisme holoédrique donnée par M. Jordan et la définition adoptée par M. Sophus Lie. M. Lie montre d'ailleurs que l'équivalence des deux définitions a lieu aussi pour l'isomorphisme mériédrique.

Signalons encore une notion nouvelle introduite par M. Lie (1). M. Lie dit qu'un groupe est *systatique* quand toutes les transformations de ce groupe qui laissent invariant un point arbitrairement choisi laissent invariants tous les points d'une multiplicité contenant ce point. Les groupes qui ne sont pas systatiques sont dits *asystatiques*. Il résulte de cette définition que tout groupe systatique est non-primitif.

M. Lie donne le moyen de reconnaître si un groupe est systatique, quand on connaît les transformations infinitésimales de ce groupe, ou même quand on n'en connaît que les équations de définition.

Les groupes asystatiques offrent plusieurs particularités remarquables. Ainsi, quand on connaît les transformations infinitésimales d'un groupe asystatique, on peut toujours obtenir, sous forme finie, les équations du groupe; on peut aussi avoir, sous forme finie, les équations du groupe le plus général dans lequel le groupe asystatique donné est invariant.

V. Deux Chapitres (2) sont consacrés aux propriétés générales des groupes projectifs et linéaires. Le groupe projectif général à n variables a pour équations

$$x'_\nu = \frac{a_{1,\nu}x_1 + \ldots + a_{n,\nu}x_n + a_{n+1,\nu}}{a_{1,n+1}x_1 + \ldots + a_{n,n+1}x_n + a_{n+1,n+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Il a $n(n+2)$ transformations infinitésimales indépendantes qui sont

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad x_i\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

(1) Chap. XXIV, p. 497.

(2) Chap. XXVI, p. 554, et Chap. XXVII, p. 578.

C'est donc un groupe transitif. Ses sous-groupes les plus importants sont : le groupe linéaire général

$$x'_\nu = a_{1,\nu}x_1 + \ldots + a_{n,\nu}x_n + a_{n+1,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

qui est défini par les $n(n+1)$ transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

le groupe linéaire spécial, qui contient toutes les transformations du précédent pour lesquelles le déterminant $\Sigma \pm a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ est égal à un ; ses transformations infinitésimales peuvent s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} - x_k\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i \neq k = 1, 2, \ldots, n);$$

le groupe linéaire homogène général

$$x'_\nu = a_{1,\nu}x_1 + \ldots + a_{n,\nu}x_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les transformations infinitésimales sont

$$x_i\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

et le groupe linéaire homogène spécial qui contient toutes les transformations du précédent pour lesquelles le déterminant $\Sigma \pm a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ est égal à un ; il a pour transformations infinitésimales

$$x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} - x_k\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i \neq k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce dernier possède cette propriété fondamentale d'être isomorphe avec le groupe projectif général à $n-1$ variables, et l'isomorphisme est holoédrique.

M. Lie démontre que le groupe projectif général est un groupe simple ; au contraire, le groupe linéaire homogène général contient deux sous-groupes invariants qui sont le groupe linéaire homogène spécial et le groupe à un paramètre

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Enfin le groupe linéaire général contient trois sous-groupes invariants.

L'auteur établit ensuite que le groupe projectif général à n variables ne contient aucun sous-groupe ayant plus de $n(n+1)$ paramètres; il contient d'ailleurs une infinité de sous-groupes à $n(n+1)$ paramètres : ceux-ci se composent soit de toutes les transformations qui laissent un point invariant, soit de toutes celles qui laissent invariante une multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions. M. Lie en conclut que le groupe projectif général est primitif et asystatique.

Le groupe linéaire général possède cette propriété remarquable que toutes ses transformations laissent invariante la multiplicité linéaire (à $n-1$ dimensions) de l'infini. M. Lie en déduit un moyen de classer ses sous-groupes d'après la loi suivant laquelle leurs transformations échangent les points de cette multiplicité. Les seuls sous-groupes pour lesquels cette loi soit donnée par un groupe à n^2-1 paramètres sont le groupe linéaire spécial, et tous les sous-groupes qui appartiennent au même type que le groupe linéaire homogène général, ou que le groupe linéaire homogène spécial.

M. Lie montre enfin comment la détermination de tous les groupes linéaires homogènes à n variables peut s'effectuer, aussitôt que l'on connaît tous les groupes projectifs à $n-1$ variables.

Dans le Chapitre suivant, l'auteur étudie les groupes linéaires homogènes, en se plaçant à un point de vue nouveau. Il considère $x_1, \ldots, x_n$ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace à $n-1$ dimensions : alors à chaque transformation linéaire homogène entre les variables $x_1, \ldots, x_n$ correspond une transformation projective entre les variables $\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$.

M. Lie démontre d'abord que toute transformation infinitésimale linéaire homogène laisse invariants une série de points et une série de multiplicités linéaires à $n-2$ dimensions. D'où cette conséquence que toute transformation infinitésimale linéaire homogène peut se mettre sous la forme canonique

$$a_{1,1}x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+(a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+(a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n};$$

ce que M. Lie interprète de la manière suivante :

Toute transformation infinitésimale projective de l'espace à

$n-1$ dimensions laisse invariants au moins un point, au moins une droite passant par ce point, au moins une multiplicité linéaire à deux dimensions passant par cette droite, et ainsi de suite.

L'auteur étudie ensuite une classe particulière de groupes linéaires homogènes, ceux dont les transformations infinitésimales sont liées par des relations de la forme suivante

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{iks} X_s f \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, r-1 \\ k = 1, 2, \ldots, r-i \end{pmatrix}.$$

Ces groupes laissent invariants au moins un point, au moins une droite passant par ce point, et ainsi de suite.

Ces recherches ont une grande importance, parce qu'elles conduisent, par l'intermédiaire du groupe adjoint, à des propriétés générales des groupes de transformations. C'est ainsi que M. Sophus Lie arrive à ce beau résultat que tout sous-groupe à un paramètre d'un groupe donné est contenu dans au moins un sous-groupe à deux paramètres; et que tout sous-groupe à deux paramètres est contenu dans au moins un sous-groupe à trois paramètres; tandis qu'un sous-groupe à trois paramètres peut n'être contenu dans aucun sous-groupe à quatre paramètres. M. Lie donne encore d'autres applications des résultats précédents, en étudiant certains groupes d'une structure particulière.

Nous indiquerons, en terminant, les résultats et les principes généraux donnés par M. Sophus Lie sur la détermination générale des groupes.

Au Chapitre XXII, l'auteur s'occupe du problème suivant :

Connaissant un groupe à r paramètres, trouver tous les groupes à r paramètres qui ont la même structure.

M. Lie considère d'abord les groupes transitifs et montre qu'on peut les obtenir tous, rien que par l'intégration d'équations différentielles ordinaires. La méthode donnée par l'auteur est fondée sur les propriétés du groupe des paramètres d'un groupe donné, ainsi que sur celles des groupes simplement transitifs réciproques.

Quant aux groupes intransitifs, on les obtient tous sans nouvelles intégrations aussitôt que l'on connaît les groupes transitifs à $1, 2, \ldots, r$ paramètres.

Dans le Chap. XXVIII, l'auteur aborde le problème plus difficile de la détermination de tous les groupes de transformations

à n variables. M. Lie donne une méthode pour décomposer le problème en problèmes plus simples : elle est surtout avantageuse dans la recherche des groupes primitifs, et repose sur le théorème suivant :

Un groupe à r paramètres fait correspondre à chaque point de l'espace un groupe linéaire homogène qui donne la loi suivant laquelle les éléments linéaires qui passent par ce point sont échangés par toutes les transformations du groupe qui laissent le point immobile. Si le groupe donné est transitif, tous les groupes linéaires qui correspondent aux différents points appartiennent à un même type, c'est-à-dire qu'on peut transformer chacun de ces groupes en chaque autre par une transformation linéaire homogène.

On est donc conduit à ranger dans une même classe tous les groupes transitifs à n variables auxquels correspondent, d'après le mode précédent, des groupes linéaires homogènes appartenant au même type. On devra chercher d'abord tous les types de groupes linéaires homogènes à n variables; on prendra ensuite successivement chacun de ces types, et l'on déterminera les groupes appartenant à la classe correspondante. M. Lie indique une marche à suivre dans cette recherche; elle est fondée sur la considération des transformations infinitésimales des divers ordres. On a à résoudre successivement trois problèmes, dont deux n'exigent que des opérations algébriques, ou l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Enfin, dans le dernier Chapitre, M. Lie applique sa méthode à deux cas particuliers importants, et arrive à ce théorème remarquable :

Si un groupe transitif à n variables est tel, que toutes ses transformations qui laissent un point quelconque invariant transforment les éléments linéaires qui passent par ce point suivant le groupe linéaire homogène général ou le groupe linéaire homogène spécial, ce groupe est semblable au groupe projectif général, ou au groupe linéaire général, ou au groupe linéaire spécial.

E. Vessiot, W. de Tannenberg.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TISSERAND (F.). — TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE, t. I. In-4°, x-474 p. Gauthier-Villars et Fils, 1889.

L'immortel Ouvrage de Laplace est resté pendant 90 ans le seul Livre où les astronomes pussent s'initier aux méthodes de la Mécanique céleste. Cependant la Science s'est développée dans cette période, pendant laquelle les nombreux travaux de Gauss, Hansen, Bessel, Poisson, Hamilton, Jacobi, Cauchy, Le Verrier, Newcomb, Tisserand, Linstedt et tant d'autres, ont résolu une foule de points de détail et ouvert de nouveaux horizons. D'autre part, Laplace ne mentionne qu'en passant la méthode de la variation des constantes arbitraires, dont il ne s'est pas servi. Or, si cette méthode paraît, aujourd'hui, moins brève que d'autres pour le calcul des perturbations des astéroïdes, si elle ne s'est pas trouvée particulièrement avantageuse pour les théories des satellites, il est impossible d'oublier d'une part la simplicité et l'élégance de son exposition; d'autre part, le succès avec lequel elle a été appliquée par Le Verrier à la théorie des planètes principales. Une méthode qui a servi à édifier pour un grand nombre de siècles la théorie du système solaire ne doit-elle pas être la base d'un Ouvrage didactique consacré à la théorie des astres?

M. F. Tisserand l'a pensé; et, après vingt années d'études et de recherches, après plusieurs années d'enseignement pendant lesquelles il a eu occasion d'exposer à son auditoire de la Sorbonne les diverses théories, et a pu apprécier, nettement et en détail, la nature des difficultés, des obscurités qu'offre chacune d'elles, il présente au monde savant, aux astronomes et aux mathématiciens les plus exercés comme aux étudiants eux-mêmes un premier Volume qu'il suffit d'ouvrir pour apprécier l'étendue de la lacune que l'auteur a entrepris de combler.

Des vingt-neuf Chapitres qui composent ce Volume, il en est au moins quinze qui n'ont pas leurs analogues dans l'Ouvrage de Laplace et dont la connaissance est, cependant, indispensable à quiconque veut s'adonner à des recherches théoriques, faire des applications numériques à l'un des nombreux problèmes qu'offre

encore le Système du monde, ou seulement avoir quelque connaissance de l'état actuel de la Mécanique céleste. De plus, il est manifeste que les Tomes II et III seront plus riches encore de faits nouveaux, les théories mathématiques dont Laplace a jeté les bases à l'occasion de l'étude de la figure et des mouvements de rotation des corps célestes ayant reçu depuis de nombreux développements, et les diverses méthodes appliquées à la recherche des orbites de la Lune, des comètes et des petites planètes étant toutes d'invention récente.

La publication d'un grand Traité de Mécanique céleste était donc urgente. La génération actuelle et celle qui l'ont précédée ont dû étudier cette science, soit dans l'Ouvrage de Laplace, d'une lecture trop difficile, et qui n'en présentait plus un Tableau suffisamment complet, soit dans des Mémoires, disséminés partout, et dont le lien n'apparaissait qu'après de longs efforts, soit dans les théories mêmes des planètes et des satellites, où la marche analytique est trop souvent obscurcie par la longueur des calculs numériques. Combien de fois n'avons-nous pas entendu M. Tisserand lui-même exprimer le regret que notre illustre maître M. Puiseux n'ait pas entrepris d'écrire un nouveau Traité. Plus heureuse que les précédentes, la génération nouvelle aura entre les mains un magnifique Ouvrage, écrit de la façon la plus simple et la plus claire. De pareils Livres ne peuvent apparaître qu'à de longs intervalles; mais ils équivalent toujours à un important progrès scientifique, en élevant au rang de connaissances élémentaires, abordables à tous, des résultats scientifiques auparavant mal connus d'un trop grand nombre de travailleurs.

Les lecteurs du *Bulletin* nous sauront gré de leur donner, de la façon la plus brève qu'il nous sera possible de le faire, l'indication du contenu de ce premier Volume.

Dans une Introduction qui est un modèle de clarté, l'auteur, en vingt-trois pages, partant du principe de d'Alembert, démontre celui d'Hamilton, en déduit les équations de Lagrange, les équations et le théorème d'Hamilton, le théorème réciproque et les relations de Jacobi. Il est indispensable que les principes les plus généraux et les plus féconds passent dans l'enseignement élémentaire; M. Tisserand, en fondant son Ouvrage sur les méthodes d'Hamilton et de Jacobi, a donné un exemple qui devra être suivi.

Le Chapitre I (26 pages) est consacré à la loi de Newton. Après avoir déduit, comme à l'ordinaire, la loi de Newton des lois de Kepler et inversement, et s'être élevé à la loi de gravitation universelle par la considération des comètes, des systèmes secondaires, et par la comparaison du mouvement de la Lune à la pesanteur à la surface de la Terre, l'auteur recherche, par la méthode de M. Halphen, la force qui ferait décrire une ellipse au satellite de l'étoile principale d'une étoile double, en supposant cette force indépendante de la vitesse. Il examine, d'après M. Bertrand, quelle force d'attraction, fonction seulement de la distance, peut faire décrire à une planète autour du Soleil une courbe fermée quelles que soient les conditions initiales. Enfin il démontre, d'après Newton, que si l'exposant de la loi d'attraction différait de deux, même très peu, le périhélie aurait à chaque révolution un mouvement incompatible avec les observations.

Dans le Chapitre II (13 pages), relatif à l'attraction d'un corps sur un point éloigné, on trouve l'équation de Laplace, le potentiel d'une couche sphérique homogène, la réduction au centre de gravité de l'attraction d'un corps sur un point éloigné, et la décomposition du système solaire en systèmes partiels formés l'un du Soleil et chacun des autres de l'ensemble d'une planète et de ses satellites, le problème des mouvements étant ramené à la recherche du mouvement des centres de gravité de ces systèmes et des mouvements relatifs dans chacun d'eux.

Les Chapitres III (13 pages), IV (10 pages), V (6 pages) renferment les équations différentielles des mouvements des centres de gravité, et les intégrales connues, ainsi qu'une formule intéressante due à Jacobi. M. Tisserand donne successivement les équations des mouvements absolus et celles des mouvements par rapport au Soleil en coordonnées rectangulaires, la forme symétrique de ces équations à laquelle on parvient par une certaine substitution orthogonale, la transformation des équations en coordonnées polaires, celle que l'on obtient en prenant pour inconnues la tangente de la latitude et l'inverse de la projection du rayon vecteur sur le plan des xy, enfin les équations d'Airy.

Envisageant d'abord le problème de deux corps, M. Tisserand en donne la solution complète, d'abord par la méthode ordinaire (Chap. VI, 30 p.), en insistant sur les intégrales de Laplace, puis

par la méthode de Jacobi (Chap. VII, 5 p.). Il a étudié successivement les orbites elliptiques, paraboliques, hyperboliques, démontré, pour le second cas, le théorème d'Euler et déterminé les éléments d'une orbite elliptique ou parabolique en supposant connues la position et la vitesse de l'astre à une date donnée; il démontre que l'hodographe d'Hamilton est un cercle.

Le Chapitre VIII (21 pages) est tiré de l'admirable Mémoire de Lagrange sur le problème des trois corps. M. Tisserand insiste sur le cas où les distances mutuelles conservent des rapports constants, cas dans lequel l'intégration peut être faite complètement; sur le problème relatif aux distances et aux vitesses qu'auraient dû avoir le Soleil, la Terre et la Lune supposées placées primitivement en ligne droite pour que cette condition fût toujours remplie. Laplace a montré que le problème a une solution; mais Liouville a fait voir que les pertubations auraient rendu cette disposition instable. En raison de l'importance du sujet, M. Tisserand cite à la fin du Chapitre les principaux Mémoires qui lui ont été consacrés.

Les Chapitres IX (14 pages) et X (16 pages) renferment l'exposé, d'après la méthode de Jacobi et d'après celle de Lagrange, de la méthode de la variation des constantes arbitraires. On y trouve la définition des éléments osculateurs et des perturbations des éléments et des coordonnées.

Le Chapitre XI (17 pages) est consacré à la définition de perturbations des divers ordres, des inégalités périodiques, des inégalités séculaires, des inégalités à longue période, à la modification introduite par Poisson dans la théorie de la Lune au procédé ordinairement suivi pour le calcul des perturbations des divers ordres, modifications que l'on applique ordinairement même à la théorie des planètes, et dans laquelle on tient compte, dès la première approximation, de certains termes du second ordre.

Les Chapitres suivants servent de préparation au développement de la fonction perturbatrice. Le Chapitre XII (9 pages) contient une théorie rapide des fonctions J_n de Bessel. Dans le Chapitre XIII (13 pages), ces fonctions servent à obtenir certains développements en séries utiles dans le mouvement elliptique. Le Chapitre XIV (21 pages) donne des développements de même sorte par la méthode indiquée par Cauchy pour passer du développement

trigonométrique d'une fonction finie et continue de l'anomalie excentrique, ayant pour période 2π, au développement de la même fonction en sinus ou cosinus de l'anomalie moyenne; on y trouve la définition et le calcul des nombres de Cauchy. A la fin du Chapitre, M. Tisserand, après avoir démontré une formule symbolique publiée antérieurement par lui pour le développement d'une fonction finie et bien déterminée du rayon vecteur, indique certains développements donnés par Le Verrier dans le Tome I des *Annales de l'Observatoire de Paris*. Le Chapitre XV (13 pages) est un résumé du Mémoire de Hansen sur le développement des fonctions $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mw$, $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mw$, du rayon vecteur et de l'anomalie vraie. Dans le Chapitre XVI se trouve l'étude, d'après la méthode de M. Rouché, de la limite de convergence du développement de l'anomalie excentrique, un résumé de la démonstration de Laplace et des indications sur des expressions asymptotiques des coefficients données par Laplace, Carlini, Jacobi, Callandreau, etc.

Le Chapitre XVII (22 pages) se rapporte au développement de $(a^2+a'^2-2aa'\cos\psi)^{-s}$ en une série trigonométrique. On ramène le développement à celui de $(1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi)^{-s}$ sous la forme $\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\beta_s^{(i)}\cos i\psi$. Après avoir établi l'expression générale de $\beta_s^{(i)}$ en série et sous forme d'intégrale définie, l'auteur donne les relations récurrentes qui existent entre des fonctions $\beta_s^{(i)}$ contiguës, la représentation de ces fonctions au moyen de séries hypergéométriques, un procédé de Hansen pour le calcul de ces fonctions, le moyen de calculer leurs dérivées des divers ordres, et rappelle en terminant l'énoncé d'un théorème relatif à la limite de $\frac{\alpha^p}{1.2\ldots p}\frac{d^p\beta_s^{(i)}}{d\alpha^p}$ quand p croît indéfiniment.

Le développement même de la fonction perturbatrice est exposé en 29 pages dans le Chapitre XVIII, en tout conforme aux indications de Le Verrier; l'inclinaison mutuelle des orbites y est introduite au lieu de leurs inclinaisons sur un plan fixe; cette circonstance impose une certaine transformation des différentielles des éléments elliptiques expliquée dans le Chapitre XIX (10 pages).

Les Chapitres XX (20 pages) et XXI (9 pages) renferment les expressions analytiques des perturbations du premier ordre des éléments et des coordonnées. Le premier de ces Chapitres se termine par la définition précise de l'unité de la longueur employée. Pour les exemples d'applications numériques, l'auteur renvoie aux travaux de Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris*). Le Chapitre XXII (15 pages) donne explicitement les premiers termes des perturbations périodiques, en s'en tenant aux premières puissances des excentricités et des inclinaisons.

La méthode suivie par Le Verrier pour arriver à la découverte de Neptune et l'histoire de cette découverte font l'objet du Chapitre XXIII (13 pages).

Le Chapitre XXIV (4 pages) donne les expressions générales des inégalités du second ordre par rapport aux masses.

Les trois Chapitres suivants se rapportent aux inégalités séculaires. Le Chapitre XXV (13 pages) contient la démonstration si élégante due à M. Tisserand du théorème de Poisson sur l'invariabilité des grands axes : ce Chapitre se termine par quelques renseignements historiques sur le sujet. Le Chapitre XXVI (27 pages) donne les expressions générales des inégalités séculaires, auxquelles on parvient en négligeant dans les fonctions perturbatrices les termes du quatrième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons; l'auteur, après avoir reproduit l'analyse de Lagrange et la démonstration de Laplace relative à la réalité des racines de l'équation qui sert de base à cette théorie, explique les travaux de Le Verrier sur le même sujet, et termine par d'importantes remarques sur la stabilité du système solaire. Le Chapitre XXVII (12 pages) est un exposé de la méthode de Gauss pour le calcul des inégalités séculaires; l'auteur a tenu compte des simplifications indiquées par M. Halphen.

Le Chapitre XXVIII (18 pages) est l'exposé de remarquables recherches de M. Tisserand sur le développement de la fonction perturbatrice lorsque l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable; c'est dans ce développement que se présente la fonction $R_{i,j}^{(n)}$ de $\sin^2\frac{J}{2}$ et de $\cos^2\frac{J}{2}$ que M. Tisserand a réussi à mettre sous la forme du carré d'une suite hypergéométrique.

Enfin le Chapitre XXIX (14 pages) donne la transformation

de Hansen pour les équations différentielles des mouvements des planètes.

L'analyse précédente, nécessairement incomplète, montre assez quelle richesse de matériaux se rencontre dans ce beau Volume. La plus grande partie de l'Ouvrage intéresse non seulement les astronomes, mais tous les mathématiciens. Il y a là une foule de choses que tout le monde doit connaître. La publication du nouveau *Traité de Mécanique céleste* aura pour résultat de dissiper les appréhensions qu'ont trop longtemps éprouvées ceux qui, dans le passé, ont voulu étudier cette Science. Il sera possible, même aux étudiants, d'acquérir en quelques mois un ensemble très complet de connaissances suffisantes. Ceux qui voudront approfondir tel ou tel point particulier trouveront dans l'Ouvrage même les plus utiles renseignements bibliographiques.

La remarquable exécution typographique du Livre ne surprendra personne : l'imprimerie Gauthier-Villars nous a depuis longtemps habitués à ne voir sortir de ses presses que des chefs-d'œuvre.

B. B.

E. GOEDSEELS. — Théorie des surfaces réglées, précédée de la démonstration des propriétés principales des limites et des infiniment petits. Louvain, Fonteyn. Un vol. in-8° de 76 pages.

Introduction. — Théorie des limites et des infiniment petits à peu près comme dans Duhamel, *Calcul infinitésimal*, avec les mêmes qualités et les mêmes défauts. Le théorème lim(arc : corde) $= 1$ n'est démontré rigoureusement que pour un arc convexe ou ayant sur un plan une projection convexe.

I. *Surfaces réglées, en général.* — L'auteur établit d'abord rigoureusement que, si en un point A d'une génératrice une courbe AM de la surface a une tangente AT, le plan de la génératrice et de AT contient la tangente AT′ à toute autre courbe AM′ passant par le point A; autrement dit, il démontre l'*existence du plan tangent* à la surface. Il prouve ensuite que, s'il existe un plan tangent en trois points d'une génératrice, il a aussi un plan tangent en un quatrième point quelconque. (Cette démonstration a déjà paru dans *Mathesis*, t. III, p. 49 et suivantes, 1883.)

On a d'ailleurs

$$\cot\delta = \frac{P}{d} + \cot\Delta, \tag{1}$$

d étant la distance de deux points A et D sur une génératrice, P une constante, δ la limite de l'angle $D''DD'$ ($A'D'$ est une génératrice voisine de AD, $A'D''$ une parallèle à AD, DD'' une parallèle à AA'; AA' la sécante d'une courbe AM, ayant pour limite la tangente AT en A à AM), Δ la limite du supplément de $DD''D'$. Si le plan tangent est le même en D et en A, $\cot\delta = 0$: donc $P = \infty$, *ou* $\cot\Delta = \infty$, ou encore $P = \infty$ *et* $\cot\Delta = \infty$. Dans les deux cas, le plan tangent est le même tout le long de la génératrice et la surface est dite développable. On peut prouver d'ailleurs que les cylindres et les cônes, auxquels la formule (1) n'est pas applicable, ont aussi mêmes plans tangents, tout le long de la génératrice. Les surfaces *réglées* se divisent donc en deux classes, celles qui ont un plan tangent unique le long de la génératrice, et celles pour lesquelles le plan tangent est variable.

II. *Surfaces gauches.* — 1. Théorème de Hachette (raccordement de deux surfaces gauches). 2. Le plan tangent à l'infini est la limite du plan passant par une génératrice et parallèle à une génératrice qui se rapproche indéfiniment de la première (cône asymptotique). 3. Existence du point central ou point de contact du plan tangent perpendiculaire au plan tangent à l'infini. Loi de distribution des plans tangents ou théorème de Chasles. 4. Le point central est la limite du pied de la plus courte distance de deux génératrices dont la seconde tend indéfiniment vers la première.

III. *Surfaces développables.* — Essai d'une exposition rigoureuse de la théorie du développement des surfaces réglées à plan tangent unique le long de chaque génératrice. L'auteur considère le développement d'un polyèdre circonscrit à la surface et tâche d'en déduire la théorie de la surface même, ce qui n'a pas encore été fait jusqu'à présent. L'essai est imparfait, mais les difficultés du sujet sont au moins bien mises en lumière.

Appendice. — Application des principes du second Chapitre au paraboloïde hyperbolique.

JOAQUIN DE MENDIZABAL TAMBORREL, Professeur d'Astronomie et de Géodésie à l'École militaire de Mexico, etc. — NOUVELLES TABLES DE LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS DEPUIS 1 JUSQU'A 125000 ET DES FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES, DE MICROGONIO EN MICROGONIO, ET LES VALEURS DE CETTE MÊME FONCTION DE CENTIMILIGONIO EN CENTIMILIGONIO, DEPUIS ZÉRO JUSQU'A 12500 POUR L'INGÉNIEUR GÉOGRAPHE.

L'auteur propose de désigner par le mot *gonio* du grec γωνία, l'angle égal à quatre angles droits, qu'il prend pour unité, d'après M. Yvon Villarceau.

Pour suivre entièrement dans sa terminologie le système décimal adopté pour les mesures des longitudes, poids, etc., il propose de donner aux sous-multiples de l'unité les noms de

(0,1)	(0,01)	(0,001)	(0,00001)	(0,000001)
decigonio,	*centigonio,*	*miligonio,*	*centimiligonio,*	*microgonio.*

La première Partie des Tables, contenant 120 pages, renferme vers la gauche la partie décimale, avec huit chiffres, des logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 125000 et à droite les valeurs des fonctions goniométriques de *centimiligonio* en *centimiligonio,* avec six décimales, depuis 0 jusqu'à 12500. La deuxième Partie, qui renferme 250 pages, comprend, avec huit chiffres décimaux, les logarithmes du sinus, cosinus, tangente et cotangente de *centimiligonio* en *centimiligonio,* et avec sept chiffres de *microgonio* en *microgonio*.

SCHOENFLIES (A.). — GEOMETRIE DES BEWEGUNG IN SYNTHETISCHER DARSTELLUNG. 1 vol. in-8°, VI-194 p. Teubner, 1886.

Ceux qui aiment les exposés systématiques, où l'on reste toujours dans le même ordre d'idées, où tout résulte d'une même méthode, aussi remarquable par sa puissance que par sa simplicité, liront avec un vif plaisir le petit Livre où M. Schoenflies développe les principaux résultats de cette théorie géométrique du mouvement d'un corps solide qui, depuis les Mémoires classiques de Chasles, de Poinsot et de M. Mannheim, a donné lieu à tant de travaux intéressants, sans que la matière soit encore épuisée.

Le mode d'exposition de M. Schoenflies repose essentiellement sur les propositions élémentaires de la Géométrie synthétique, dont il est fait un usage continuel, ainsi qu'on en est prévenu par le titre, sur la considération des déplacements finis qui donne lieu à un très grand nombre de propositions élégantes, lesquelles se traduisent facilement lorsqu'on a affaire à un mouvement continu, enfin sur cette remarque essentielle, que Chasles avait déjà mise en pleine lumière dans l'*Aperçu historique*, mais dont on n'avait point encore autant tiré parti : à tout mouvement d'un système de forme invariable Σ défini par rapport au système invariable Σ_0 correspond le mouvement du système Σ_0 par rapport au système Σ, l'un ou l'autre des deux systèmes pouvant être regardé comme fixe suivant qu'on observe le mouvement d'un système ou de l'autre.

L'ordre adopté est d'ailleurs l'ordre classique : mouvement d'un plan mobile sur un plan fixe, ou d'un système de forme invariable dont un plan coïncide constamment avec un plan fixe, mouvement d'un système invariable qui a un point fixe, mouvement le plus général d'un système de forme invariable.

La considération de deux positions du plan mobile fait correspondre un point de la première figure à un point de la seconde : c'est une correspondance homographique (avec affinité); il n'y a qu'un point double à distance finie : c'est le centre de rotation. Cette notion conduit d'ailleurs à la représentation de tout mouvement de ce genre par le roulement d'une courbe plane sur une autre courbe plane.

La considération de trois positions du plan mobile permet de faire correspondre à chaque point A de ce plan le centre A' du cercle circonscrit au triangle formé par ses trois positions; dans le mouvement inverse, le point A correspond au point A' comme dans le mouvement direct le point A' au point A. Cette correspondance est quadratique. Dans le mouvement continu, elle se traduit par la correspondance entre chaque point du plan et le centre de courbure de sa trajectoire. Son étude conduit à la notion du cercle des inflexions, à la construction de Savary pour les centres de courbure, etc.

La considération de quatre positions du plan mobile conduit à ce problème : quels sont les points de ce plan tels que leurs quatre

positions soient sur un même cercle? Ils sont situés sur une cubique passant par les six centres de rotation et les deux points à l'infini communs à tous les cercles du plan. Cette proposition se traduit par un théorème analogue relatif aux points du plan qui est à un moment donné en contact stationnaire avec leur cercle osculateur.

L'étude du mouvement d'un corps solide donne lieu à une étude parallèle à celle que nous venons d'esquisser. Nous la laissons de côté pour dire quelques mots de la façon dont l'auteur présente la théorie du mouvement le plus général d'un corps solide.

Si l'on considère deux positions σ_1, σ_2 d'un tel corps σ, et en particulier deux positions A_1, A_2 d'un même point A, on désigne sous le nom de corde du point A le segment $A_1 A_2$ et sous le nom de plan normal du point A le plan perpendiculaire à cette corde en son milieu A^m. Soient g une droite de σ, g_1, g_2 les deux positions de cette droite ; les milieux des cordes des points de g sont situés sur une droite g^m ; on peut amener g de g_1 en g_2 par une rotation autour d'une droite g^v. Les projections des cordes des points de g sur g^m sont toutes égales ; si l'une d'elles est nulle, toutes le sont. Si l'on considère un plan ε de σ, les milieux des cordes de ses points sont dans un plan ε_m. Il y a un point de ε, tel que sa corde sort perpendiculaire sur ε_m. Si à chaque point A de σ on fait correspondre d'une part le milieu A^m de sa corde, de l'autre son plan normal α^v, on établira par cela même une correspondance entre un point A^m et un plan α^v, et l'on formera ainsi deux systèmes correspondants Σ^m et Σ^v qui ensemble constituent un *Nullsystem* ; les droites g_m, g^v définies plus haut sont telles que les plans normaux des points de l'une passent par l'autre.

On sait ce que deviennent, dans le mouvement continu, toutes ces propositions, que l'introduction du mouvement hélicoïdal vient d'ailleurs compléter. A cette introduction se relie celle des deux surfaces, lieux des axes de Meozzi dans le système fixe et dans le système mobile. M. Schoenflies reprend ensuite, dans le cas du mouvement continu, l'étude du complexe linéaire des droites normales aux trajectoires de leurs points, des propriétés qui concernent les foyers et les caractéristiques des plans, les plans et points centraux des droites regardées comme génératrices des surfaces

réglées qu'elles engendrent, etc. L'ensemble des tangentes aux trajectoires décrites à un instant donné par les points d'un système solide, ou des caractéristiques de tous les plans, constitue un complexe tétraédral dont M. Schoenflies développe les propriétés les plus essentielles. Le lieu des points pour lesquels les tangentes passent par un même point est situé sur une cubique gauche qui rencontre le cercle de l'infini aux mêmes points que le plan perpendiculaire à l'axe du mouvement hélicoïdal. Cette courbe, que l'auteur appelle *cercle cubique*, a des propriétés intéressantes, ainsi que la figure, correspondante par dualité, qui est formée par les plans dont les caractéristiques sont situées dans un même plan.

La considération de trois positions d'un corps solide permet de faire correspondre à chaque point du corps l'axe du cercle passant par les trois positions de ce point. L'ensemble de toutes ces droites forme encore un complexe tétraédral, qui devient le complexe des axes des cercles osculateurs dans le cas du mouvement continu. A l'étude de ce complexe se relie l'étude des points du corps qui coïncident avec des points d'inflexion de leurs trajectoires.

La considération de quatre positions du corps permet de faire correspondre à chaque point A le centre A' de la sphère passant par les quatre positions A_1, A_2, A_3, A_4 du point. On a là affaire à une transformation cubique. Si les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sont en ligne droite, le point A est situé sur une surface du troisième ordre, etc. Si l'on considère cinq positions du corps, il faudra, pour que les cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 soient dans un même plan, que le point A appartienne à une certaine courbe du sixième ordre ; si l'on considère six positions, il y aura en général dix points A, tels que les six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 appartiennent à un même plan. L'auteur développe une suite de propositions de ce genre.

C'est, on le voit, au cas du mouvement d'un corps solide dont les paramètres qui en définissent la position ne dépendent que d'une variable qu'est consacrée la plus grande partie du Livre. Celui-ci se termine par quelques indications générales sur les cas où il n'en est pas ainsi et par l'étude suffisamment détaillée du cas où les points du corps solide décrivent des surfaces. Enfin M. Schoen-

flies traite brièvement, à titre d'exemples, de quelques mouvements particuliers. Assurément, ces exemples auraient pu être singulièrement multipliés; mais l'auteur réservait sans doute ce genre de développements, qui aurait nui à l'homogénéité de son Livre, pour un autre Ouvrage, sur les mécanismes, qu'il nous promet à la fin de sa Préface. Espérons qu'il ne tardera pas à tenir cette promesse : un pareil Ouvrage traité avec l'esprit géométrique que M. Schoenflies a montré dans ses diverses publications ne peut manquer d'être très intéressant. J. T.

MÉLANGES.

SUR UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES SURFACES;

PAR M. L. RAFFY.

Il y aurait intérêt, pour la théorie des surfaces, à connaître tous les éléments linéaires réductibles d'une infinité de manières à la forme de Liouville

$$[\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy.$$

Parmi ces éléments linéaires, une classe remarquable est formée de ceux qui correspondent à des surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Nous nous proposons ici de les déterminer tous.

Le problème revient, comme on sait (¹), à *trouver toutes les solutions de l'équation indéterminée*

$$2X\frac{d^2\lambda}{dx^2} + 3X'\frac{d\lambda}{dx} + X''\lambda = 2Y\frac{d^2\lambda}{dy^2} + 3Y'\frac{d\lambda}{dy} + Y''\lambda,$$

en prenant pour λ *une fonction de* $x+y$ *seulement*. Dans cette équation, X et Y sont deux fonctions inconnues, l'une de x, l'autre de y; X', X'', Y', Y'' désignent les dérivées de ces fonctions.

(¹) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 208-209.

D'après l'hypothèse faite sur λ, l'équation devient

$$(1) \qquad 2(X-Y)\frac{d^2\lambda}{dt^2}+3(X'-Y')\frac{d\lambda}{dt}+(X''-Y'')\lambda=0 \qquad (t=x+y).$$

Désignant désormais par des accents les dérivées prises par rapport à t, nous poserons

$$l=\frac{\lambda'}{\lambda},$$

ce qui donne, en divisant par λ,

$$(2) \qquad F=2(X-Y)(l'+l^2)+3(X'-Y')l+X''-Y''=0.$$

Remarquons que l'expression générale de la courbure totale

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial x\,\partial y},$$

qui correspond à l'élément linéaire $2\lambda\,dx\,dy$, se réduit ici à

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{\lambda}\frac{d^2\log\lambda}{dt^2}=-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)'.$$

Ainsi, en vertu de la définition de l, nous avons

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{l'}{\lambda}.$$

Cela posé, égalons à zéro la dérivée $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$; nous trouvons

$$(3) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=2(X-Y)(l'+l^2)''+(X'-Y')[2(l'+l^2)'+3l'']+3(X''-Y'')l'=0.$$

L'équation (3) peut être une identité, ou se confondre avec l'équation (2) ou en être distincte. La première hypothèse revient à $l'=0$; c'est le cas des surfaces développables.

Si les deux équations sont identiques, c'est qu'on a

$$3l'(l'+l^2)=(l'+l^2)'', \qquad 9ll'=3l''+2(l'+l^2)'.$$

La seconde de ces relations n'est autre que

$$(4) \qquad l''=ll',$$

et l'on voit sans peine que la première en est une conséquence. Cette relation (4) caractérise les surfaces à courbure constante. Pour que la courbure soit constante, il faut et il suffit en effet

que la dérivée de $l':\lambda$ soit nulle, d'où

$$\lambda l'' = \lambda' l'.$$

Mais, comme nous avons posé

$$\lambda' = \lambda l,$$

cette condition revient précisément à

$$l'' = ll'.$$

L'intégration de l'équation (4) est d'ailleurs facile et donne, en désignant par h, l et m trois constantes arbitraires,

$$\lambda = \frac{1}{(le^{ht} - me^{-ht})^2}.$$

En faisant tendre h vers zéro, on trouve aisément (avec $l = m$)

$$\lambda\, dx\, dy = \frac{P_1\, dx\, dy}{(x+y)^2}, \qquad P_1 = \text{const.},$$

ce qui est la forme la plus simple de l'élément linéaire des surfaces à courbure constante.

Il faut maintenant supposer distinctes les deux équations

$$(2) \qquad 2(X - Y)(l' + l^2) + 3(X' - Y')l + X'' - Y'' = 0,$$

$$(3) \qquad 2(X - Y)(l' + l^2)'' + (X' - Y')[2(l' + l^2)' + 3l''] + 3(X'' - Y'')l' = 0.$$

Si l'on exclut l'hypothèse $l' = 0$, qui correspond aux surfaces développables, on voit que ces deux équations contiennent toujours $X'' - Y''$ et que la première au moins contient $X' - Y'$. Mais il pourrait se faire que $X - Y$ n'y figurât pas. C'est ce qui a lieu dans l'hypothèse

$$l' + l^2 = 0$$

et alors seulement. On déduit de là

$$\left(\frac{1}{l}\right)' = 1, \qquad \frac{1}{l} = \frac{\lambda}{\lambda'} = t - t_0,$$

et, par suite, P étant une nouvelle constante arbitraire,

$$(5) \qquad \lambda = P(t - t_0).$$

Ainsi λ est une fonction linéaire de $x + y$. Dans ce cas, les

équations (2) et (3) deviennent

$$3(X'-Y')l + X''-Y'' = 0,$$
$$(X'-Y')l' + (X''-Y'')l = 0;$$

et, comme leur déterminant

$$3l^2 - l' = 4l^2$$

est différent de zéro, elles entraînent

$$X'-Y' = 0, \qquad X''-Y'' = 0.$$

Les dérivées X', Y', étant égales, ont une valeur constante γ, et il vient

$$X = \gamma(x - x_0), \qquad Y = \gamma(y - y_0),$$

γ, x_0 et y_0 étant arbitraires. Telles sont les expressions de X et de Y dans le cas particulier où λ est du premier degré.

Passons au cas général. Entre les équations (2) et (3) éliminons $X''-Y''$; nous obtenons une relation linéaire et homogène en $X-Y$ et $X'-Y'$

$$2(X-Y)[3l'(l'+l^2) - (l'+l^2)''] + (X'-Y')[9ll' - 2(l'+l^2)' - 3l''] = 0.$$

Cette relation n'est pas une identité, puisque les équations (2) et (3) sont supposées distinctes : ainsi le coefficient de $X-Y$ et celui de $X'-Y'$ ne sont pas nuls tous les deux. Or nous avons vu plus haut que, quand le coefficient de $X'-Y'$ est nul, celui de $X-Y$ l'est aussi. D'autre part, on ne peut pas supposer que le coefficient de $X-Y$ soit seul nul ; car alors $X'-Y'$ serait nul, X' et Y' seraient constants, $X''-Y''$ serait nul, et les équations (2) et (3) exigeraient qu'on eût

$$(X-Y)(l'+l^2) = 0.$$

L'hypothèse $l'+l^2 = 0$ ramène au cas précédent; l'hypothèse $X-Y=0$ revient à $X=Y=$ const., ce qui ne donne rien. En conséquence, $X-Y$ et $X'-Y'$ figurent effectivement dans l'équation, et l'on en tire

$$\frac{X'-Y'}{X-Y} = 2G,$$

G désignant une fonction de $x+y$ seulement, comme les coefficients des équations (2) et (3). Ce résultat peut se mettre sous

une autre forme, savoir

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(X-Y)=G(t),$$

en prenant pour un instant comme nouvelles variables

$$t=x+y, \qquad z=x-y.$$

Il suit immédiatement de là que $\log(X-Y)$ est de la forme

$$\psi(x+y)+\chi(x-y),$$

et nous sommes conduit à ce problème : *Trouver toutes les solutions de l'équation indéterminée*

$$X-Y=\psi(x+y)\chi(x-y). \tag{6}$$

Le premier membre est une fonction de x plus une fonction de y; donc sa dérivée seconde prise par rapport à x et à y est nulle. Exprimons cette condition

$$\frac{\partial^2(\psi\chi)}{\partial x\,\partial y}=0;$$

nous trouvons

$$\chi\psi''-\psi\chi''=0.$$

Si l'on exclut l'hypothèse $X=$ const., $Y=$ const., qui ne donne rien, on pourra diviser par le produit $\psi\chi$ et écrire

$$\frac{\psi''}{\psi}=\frac{\chi''}{\chi}=\text{const.}=h^2. \tag{7}$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que la constante h est nulle ou différente de zéro. Si $h=0$, les fonctions ψ et χ sont du premier degré

$$\psi=\alpha(x+y-a-b), \qquad \chi=\beta(x-y-a+b).$$

Portant ces valeurs dans l'identité (6), on trouve

$$X-Y=\alpha\beta\,[(x-a)^2-(y-b)^2],$$

ce qui donne, en désignant par c le produit $\alpha\beta$,

$$X=\gamma+c(x-a)^2, \qquad Y=\gamma+c(y-b)^2,$$

les constantes a, b, c, γ étant arbitraires. La fonction λ se déterminera en substituant ces expressions dans l'équation (1).

Comme on a

$$\begin{aligned} X - Y &= c(x - y - a + b)(x + y - a - b), \\ X' - Y' &= 2c(x - y - a + b), \\ X'' - Y'' &= 0, \end{aligned}$$

cette équation se réduit à

$$(t - t_0)\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 3\frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

en remplaçant $x + y$ par t et $a + b$ par t_0. Pour intégrer, divisons par $(t - t_0)\frac{d\lambda}{dt}$; il vient

$$\frac{d}{dt}\left[\log\frac{d\lambda}{dt} + 3\log(t - t_0)\right] = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2P}{(t - t_0)^3},$$

$$(8) \qquad \lambda = \frac{P}{(t - t_0)^2} + Q,$$

en désignant par P et Q deux constantes arbitraires. Il convient de remarquer que l'hypothèse $Q = 0$ donne l'élément linéaire des surfaces à courbure constante, et l'hypothèse $P = 0$ celui des surfaces développables.

Quand la constante h n'est pas nulle, les équations (7) donnent immédiatement

$$\psi = le^{h(x+y)} - me^{-h(x+y)}, \qquad \chi = ne^{h(x-y)} - pe^{-h(x-y)},$$

en désignant par l, m, n, p quatre nouvelles constantes arbitraires. De là résulte

$$X - Y = \psi\chi = lne^{2hx} + mpe^{-2hx} - (lpe^{2hy} + mne^{-2hy})$$

et finalement

$$(9) \qquad X = \gamma + lne^{2hx} + mpe^{-2hx}, \qquad Y = \gamma + lpe^{2hy} + mne^{-2hy}.$$

Pour obtenir la valeur correspondante de λ, substituons dans l'équation (1) les expressions qui viennent d'être trouvées pour X et Y. Or $X - Y$ et $X' - Y'$ sont divisibles par la fonction

$$\chi = ne^{h(x-y)} - pe^{-h(x-y)};$$

il en est de même de $X'' - Y''$, puisque $X'' - Y''$ est égal à $4h^2(X - Y)$.

Supprimons ce facteur, commun à tous les termes de l'équation, il vient

$$(le^{ht} - me^{-ht})\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 3h(le^{ht} + me^{-ht})\frac{d\lambda}{dt} + 2h^2(le^{ht} - me^{-ht})\lambda = 0.$$

Mais, ayant posé

$$\psi = le^{ht} - me^{-ht},$$

nous avons

$$\psi' = h(le^{ht} + me^{-ht}), \qquad \psi'' = h^2(le^{ht} - me^{-ht}).$$

L'équation précédente prend la forme

$$\psi\lambda'' + 3\psi'\lambda' + 2\psi''\lambda = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(\psi\lambda' + 2\psi'\lambda) = 0.$$

Intégrant, nous trouvons

$$\psi\lambda' + 2\psi'\lambda = \text{const.} = -Qh^2.$$

Multiplions le premier membre par ψ, le second par la quantité égale $\psi'' : h^2$; il viendra

$$\frac{d}{dt}(\psi^2\lambda) = -Q\psi'';$$

d'où, en intégrant,

$$\psi^2\lambda = -Q\psi' + P,$$

ce qui donne finalement

$$\lambda = P\left(\frac{1}{\psi}\right)^2 + Q\left(\frac{1}{\psi}\right)'.$$

Ainsi λ dépend de quatre constantes arbitraires h, l, m, P; Q. Sa valeur explicite est

$$(10) \qquad \lambda = P\left(\frac{1}{le^{ht} - me^{-ht}}\right)^2 + Q\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{le^{ht} - me^{-ht}}\right).$$

On voit qu'il suffit de faire $Q = 0$ pour avoir l'élément linéaire des surfaces à courbure constante que nous avons trouvées en commençant.

C'est l'expression générale de λ. Elle contient les deux formules (5) et (8).

En effet, si l'on prend $l = e^{-ht_0}$, $m = e^{ht_0}$ et si l'on pose

$$t' = t - t_0, \qquad P = 2(Q_1 - P_1), \qquad -hQ = Q_1 - P_1.$$

l'expression de λ devient

$$\lambda = \frac{P_1}{\left(e^{\frac{h}{2}t'} + e^{-\frac{h}{2}t'}\right)^2} + \frac{Q_1}{\left(e^{\frac{h}{2}t'} - e^{-\frac{h}{2}t'}\right)^2},$$

et l'on voit qu'il suffit d'y faire tendre h vers zéro pour retrouver la formule (8)

$$\lambda = P_2 + \frac{Q_2}{t'^2}.$$

Faisons maintenant $l = 0$, $m = e^{ht_0}$ dans l'expression (10); nous obtenons

$$\lambda = P_1 e^{2ht'} + Q_1 e^{ht'},$$

formule à remarquer. Particularisant encore en prenant

$$Q_1 = - P_1,$$

puis faisant tendre h vers zéro, on retrouve la formule (5)

$$\lambda = P_2 t'.$$

Ainsi la relation (10) donne bien l'expression générale de λ et par suite fournit tous les éléments linéaires que nous cherchions.

M. Darboux était déjà en possession, quand cette Note lui a été communiquée, de résultats qui au fond équivalent aux précédents, bien qu'ils en diffèrent par la forme. Le problème résolu par M. Darboux dans une Leçon récente consiste à déterminer tous les cas où l'équation des lignes géodésiques admet à la fois une intégrale du premier degré et une intégrale du second degré. La solution de ce problème entraîne celle du nôtre, et réciproquement. Néanmoins M. Darboux a bien voulu m'engager à publier l'étude qu'on vient de lire, parce qu'elle donne directement et sous forme explicite tous les éléments linéaires cherchés.

Je terminerai par quelques indications relatives au problème général que nous énoncions en commençant et dont nous n'avons traité qu'un cas particulier. Pour qu'un élément linéaire de la forme

$$\lambda\, dx\, dy = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\, dx\, dy$$

soit réductible d'une infinité de manières à cette forme, il faut et il suffit que λ vérifie l'équation

$$2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial^2 y} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda.$$

Voici diverses solutions de cette équation. Pour les écrire, nous poserons

$$t = x + y, \qquad z = x - y,$$
$$\psi = le^{ht} - me^{-ht}, \qquad \chi = ne^{hz} - pe^{-hz};$$

ces solutions, faciles à vérifier par un calcul direct, s'obtiennent en prenant

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \lambda = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\psi}\right)^2 + \mathrm{Q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\psi}\right) - \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{\chi}\right)^2 - \mathrm{Q}_1\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\chi}\right), \\ \mathrm{X} = \gamma + lne^{2hx} + mpe^{-2hx}, \qquad \mathrm{Y} = \gamma + lpe^{2hy} + mne^{-2hy}; \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \lambda = \mathrm{N}[(t-a-b)^2 - (z-a+b)^2] \\ \qquad + \dfrac{\mathrm{P}}{(t-a-b)^2} - \dfrac{\mathrm{P}_1}{(z-a+b)^2} + \mathrm{R}, \\ \mathrm{X} = \gamma + c(x-a)^2, \qquad \mathrm{Y} = \gamma + c(y-b)^2. \end{cases}$$

Tous les coefficients qui figurent dans ces formules sont des constantes absolument arbitraires.

Si, dans l'expression (α), on suppose $lmnp$ différent de zéro, on peut prendre $l = m$, $n = p$, ce qui donne, en remplaçant h par $2h$, l'élément linéaire

$$\lambda\, dx\, dy = \left[\frac{\mathrm{P}_2}{(e^{ht} - e^{-ht})^2} + \frac{\mathrm{Q}_2}{(e^{ht} + e^{-ht})^2}\right] dx\, dy$$
$$- \left[\frac{\mathrm{P}_3}{(e^{hz} - e^{-hz})^2} + \frac{\mathrm{Q}_3}{(e^{hz} + e^{-hz})^2}\right] dx\, dy.$$

C'est la solution que M. Darboux a fait connaître (¹) sous la forme équivalente

$$\left[\frac{\mathrm{A}}{(x'+y')^2} + \frac{\mathrm{B}}{(x'-y')^2} + \frac{\mathrm{C}}{(1-x'y')^2} + \frac{\mathrm{D}}{(1+x'y')^2}\right] dx'\, dy'.$$

Si l'on prend $l = 0$, il vient

$$\lambda = \mathrm{P}' e^{ht} + \mathrm{Q}' e^{2ht} - \frac{\mathrm{P}_1}{(ne^{hz} - pe^{-hz})^2} - \mathrm{Q}_1 \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{ne^{hz} - pe^{-hz}}\right).$$

Supposant en outre $n = 0$, on trouve

$$\lambda = \mathrm{P}' e^{ht} + \mathrm{Q}' e^{2ht} - \mathrm{P}'_1 e^{hz} - \mathrm{Q}'_1 e^{2hz},$$

et enfin, pour h tendant vers zéro,

$$\lambda = \mathrm{P}_2 t + \mathrm{Q}_2 z.$$

(¹) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 21?.

Comme cas particulier de l'expression (β) on peut signaler

$$\lambda = A_1 xy + B_1.$$

Les solutions (α) et (β), prises dans leur généralité, n'ont pa encore été signalées, à ma connaissance du moins.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. STIELTJES.

Permettez-moi de vous présenter une remarque que m'a suggérée votre résultat

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{b}{\sqrt{ac}}\right)}{2\sqrt{ac-b^2}}.$$

Elle consiste en ce que l'angle

$$\varphi = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{b}{\sqrt{ac}}\right), \qquad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{ac}},$$

qui y figure et qui est compris entre o et π, est précisément l'angle qu'on rencontre en représentant géométriquement la forme positive $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Cette remarque m'a conduit à une autre démonstration de votre résultat. Soient (*fig.* 1) OU, OV deux axes coordonnés comprenant l'angle φ,

$$OA = u = x\sqrt{a},$$
$$OV = v = y\sqrt{c}$$

les coordonnées d'un point P; on aura

$$OP^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

et, par suite,

$$J\sqrt{ac} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-OP^2}\,du\,dv.$$

En multipliant par $\sin\varphi$, $\sin\varphi\,du\,dv$ est l'élément de l'aire plane égale à $d\sigma$; donc

$$J\sqrt{ac}\sin\varphi = \int\int e^{-OP^2}\,d\sigma.$$

l'intégration s'étendant sur l'aire infinie correspondant aux valeurs positives de u et de v.

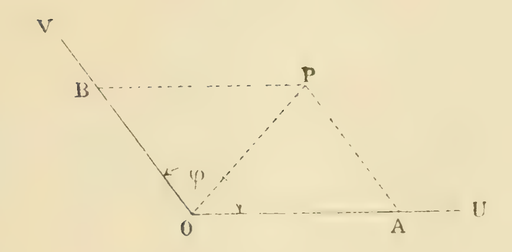
En introduisant des coordonnées polaires, on aura

$$d\sigma = r\,dr\,d\theta,$$

$$J\sqrt{ac}\sin\varphi = \int_0^{\varphi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$J = \frac{\varphi}{2\sqrt{ac}\sin\varphi}.$$

Fig. 1.



Cette méthode s'applique avec la même facilité au cas de trois variables

$$J = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\psi}\,dx\,dy\,dz,$$

$$\psi = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a_1 yz + 2b_1 zx + 2c_1 xy.$$

Déterminons d'abord trois angles α, β, γ compris entre o et π, par les relations

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{bc}}, \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\sqrt{ca}}, \qquad \cos\gamma = \frac{c_1}{\sqrt{ab}}.$$

Il est alors possible de construire un trièdre OUVW (*fig.* 2) tel, que

$$\widehat{VOW} = \alpha,$$

$$\widehat{WOU} = \beta,$$

$$\widehat{UOV} = \gamma,$$

et si

$$u = x\sqrt{a}, \qquad v = y\sqrt{b}, \qquad w = z\sqrt{c}$$

sont les cordonnées d'un point P, on a

$$OP^2 = \psi,$$

donc

$$J\sqrt{abc} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\psi}\,du\,dv\,dw.$$

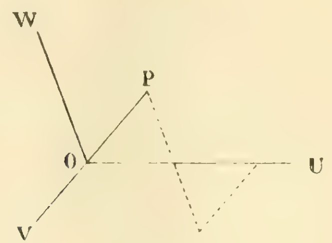
Mais l'élément de volume de l'espace est

$$d\sigma = k\, du\, dv\, dw,$$

k étant un facteur constant de valeur connue

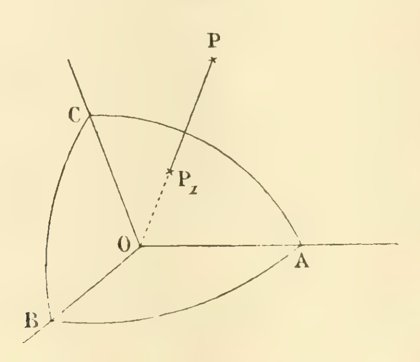
$$J\, k\sqrt{abc} = \int\int\int e^{-\psi}\, d\sigma.$$

Fig. 2.



Introduisons d'autres variables et déterminons la position du point P par $OP = r$ et par la position du point P_1 sur la sphère de rayon 1 dont O est le centre (*fig.* 3).

Fig. 3.



Il n'est pas nécessaire de spécifier la nature des coordonnées à introduire pour déterminer la position de P_1; toujours on aura

$$d\sigma = r^2\, d\rho \times dr,$$

ρ étant l'élément de l'aire de la surface de la sphère; donc

$$J\, k\sqrt{abc} = \int d\rho \int_0^\infty e^{-r^2} r^2\, dr = S \times \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}.$$

$S = \int d\rho$ étant l'aire du triangle sphérique ABC dont les côtés sont α, β, γ. En écrivant au lieu de k sa valeur, il vient

$$J = \frac{S \times \sqrt{\pi}}{4\sqrt{D}}, \qquad D = \begin{vmatrix} a & c_1 & b_1 \\ c_1 & b & a_1 \\ b_1 & a_1 & c \end{vmatrix}.$$

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Théorie mathématique de la lumière. Leçons professées pendant le 1er semestre 1887-1888 par *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, rédigées par *J. Blondin*, licencié ès Sciences. Paris, G. Carré, éditeur; 1889.

Le Livre de M. Poincaré est l'Ouvrage le plus important qui ait paru sur l'ensemble des théories mathématiques de la lumière depuis l'époque où les élèves de Verdet ont publié ses œuvres. Des travaux théoriques ont été publiés depuis lors, des phénomènes nouveaux ont été découverts; les théories différentes se sont multipliées, expliquant toutes également bien les phénomènes fondamentaux, mais présentant pourtant des divergences dont l'importance n'est point à dédaigner. Une comparaison minutieuse avec les phénomènes les plus délicats permettra seule de choisir entre elles et d'en rejeter quelques-unes.

C'est l'accord des principaux résultats qui a frappé M. Poincaré; c'est sur l'équivalence mathématique des trois ou quatre théories principales qu'il a surtout insisté, supposant que par un choix convenable des termes complémentaires qu'exigent la théorie de la dispersion et celle de la polarisation rotatoire, le même accord avec l'expérience pourrait être conservé, sinon pour toutes, au moins pour la plupart des théories distinctes. Ce point de vue donne à l'ensemble du Livre une unité qui pouvait paraître incompatible avec son programme. Les principes généraux sont établis une fois pour toutes, et les théories diverses se présentent à peu près comme des cas particuliers d'une théorie plus générale; le lien qui les unit toutes, la différence qui caractérise chacune d'elles sont ainsi très faciles à saisir.

Insistant sur les phénomènes principaux, M. Poincaré a pu se contenter de rappeler en peu de mots, chaque fois que cela était nécessaire, les résultats généraux de l'expérience. Dans plusieurs cas il s'est contenté d'exposer clairement les principes des théories sans mener jusqu'au bout des calculs faciles, indispensables pour la comparaison numérique avec les observations, mais inutiles dans la recherche des caractères de la solution mathématique.

A cet Ouvrage excellent, je me permettrai pourtant de faire une

critique; à chaque instant les unités sont changées, de manière à simplifier l'écriture des formules, mais en détruisant l'homogénéité; tantôt c'est la densité de l'éther, plus souvent c'est son élasticité qui est prise égale à l'unité; ici on suppose qu'on emploie les unités usuelles de longueur, et l'on traite la longueur d'onde comme un très petit nombre, le comparant à d'autres nombres qui sont ou des longueurs ou des racines carrées de longueurs (diffractions, pages 127 et suivantes); ailleurs, dans la théorie de la dispersion, on regarde les longueurs d'onde comme des nombres finis.

C'est assurément un bien petit défaut de forme, mais qui, dans certaines pages, rend la lecture singulièrement pénible; les formules définitives ne sont souvent pas homogènes en apparence, et, bien que la correction soit facile à faire pendant la lecture du Livre, elle peut n'être pas toujours très facile à retrouver au moment où l'on a besoin de comparer numériquement des résultats d'expériences aux formules théoriques.

J'indique en note les errata dont l'addition suffirait pour supprimer cet inconvénient ([1]).

Chap. Ier (p. 1-48). *Étude des petits mouvements dans un milieu élastique.* — On admet comme hypothèses fondamentales la conservation de l'énergie et la forme linéaire des équations différentielles du mouvement; on développe parallèlement la théorie

(1) Pages 127, δ est un nombre.

»		lignes 9,	remplacer	$\frac{r}{\delta^2}$	par	$\frac{r}{\delta^2}\,\frac{1}{a(a+b)}$.
»		» 11,	»	$\frac{1}{\delta^2}$	»	$\frac{1}{a\delta^2}$.
»	128,	» 6,	»	$\frac{r}{\sin\theta}$	»	$\frac{r}{a\sin\theta}$.
»		» 20,	»	$\frac{\sin\theta}{r}$	»	$\frac{a\sin\theta}{r}$.
»	129,	» 8,	»	»	»	»
»	127,	» 12, 14,	»	λ et $\sqrt{\lambda}$	»	$\frac{\lambda}{a}$ et $\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$.
»	128,	» 2, 7, 9, 20,	»			
»	130,	» 20,	»			
»	136,	» 12 et 13,	»	δ	»	l
		» 14,	»	$\frac{\delta}{\sqrt{\lambda}}$	»	$\frac{l}{\sqrt{\lambda a}}$.
»		» 16,	»	$\sqrt{\lambda}$	»	$\sqrt{\lambda a}$.

générale dans laquelle l'énergie interne est une fonction quelconque de toutes les distances des molécules prises deux à deux, et la théorie particulière plus spécialement connue sous le nom de *théorie moléculaire* dans laquelle, les forces étant centrales, l'énergie est la somme de toutes les valeurs que prend une même fonction d'une seule variable, la distance de deux molécules, pour tous les couples de molécules du corps; cette dernière forme est caractérisée par cette propriété différentielle que la dérivée seconde de l'énergie par rapport à deux distances moléculaires différentes est nulle. Enfin on admet que le potentiel dû aux actions mutuelles des molécules comprises dans un volume quelconque est la somme des potentiels dus à chacun des éléments de volume dont il est formé, quelque petits qu'ils soient, sans aucun terme provenant des actions mutuelles de deux des éléments voisins.

L'énergie rapportée à l'unité de volume est la somme de deux fonctions homogènes, l'une du premier degré W_1, l'autre du second degré W_2 des 9 dérivées des déplacements ξ, η, ζ par rapport aux axes x, y, z. Lorsque la pression à la surface limite du milieu n'est pas nulle, il y a dans W_2 27 coefficients arbitraires, et 21 seulement dans l'hypothèse des forces centrales. Si la pression à la surface limite est nulle, il y a 21 coefficients, et pour les forces centrales 15 seulement.

Enfin, si le milieu est isotrope, le nombre des coefficients distincts se réduit à trois, dont un pour les pressions extérieures (¹).

$$\begin{aligned} W_2 = {} & \lambda(\xi'_x\eta'_y - \xi'_y\eta'_x + \eta'_y\zeta'_z - \eta'_z\zeta'_y + \zeta'_z\xi'_x - \zeta'_x\xi'_z) \\ & + \mu(\xi'^2_x + \xi'^2_y + \xi'^2_z + \eta'^2_x + \eta'^2_y + \eta'^2_z + \zeta'^2_x + \zeta'^2_y + \zeta'^2_z) \\ & + \nu(\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z)^2. \end{aligned}$$

Les relations qui expriment que les forces sont centrales et que la pression extérieure est nulle sont respectivement

$$\lambda + \nu = 0, \qquad \lambda + 2\mu = 0.$$

La fonction W_1 contient seulement six coefficients distincts, ξ'_y et η'_x entrant symétriquement, et se réduit dans le cas des corps

(¹) λ de Lamé $= 2(\mu - \nu)$ de Poincaré.
μ » $= -2\mu$ »

isotropes à

$$W_1 = 2(\lambda + 2\mu)(\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z),$$

La théorie paraît exiger que ces coefficients λ, μ soient les mêmes dans W_1 que dans W_2 (¹).

D'ailleurs, les équations du mouvement des corps isotropes ne dépendent que des deux coefficients distincts μ, ν; et ceux-ci se réduisent à un seul si la pression extérieure est nulle et si les forces sont centrales, ce qui donne, par élimination de λ, $\nu = 2\mu$.

L'une des équations est

$$-\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t} = 2\mu\,\Delta\xi + 2\nu \frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

Δ désignant la somme des dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ et Θ la dilatation cubique $\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z$.

Chap. II. *Propagation d'une onde plane uniforme. Interférences.* — La vitesse de propagation des ondes transversales est

$$\sqrt{-\frac{2\mu}{\rho}}:$$

μ est donc négatif. Lorsque les forces sont centrales et la pression extérieure nulle, la vitesse de propagation des ondes longitudi-

---

(¹) Il me paraît important de remarquer que l'existence du terme en λ a pour conséquence une différence entre les pressions P_{xy} et P_{yx}. L'élément de volume de l'éther serait ainsi soumis à un couple élastique proportionnel au volume quand il est déformé. Il faut écrire les équations du mouvement de rotation de cet élément, quand il n'est soumis à aucun couple extérieur, ce qui est le cas de l'éther lumineux; on voit facilement que le moment d'inertie est infiniment petit du deuxième ordre par rapport au volume, et, comme les rotations $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}, \cdots\right)$ ne sont pas infinies, il faut que le couple moteur soit nul. On trouve ainsi que le coefficient λ est nul dans les corps isotropes, et, en général, sont nuls aussi six des coefficients que l'existence des pressions extérieures introduit en plus des vingt et un de Green, ou des quinze de Cauchy.

La conservation de ce coefficient λ conduirait d'ailleurs à une conséquence singulière : il entre dans W_2; il influe donc sur le signe de la fonction des forces, et par suite la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre initial paraît dépendre de la grandeur de ce coefficient; et pourtant il n'entre pas dans les trois équations du mouvement de translation, les seules écrites, et qui d'ailleurs déterminent les inconnues, et par conséquent il ne peut avoir aucune influence sur cette stabilité.

nales est égale à $\sqrt{3}$ fois celles des ondes transversales. Dans tous les autres cas, ces deux vitesses sont indépendantes. On peut faire plusieurs hypothèses sur les propriétés de l'éther, pour rendre compte de l'absence des vibrations longitudinales dans les milieux isotropes.

1° L'hypothèse la plus connue est celle de l'incompressibilité de l'éther. Par suite de la constitution de l'éther, les déformations seraient soumises à la condition $\Theta = 0$; dans ce cas, pour conserver au système de forces élastiques sa généralité, il faut introduire une pression hydrostatique p, et les équations du mouvement sont au nombre de quatre

$$(3)\qquad \begin{cases} -\rho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\,\Delta\xi, \\ \Theta = \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z = 0. \end{cases}$$

C'est la seule hypothèse dans laquelle l'équilibre soit stable pour toute déformation. Dans ce cas, la vitesse de propagation des ondes longitudinales serait infinie.

2° On peut, comme contre-partie, admettre que la vitesse de propagation des ondes longitudinales est nulle, $\mu + \nu = 0$, d'où $\nu > 0$.

Cette hypothèse, adoptée tacitement par Fresnel dans quelques cas, permet d'expliquer tous les phénomènes d'Optique; c'est celle qui correspond à la théorie électromagnétique de la lumière et que M. Poincaré a adoptée de préférence. Elle conduit d'ailleurs à deux résultats assez singuliers : toute variation de volume reste localisée au point où on l'a produite et s'y accroît indéfiniment si à un moment quelconque $\dfrac{\partial\Theta}{\partial t}$ est différent de zéro. En outre, contrairement à ce que dit M. Poincaré, la résistance à la compression n'est pas nulle. On trouve, en effet, facilement, dans le cas général,

$$-(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) = 2(\lambda + 3\nu + \mu)\Theta + (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz})_0,$$

et, dans le cas actuel, le coefficient de Θ se réduit seulement à $2(\lambda + 2\nu)$. Si les forces sont centrales, le coefficient d'élasticité cubique est $-\dfrac{2\mu}{3}$ positif. Si la pression extérieure est nulle, il

devient $-\frac{8\mu}{3}$ toujours positif. Ce coefficient deviendrait nul pour λ négatif et égal à 2μ, et négatif pour $\lambda < 2\mu$. Si l'on a $\lambda = 0$, comme on doit le faire à mon avis, le coefficient de compressibilité est $-\frac{4}{3}\mu$ positif.

Mais l'équilibre est instable : par exemple, pour une déformation

$$\xi'_x = \eta'_y = \zeta'_z, \qquad \xi'_y = \zeta'_z = \eta'_x = \eta'_y = \zeta'_x = \zeta'_y = 0.$$

3° Enfin on peut supposer $\mu + \nu < 0$, c'est-à-dire la vitesse de propagation des ondes longitudinales imaginaire. Celles-ci sont alors évanescentes, c'est-à-dire que, si une circonstance quelconque les fait naître, elles s'éteignent sur place, et si elles sont maintenues par la persistance de la cause, elles ne se propagent pas et sont rapidement absorbées par le milieu, comme dans la théorie de la réflexion de Cauchy. Bien entendu, l'instabilité est plus grande encore que dans le cas précédent. « Mais, dit M. Poincaré, page 56, dans l'ignorance où nous sommes de la véritable nature de l'éther, nous ne devons attacher qu'une importance secondaire aux objections tirées de la théorie de l'élasticité. »

Le Chapitre se termine par l'examen des propriétés des vibrations transversales et de leurs interférences.

Chap. III (p. 77-98). *Principe d'Huygens.* — Ce Chapitre, très intéressant, n'est pas susceptible d'être résumé. Il est relatif aux milieux isotropes seuls. On ne peut pas dire qu'il épuise la question ; le Mémoire de 1849 de Stokes sur la diffraction pourra encore être lu avec intérêt.

Chap. IV (p. 99-175). *Diffraction.* — Les équations auxquelles satisfait l'amplitude d'un mouvement de période déterminée ont une grande analogie avec celles du potentiel des forces newtoniennes. Cette analogie, signalée par Stokes dans son Mémoire sur la diffraction, a été complètement mise en lumière par Helmholtz dans son Mémoire sur les tuyaux sonores ; lord Rayleigh, dans son Livre *On Sound,* a étendu les applications à plusieurs problèmes de diffraction du son dans l'air. Ces propriétés principales sont :

1° De part et d'autre d'une surface couverte de sources simples, l'amplitude reste continue; mais la dérivée normale de l'amplitude subit une variation brusque, égale au produit par 4π de l'amplitude de la source rapportée à l'unité de surface;

2° Appelons source double l'ensemble de deux sources très voisines, et d'amplitudes égales et opposées. Une pareille source est définie (comme un moment magnétique) par la direction de la droite de jonction, et par *le moment* de l'amplitude (produit de l'amplitude par la longueur de la droite de jonction).

A travers une surface couverte de sources doubles dont la droite de jonction est normale à la surface, l'amplitude subit une variation brusque égale au produit par 4π du *moment* des sources rapporté à l'unité de surface.

Lorsqu'il n'y a pas de sources à l'intérieur d'une surface fermée, l'expression la plus générale de l'amplitude en un point P intérieur, pour un mouvement simple de longueur d'onde $\frac{2\pi}{\alpha} = \lambda$, est la partie réelle de

$$(1) \qquad \xi = \int\int 4\pi X_1 \frac{e^{i\alpha r}}{r} dS - \int\int 4\pi X_2 \cos\psi \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right) dS$$

pour le mouvement de phase zéro, et le coefficient de i pour le mouvement de phase $\frac{\pi}{2}$, r est la distance de l'élément de surface dS au point P; ψ est l'angle de r avec la normale à dS. Les intégrales sont étendues à toute la surface limite.

Quand il s'agit du potentiel des forces newtoniennes, on sait qu'il faut faire $\alpha = 0$; et, si l'on veut que ξ se réduise à X_2 ou $\frac{\partial\xi}{\partial n}$ à X_1 sur la surface, on ne peut se donner arbitrairement que l'une des deux fonctions X_1 ou X_2, l'autre étant déterminée par le choix de la première. M. Poincaré démontre (p. 112) l'existence d'une restriction analogue dans le cas qui nous occupe. On ne peut donc se donner arbitrairement les valeurs auxquelles ξ et $\frac{\partial\xi}{\partial n}$ se réduisent sur la surface. Ces valeurs ne sont pas entièrement indépendantes.

Lorsque l'amplitude ne varie que d'une manière inappréciable

dans un volume λ^3 et lorsque toutes les distances auxquelles on observe sont grandes par rapport à λ, on peut admettre que $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ est égal à $i\alpha\xi$.

A l'intérieur d'une surface formée par un écran noir percé d'une ouverture, la source lumineuse étant en dehors, le mouvement sera donné par les intégrales (1) en tenant compte de la condition de transversalité $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$. Quant au choix des valeurs de X_1, X_2, voici celui qu'indique M. Poincaré, comme devant donner une solution *approchée* du problème de la diffraction pour une source et un écran donnés. Sur la surface de l'ouverture, on prend pour X_2 l'amplitude *que donnerait la source au même point sans tenir compte de la présence de l'écran*, c'est-à-dire comme si le milieu était indéfini. On prend $X_1 = i\alpha X_2$.

Sur l'écran noir on prend $X_2 = 0$, et aussi $X_1 = 0$.

Ces conditions ont pour conséquence que ξ et $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ ont, dans l'ouverture, *à peu près* les valeurs que donnerait aux mêmes points la source dans le milieu indéfini, et sont *à peu près* nulles sur tout l'écran, lequel n'est pas exposé à la lumière directe de la source. Ce sont les conditions que Kirchhoff avait aussi choisies dans un Mémoire récent; ce sont, en somme, celles mêmes de Fresnel. Mais elles sont employées d'une manière rigoureuse et qui ne donne plus lieu à certains résultats singuliers obtenus par Fresnel quant aux valeurs absolues de l'amplitude et à la phase. Les valeurs relatives de l'amplitude sont d'ailleurs les mêmes que celles de Fresnel.

Ces conditions, M. Poincaré se les donne d'autorité. Kirchhoff avait essayé de justifier celles relatives à l'écran par un raisonnement qui n'est guère satisfaisant, mais qui du moins prenait pour point de départ l'absence de pouvoir réflecteur des corps noirs. C'est cette propriété caractéristique des corps noirs dont il faudrait trouver l'expression analytique générale pour pouvoir aborder directement le problème de la diffraction. Ce problème est en effet notablement différent de celui qui a été traité; il faut l'énoncer ainsi : *Étant donnée une source à l'intérieur d'une surface noire fermée de forme quelconque, trouver la distribution de la lumière.*

Pour une surface partout convexe, la lumière est répartie comme si le milieu était indéfini. Pour une surface qui présente un étranglement, on la décompose par une cloison à travers l'étranglement en deux surfaces convexes dont une contient la source. On *admet* alors pour l'intérieur de cette première surface que la lumière y est répartie comme dans un milieu indéfini, résultat qui ne serait vrai que si la sufrace de la cloison était noire, elle aussi. On en déduit l'état vibratoire dans l'étendue de l'étranglement, et l'on se trouve ramené pour la seconde surface fermée au problème traité par M. Poincaré. Si ce raisonnement donne des résultats satisfaisants lorsque les dimensions de l'ouverture sont très grandes par rapport à une longueur d'onde, il n'est point certain qu'il en soit de même dans le cas contraire, pour des écrans ou des ouvertures d'un millième de millimètre ([1]), ou quand la source et le point observé sont très voisins des bords de l'ouverture.

Seules jusqu'à présent, les expériences de M. Gouy nécessiteraient cette étude, en tenant compte du pouvoir réflecteur des métaux employés comme écrans ; les conditions à la surface, au moins près de l'arête diffringente, sont certainement différentes de celles adoptées pour un écran noir. Mais, sous sa forme générale, ce problème est encore inabordable. Dans la seconde moitié du Chapitre, consacrée aux applications, M. Poincaré se sert de la représentation géométrique très intéressante que M. Cornu a donnée des intégrales de Fresnel. Il insiste surtout sur les phénomènes observés en lumière parallèle avec une lunette pointée à l'infini. Il ne s'occupe pas du pouvoir séparateur des lunettes, ni en général des problèmes trop particuliers qui exigeraient des calculs développés.

Chap. V (p. 176-216). *Polarisation rotatoire. Dispersion.* — On rend compte de la polarisation rotatoire en introduisant dans les équations du mouvement de l'éther les dérivées d'ordre impair et particulièrement les dérivées troisièmes des déplacements. On rend compte de la dispersion dans les milieux ordinaires en intro-

([1]) Dans les réseaux serrés, il peut y avoir jusqu'à 1500 traits par millimètre, ce qui donne pour largeur à chaque trait 0,00033, soit à peu près une demi-longueur d'onde rouge, moins d'une longueur d'onde du violet extrême.

duisant les dérivées paires, et particulièrement les dérivées quatrièmes et les déplacements eux-mêmes. Telle est, au moins à une première approximation, l'interprétation analytique des résultats d'expériences qui sont devenues depuis quelques années très nombreuses et très étendues.

Bien des théories ont été proposées pour justifier au point de vue mécanique l'introduction de ces termes.

La première en date est celle de Cauchy. Les équations du mouvement ont été écrites dans le Chapitre précédent en faisant deux hypothèses : 1° On peut s'arrêter dans le développement de W au terme W_2, qui contient seulement les carrés des déplacements relatifs.

Nous conserverons cette hypothèse, qui seule rend linéaires les équations du mouvement, et dont la conséquence expérimentale, que la vitesse de propagation est indépendante de l'amplitude, a été suffisamment contrôlée.

2° Les déplacements relatifs $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ de deux molécules dont les coordonnées diffèrent de Dx, Dy, Dz sont développables en série de Taylor en se bornant aux premiers termes. Abandonnons cette hypothèse. Le développement, en y conservant les termes d'ordre supérieur au premier, reste linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur au second, de ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées x, y, z.

Dans un corps non centré, les dérivées du troisième ordre subsistent; elles disparaissent dans un corps centré.

L'indice de réfraction se présente sous la forme

$$n^{-2} = A + B\lambda^{-2} + \ldots$$

d'une série de puissances paires négatives de la longueur d'onde dans le milieu.

Cette théorie ne fait intervenir le corps matériel que par sa symétrie; et il n'y a aucune raison pour que les termes d'ordre supérieur soient nécessaires dans un corps transparent plus que dans le vide; or l'expérience indique une dispersion nulle dans le vide. C'est une conviction qui s'impose à l'esprit que la même cause produit le changement de la vitesse de propagation et la dispersion, et que cette cause, c'est la présence du milieu pondérable.

Il faut en tenir compte. Les influences de ce milieu sont multiples; chacune des théories proposées résulte de la prépondérance exclusive attribuée à une seule de ces influences.

1° *Première théorie de Briot; théorie de Neumann.* — L'éther engagé dans un corps transparent ne diffère en rien de l'éther du vide; mais il subit de la part des molécules matérielles des réactions proportionnelles au déplacement relatif. Quant aux molécules matérielles, elles n'éprouvent pas de déplacement appréciable sous l'influence de ces actions. On suppose donc que les actions de l'éther sur la matière sont incomparablement plus faibles que les actions élastiques de la matière sur elle-même.

L'indice de réfraction se présente sous la forme

$$n^{-2} = A + B\lambda^2 + \ldots$$

d'un développement en série de puissances paires positives de la longueur d'onde λ dans le milieu étudié.

Les résultats d'expériences connus à cette époque, et presque exclusivement relatifs aux radiations lumineuses et ultra-violettes, donnaient la prépondérance aux puissances négatives de la longueur d'onde. Briot fut conduit à rejeter cette théorie et à en proposer une autre dont on verra plus loin le principe; mais, depuis lors, une précision plus grande dans les mesures, l'exploration des radiations infra-rouges jusqu'à des longueurs d'onde décuples de celles du jaune, ont montré la nécessité de tenir compte des puissances paires. Aussi les physiciens regretteront-ils que M. Poincaré n'ait indiqué qu'en quelques mots cette théorie, sans lui accorder l'importance qu'elle mérite.

2° *Boussinesq.* — On obtient le développement suivant les puissances négatives en faisant l'hypothèse inverse de la précédente. On suppose les actions de l'éther sur la matière incomparablement plus grandes que les réactions élastiques de la matière. Les molécules matérielles étaient dans le premier cas des rochers inébranlables au milieu de l'Océan, suivant l'expression de Neumann; ce sont maintenant des bâtons flottants qui suivent le mouvement du flot autant que le permet leur inertie. Nous trouvons ainsi le développement suivant les puissances négatives; en outre, le terme

principal donne la loi $\frac{n^2-1}{\rho_1} = \text{const.}$, obtenue jadis comme conséquence de l'hypothèse de l'émission, et qui, comme on sait, donne des indications approximatives sur la valeur de l'indice.

3° *Deuxième hypothèse de Briot.* — Des actions aussi énergiques de la matière sur l'éther doivent s'exercer non seulement pendant le mouvement, mais aussi au repos, et modifier ses propriétés. Dans les hypothèses 1° et 2° ces actions sont négligées, et on a supposé implicitement que les rayons d'activité étaient tous deux grands par rapport aux distances moléculaires tant de la matière que de l'éther; en sorte que les deux milieux peuvent être traités comme homogènes, quoique intimement mélangés. Faisons l'hypothèse inverse, à savoir que les rayons d'activité de l'éther sur lui-même et de la matière sur l'éther sont incomparablement plus petits que les distances des molécules matérielles, mais incomparablement plus grands que les distances des molécules d'éther. Alors l'éther reste isotrope, mais cesse d'être homogène; on l'a supposé très compressible, en faisant nulle la vitesse de propagation longitudinale; la présence de la matière a pour effet de produire une densité variable périodiquement dans les cristaux, irrégulièrement dans les corps isotropes [1].

Nous avons ainsi une forme simplifiée de l'hypothèse de Briot. M. Poincaré en expose les conséquences d'une manière simple, brève et facile à suivre. On retrouve le développement suivant les puissances paires négatives de la longueur d'onde.

Les mêmes hypothèses fondamentales conduisent facilement à l'explication de la polarisation rotatoire et à la loi de Biot comme première approximation [2].

---

(1) Briot avait rattaché ces variations à la loi d'action des molécules matérielles sur l'éther, et de quelques résultats d'expériences avait cru pouvoir déduire (*Théorie mathématique de la Lumière*, p. 45, 59, 71, 75) que les molécules d'éther se repoussent en raison inverse de la sixième puissance de la distance, et sont attirées par les molécules matérielles suivant la loi de Newton. Il avait d'ailleurs conservé une plus grande généralité aux hypothèses, mais les calculs qui en résultent sont d'une longueur et d'une étendue qui rendent la lecture singulièrement aride.

(2) P. 183-187. a désigne une longueur, qu'on suppose très petite par rapport à la longueur d'onde λ dans le milieu.

Les formules de la page 188 sont fausses, par suite de l'oubli d'un facteur 2 et

M. Poincaré n'a pas eu le temps dans son Cours de développer les conséquences intéressantes de la seconde hypothèse, à laquelle M. von Helmholtz a donné sa forme la plus générale pour l'explication de la dispersion anormale.

Chap. VI (p. 217-318). *Double réfraction.* — Dans un milieu élastique anisotrope, chaque onde plane peut propager sans altération trois vibrations, respectivement parallèles aux axes de l'ellipsoïde de polarisation, avec des vitesses de propagation en raison inverse de la longueur de l'axe correspondant. Si l'on appelle α, β, γ les cosinus de la normale à l'onde plane, rapportée à trois axes de coordonnées orthogonaux quelconques, et A, B, C les amplitudes de la vibration projetée sur ces trois axes, on obtient l'équation de l'ellipsoïde de polarisation en remplaçant ξ'_x, ξ'_y, ξ'_z, ..., ζ'_z respectivement par αA, βA, γA, ..., γC, dans l'expression de l'énergie et égalant à zéro :

$$\Pi = 0.$$

On n'observe jamais que deux rayons lumineux, et la conservation de l'intensité dans la réflexion totale ne permet pas d'admettre l'existence d'un troisième rayon non lumineux.

Les quatre hypothèses suivantes peuvent rendre compte de la double réfraction :

1° Fresnel : Incompressibilité de l'éther;

2° Cauchy : Extrême petitesse du troisième rayon;

3° Lamé, Neumann [1], Mac Cullagh : Vitesse de propagation nulle pour l'une des vibrations. L'ellipsoïde de polarisation devient un cylindre;

4° Poincaré : Extension des hypothèses de Cauchy dans la

---

d'une confusion entre la longueur d'onde λ dans le milieu et la longueur d'onde dans le vide λ_1. La formule finale, page 189, doit être remplacée par

$$e = \frac{\lambda^2}{\pi a} = \frac{\lambda_1^2}{\pi a n^2}.$$

(1) L'exposition de cette théorie dans les Leçons XIV et XV sur la théorie de l'élasticité de F. Neumann, publiées par M. O.-E. Meyer, diffère notablement de celle indiquée ici.

théorie de la réfraction. — Vitesse de propagation imaginaire pour l'une des directions. L'ellipsoïde devient un hyperboloïde.

On ne s'arrêtera pas plus ici qu'au Chapitre II sur les difficultés relatives à l'instabilité du milieu dans la dernière hypothèse.

1° *Hypothèse de Fresnel.* — Si l'on suppose l'éther incompressible, il faut tenir compte dans les équations du mouvement de la liaison qui en résulte, par l'introduction d'une pression hydrostatique. Les équations qui déterminent la direction et la vitesse de la vibration contiennent un terme indépendant de l'ellipsoïde de polarisation :

$$(1) \quad \begin{cases} AV^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial A} - \alpha H, \\ BV^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial B} - \beta H, \\ CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial C} - \gamma H. \end{cases}$$

La force de liaison αH, βH, γH est perpendiculaire au plan de l'onde; cela équivaut à la seconde hypothèse de Fresnel, que « la seule composante efficace de la force élastique développée par la vibration est la composante parallèle au plan de l'onde ». Cette hypothèse est donc absolument correcte. Il en est de même, d'après M. Poincaré, de la première hypothèse, que « la force élastique développée par une vibration ne dépend que de la direction de celle-ci, et nullement de la direction du plan de l'onde ». La traduction mathématique est que l'ellipsoïde de polarisation ne dépend de α, β, γ que par la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, et, si l'on prend les axes de coordonnées parallèles aux axes de l'ellipsoïde de polarisation, on a

$$H = (aA^2 + bB^2 + cC^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

L'élimination de A, B, C, H, entre les équations (1) et l'équation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

qui exprime l'incompressibilité, conduit, pour les vitesses de propagation normales aux ondes, à l'équation même de Fresnel.

Les vibrations sont dans le plan de l'onde, et perpendiculaires au plan de polarisation.

On obtient le même résultat sans supposer l'éther incompressible, si l'énergie du milieu a une forme telle que l'ellipsoïde de polarisation soit

$$(1)\quad \begin{cases} \Pi = (a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{B}^2 + c\mathrm{C}^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ \qquad - 2(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)(a\mathrm{A}\alpha + b\mathrm{B}\beta + c\mathrm{C}\gamma) = 1. \end{cases}$$

Les hypothèses de Fresnel, si vivement critiquées par Verdet, paraissent ainsi justifiées.

Le premier essai d'une théorie rigoureuse est celui de Cauchy. L'existence des trois plans rectangulaires de symétrie optique dans tous les cristaux permet de réduire à douze les coefficients indépendants dans la fonction Π homogène et du deuxième degré en α, β, γ, A, B, C.

Cauchy admet comme Fresnel que le plan de vibration est perpendiculaire au plan de polarisation. Il reconnaît d'abord que, dans l'hypothèse des forces centrales, les vibrations ne peuvent être rigoureusement transversales lorsque la double réfraction existe. Pour obtenir une coïncidence approchée, avec la théorie de Fresnel, il écrit que l'intersection de l'ellipsoïde de polarisation par le plan de l'onde appartient à l'ellipsoïde d'élasticité de Fresnel; on a alors, dans le cas des forces centrales,

$$(2)\quad \begin{cases} \Pi = (a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{B}^2 + c\mathrm{C}^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ \qquad - \frac{1}{4}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)(a\mathrm{A}\alpha + b\mathrm{B}\beta + c\mathrm{C}\gamma) \\ \qquad - \frac{d}{4}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)^2. \end{cases}$$

La surface des vitesses normales qu'on en déduit peut s'écarter plus ou moins de celle de Fresnel suivant la grandeur du coefficient d; les plus petites différences sont de l'ordre des rapports

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2, \quad \ldots$$

De toute façon, l'onde longitudinale subsiste, elle se propage avec une vitesse variable suivant la direction; elle est réelle pour toute valeur positive de d; aucune valeur de d ne peut la rendre nulle en tous sens; elle deviendrait imaginaire (et l'onde longitudinale évanescente) pour des valeurs négatives de d supérieures en valeur absolue à cinq fois la plus grande des quantités a, b, c.

Si l'on renonce à l'hypothèse des forces centrales, en conservant la relation de Fresnel entre le plan de polarisation et le plan de vibration, les vibrations peuvent être rigoureusement transversales ([1]); l'ellipsoïde de polarisation est alors

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H} = {} & (a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{B}^2 + c\mathrm{C}^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ & - 2(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)(a\mathrm{A}\alpha + b\mathrm{B}\beta + c\mathrm{C}\gamma) \\ & + 2e(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)^2. \end{aligned}\right.$$

de forme un peu plus générale que celui de Fresnel (1). Les vitesses des ondes transversales sont *identiques* à celles de Fresnel, mais elles sont accompagnées d'une onde longitudinale, dont la vitesse de propagation

$$\mathrm{V}^2 = 2e - (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2).$$

réelle si e est plus grand que $a > b > c$; imaginaire au contraire si e est plus petit que c. On remarquera le cas intermédiaire aussi bien pour e que pour d, où la vitesse des ondes longitudinales pourrait être imaginaire dans certaines directions, et réelle dans d'autres.

Enfin, si l'on abandonne l'hypothèse des forces centrales, sans se préoccuper de la théorie de Fresnel, on peut reprendre la question directement comme Lamé et Neumann, et écrire que le milieu peut propager des vibrations rigoureusement transversales, mais non les vibrations longitudinales dont la vitesse de propagation est supposée nulle. Dans ce cas, l'ellipsoïde de polarisation est un cylindre normal au plan de l'onde, qui, rapporté comme toujours aux plans de symétrie optique du milieu, a pour équation

$$(4)\qquad \mathrm{H} = a(\mathrm{C}'\beta - \mathrm{B}'\gamma)^2 + b(\mathrm{A}'\gamma - \mathrm{C}'\alpha)^2 + c(\mathrm{B}'\alpha - \mathrm{A}'\beta)^2.$$

Les vitesses de propagation sont rigoureusement les mêmes que celles de Fresnel; mais les vibrations A′, B′, C′ de Neumann et A, B, C de Fresnel, qui correspondent à la même vitesse de pro-

---

([1]) Cette théorie est connue en Angleterre sous le nom de *seconde théorie de Green* (1839), qui indique un ellipsoïde de polarisation identique à (3).

pagation, sont liées par les relations

$$\frac{C'\beta - B'\gamma}{A} = \frac{A'\gamma - C'\alpha}{B} = \frac{B'\alpha - A'\beta}{C},$$

et sont par conséquent perpendiculaires l'une à l'autre (1).

Dans les théories qui précèdent, on ne s'occupe que de l'éther, et non de la matière ordinaire, cause de la distribution anisotrope de l'éther. En particulier, la dispersion y est inexplicable; ici encore on peut envisager l'action de la matière à deux points de vue différents.

1° M. *Sarrau* suppose que l'éther reste isotrope, que la vitesse de propagation d'une condensation y est nulle, qu'il éprouve de la part des molécules matérielles fixes des actions qui font varier périodiquement la densité de l'éther; la période, variable avec la direction, est supposée très petite par rapport à la longueur d'onde (2). Alors la grandeur et la direction de la vibration varient

---

(1) Cette théorie de Lamé, Neumann (1862) a été indiquée pour la première fois par Green (1839) et est connue en Angleterre sous le nom de *première théorie de Green*.

Dans cette théorie, l'énergie est de la forme

$$W = a[(\zeta'_y + \eta'_z)^2 - 4\zeta'_z\eta'_y] + b[(\xi'_z + \zeta'_x)^2 - 4\xi'_x\zeta'_z] + c[(\eta'_x + \xi'_y)^2 - 4\eta'_y\xi'_x],$$

et ne dépend que du changement de forme d'un parallélépipède et non de sa rotation. Un élément de volume n'est soumis à aucun couple élastique.

Quant aux autres théories, il est facile de voir que les ellipsoïdes de polarisation (1), (2), (3) exigent que l'énergie contienne des termes tels que $\xi'^2_y + b\eta'^2_x$, ... Il en résulte que les pressions P_{yx} et P_{xy} sont différentes et que l'équation des moments n'est pas satisfaite pour un élément de volume tant que les coefficients a, b, c sont distincts, c'est-à-dire tant qu'il y a double réfraction. Ces termes sont introduits par Cauchy, et aussi par Green, pour tenir compte des pressions extérieures. Peut-être peuvent-ils exister si l'élément de volume dont la déformation reste homogène dans la théorie de la lumière est extrêmement petit par rapport au rayon d'activité; car, dans ce cas, la notion intermédiaire de pression n'a plus de sens. Parmi les théories qui ne font intervenir que l'éther, celle de Lamé me paraît, en somme, la seule qui se déduise naturellement de la théorie de l'élasticité des solides.

(2) Dans tout ce paragraphe, on prend des unités très petites par rapport à la longueur d'onde. Pour éviter de préciser les unités, il suffirait de désigner par μ, non pas $\frac{2\pi}{\lambda}$, mais une quelconque des quantités $\frac{1}{a\lambda}$, $\frac{1}{b\lambda}$, $\frac{1}{c\lambda}$ (p. 259) qui sont des nombres très petits.

aussi périodiquement aux différents points de l'onde plane, et c'est l'effet moyen qu'il s'agit de trouver. Toute la difficulté de la démonstration est relative à la recherche de la force vive moyenne produite par une vibration d'amplitude moyenne L_0, M_0, N_0; rapportée aux axes de symétrie du milieu, elle est de la forme $\frac{L_0^2}{a}+\frac{M_0^2}{b}+\frac{N_0^2}{c}$. On retrouve exactement l'équation de Fresnel pour les vitesses de propagation; mais les amplitudes sont liées à celles de Fresnel par les relations

$$L_0 = Aa, \qquad M_0 = Bb, \qquad N_0 = Cc.$$

Le plan de vibration est le même que celui de Fresnel, mais la vibration, au lieu d'être dans le plan de l'onde, est perpendiculaire au rayon lumineux ([1]).

Dans l'hypothèse de M. *Boussinesq,* les molécules matérielles interviennent plus directement; l'éther est encore isotrope, mais de plus il reste homogène; la vitesse de propagation d'une condensation y est nulle, mais la matière ordinaire participe à son mouvement et, en première approximation au moins, produit une réaction fonction linéaire de l'accélération absolue d'un point quelconque de l'éther. L'influence de cette réaction se traduit, pour un système d'axes convenable, par une simple augmentation de la densité, différente pour chacun des trois axes dans les cristaux.

En appelant $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ les densités fictives, on retrouve identiquement les équations de M. Sarrau pour les vitesses de propagation.

J'ajouterai qu'un éther homogène, traité comme indépendant du milieu matériel, ne peut pas fournir entre les vibrations et leurs vitesses de propagation les relations de M. Sarrau, si les déplacements ne sont soumis à aucune liaison; mais il les donne quand

([1]) On remarquera l'analogie de cette théorie et de la suivante avec celle développée par Stokes et par Lord Rayleigh; mais ceux-ci, ayant admis l'incompressibilité de l'éther, trouvaient une surface d'onde un peu différente de celle de Fresnel, et en désaccord avec l'expérience, bien que présentant les mêmes caractères généraux.

le milieu est soumis à la liaison

$$\frac{\xi'_x x}{a} + \frac{\eta'_y y}{b} + \frac{\zeta'_z z}{c} = 0,$$

et a pour ellipsoïde de polarisation celui de Fresnel

$$\Pi = (aA^2 + bB^2 + cC^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Remarquons enfin que l'éther de M. Boussinesq, quoique très compressible, est néanmoins supposé homogène. Il n'est guère admissible que les réactions de la matière sur l'éther, assez énergiques pour produire la double réfraction, ne produisent pas en même temps la distribution périodique de la densité de l'éther admise par M. Sarrau. Il faudrait tenir compte à la fois des deux actions et entreprendre, ce qui ne paraît pas devoir être insurmontable, la discussion détaillée des hypothèses relatives au mode d'action de la matière sur l'éther.

Après avoir précisé les relations différentielles entre les vibrations de Fresnel, de Lamé et de M. Sarrau, M. Poincaré passe à l'étude de la surface d'onde lumineuse, considérée comme enveloppe des plans normaux aux rayons vecteurs de la surface des vitesses normales. Il termine en montrant que le rayon vecteur de la surface d'onde est bien la direction de propagation de la lumière. Il étudie pour cela une onde plane dont l'intensité n'est pas uniforme et cherche la direction des lignes de propagation de l'intensité.

Cristaux hémièdres. — Les théories précédentes rendent compte de la double réfraction d'une lumière homogène; mais une nouvelle approximation est nécessaire pour rendre compte de la polarisation rotatoire et de la dispersion. L'étude de la dispersion dans les cristaux est laissée de côté. La théorie de la polarisation rotatoire est abordée seulement dans un cas particulier, objet des travaux de Neumann et de Mac Cullagh. On admet que le rôle de la matière se réduit à déterminer le genre de symétrie de l'éther. Quand le cristal n'a pas de centre de symétrie, l'éther n'en a pas non plus, mais reste homogène; les nouveaux phénomènes sont dus à ce que les distances moléculaires ne sont pas assez petites par rapport aux longueurs d'onde pour qu'on puisse se

contenter des expressions de ξ, η, ζ linéaires par rapport aux distances moléculaires. Alors l'énergie est une fonction des dérivées de tous ordres de ξ, η, ζ en x, y, z qui peut introduire dans les équations du mouvement les dérivées d'ordre impair quand il n'y a pas de centre de symétrie. Enfin on suppose, comme Lamé, que l'éther est incompressible et que la troisième vitesse de propagation est nulle. M. Poincaré montre comment une onde plane, orientée arbitrairement, a deux vitesses de propagation différentes, qui correspondent toujours à deux vibrations elliptiques semblables, de rotations inverses, et orientées à angle droit. Mais il n'aborde pas l'examen de la forme de la surface d'onde correspondante, comparée à celle de Fresnel. Une hypothèse différente a été développée par M. Briot dans son essai sur la théorie de la lumière, et étudiée complètement; malheureusement les calculs sont d'une extrême complication. M. Potier a réussi à en donner une exposition notablement plus simple, à laquelle M. Poincaré renvoie.

Chap. VII (p. 318-378). *Réflexion et réfraction.* — Toute la difficulté de la théorie de la réflexion à la surface de séparation de deux substances transparentes réside dans le choix des conditions de continuité à travers la surface de séparation. Fresnel, Neumann et Mac Cullagh, Cauchy, ont choisi des conditions différentes, qui peuvent toutes être mises en harmonie avec les résultats de l'expérience, par un choix convenable de l'orientation relative des plans de vibration et de polarisation, et par des hypothèses auxiliaires sur la rapidité du changement d'état, ou sur les propriétés de chacun des deux milieux relativement aux ondes longitudinales.

M. Poincaré expose d'abord la théorie de Fresnel, et montre que la plupart des objections auxquelles elle paraissait sujette peuvent être levées. Les hypothèses ont toutes une signification cinématique nette, et, en particulier, la discontinuité de la composante du déplacement normale à la surface de séparation peut se rencontrer comme conséquence d'une théorie rigoureuse, en supposant que la variation de densité de l'éther à travers la surface se fait dans une épaisseur très petite par rapport à la longueur d'onde, quoique finie. La polarisation elliptique par réflexion se produit dès que l'épaisseur de la couche variable n'est pas négli-

geable devant la longueur d'onde. Malgré tout, cette théorie de Fresnel n'est point en harmonie avec sa théorie de la double réfraction.

La théorie de Neumann est exposée surtout en mettant en évidence ses relations avec la théorie de Fresnel; toutes les conditions de continuité sont satisfaites sans aucune hypothèse complémentaire; mais le plan de polarisation contient la vibration ([1]). Enfin dans la théorie de Cauchy, toutes les conditions de continuité cinématique sont satisfaites, grâce à la présence d'une onde longitudinale évanescente le long de la surface de séparation, tout en conservant le plan de polarisation perpendiculaire à la vibration; elle rend naturellement compte de la polarisation elliptique par réflexion, sans en expliquer toutes les circonstances.

Le Chapitre se termine par des indications sur les théories de Mac Cullagh et de M. Sarrau, relatives à la réflexion cristalline, et un rapide aperçu sur la propagation de la lumière dans les milieux fortement absorbants et sur la réflexion métallique.

Chap. VIII (p. 378-397). *Aberration astronomique.* — Après avoir exposé les faits d'expérience et les vues de Fresnel sur leur explication probable, M. Poincaré indique, d'après M. Boussinesq, une théorie élastique qui en rend compte. Dans la théorie de la dispersion de M. Boussinesq, les hypothèses fondamentales sont que la densité et l'élasticité de l'éther restent les mêmes dans un milieu pondérable que dans le vide, mais qu'il y a action mutuelle de la matière pondérable et de l'éther. Les équations qui traduisent ces hypothèses sont, pour les milieux immobiles,

$$(1)\qquad \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mu\left(\Delta\xi - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + M(\xi_1 - \xi), \qquad \rho_1\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2} = M(\xi - \xi_1),$$

qui donnent, pour la vitesse dans le vide, $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ et dans le milieu, en supposant M très grand, $\sqrt{\frac{\mu}{\rho+\rho_1}}$. La partie principale de l'indice,

([1]) M. Poincaré signale (p. 349) une différence entre la théorie de Fresnel et celle de Neumann pour l'intensité de la lumière réfractée prise dans le milieu réfringent. Cette différence tient uniquement à ce que dans la théorie de Fresnel il aurait fallu prendre la force vive et non le carré de l'amplitude pour définir l'intensité réfractée (§ 56, p. 67).

celle qui est indépendante de la couleur, a ainsi pour valeur $n = \sqrt{\frac{\rho + \rho_1}{\rho}}$.

Dans le cas où le milieu pondérable est en mouvement, on peut admettre, comme fait d'expérience, que les réactions de l'éther sont nulles lorsque le corps se meut sans déformation; lorsque le corps vibre, tout en ayant un mouvement d'ensemble, les actions mutuelles dépendent seulement de l'écart ξ_1, η_1, ζ_1 de la molécule du corps dont la position d'équilibre passe actuellement par le point x, y, z. En un mot, M. Boussinesq admet que les actions mutuelles ne dépendent que de la distribution actuelle des déplacements autour du point étudié. Elles ont alors pour valeur au point (x, y, z), à chaque instant, $M(\xi - \xi_1)$, $M(\eta - \eta_1)$, $M(\zeta - \zeta_1)$; ξ_1, η_1, ζ_1 sont des fonctions de x, y, z et de t, et l'accélération effective du point auquel ces écarts se rapportent actuellement doit être évaluée en tenant compte du déplacement de la position d'équilibre. Appelant u, v, w la vitesse avec laquelle la position d'équilibre passe au point x, y, z, on a

$$\frac{D\xi_1}{Dt} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + u\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + v\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + w\frac{\partial \xi_1}{\partial z},$$

puis

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{D\xi_1}{Dt}\right) = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x\,\partial t} + 2v\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y\,\partial t} + 2w\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z\,\partial t} + u^2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$
$$+ v^2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} + w^2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} + 2vw\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y\,\partial z} + 2uw\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x\,\partial z} + 2uv\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x\,\partial y}.$$

On peut d'ailleurs négliger les carrés et les produits des composantes de la vitesse u, v, w, qui reste toujours très petite. Les équations relatives au corps pondérable deviennent ainsi

$$(2) \qquad \rho_1\left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x\,\partial t} + 2v\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y\,\partial t} + 2w\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z\,\partial t}\right) = M(\xi - \xi_1).$$

On élimine M par addition, et l'on a

$$\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \rho_1\left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x\,\partial t} + 2v\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y\,\partial t} + 2w\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z\,\partial t}\right) = \mu\left(\Delta\xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right).$$

Enfin on supposera encore que le produit $M(\xi - \xi_1)$ a une valeur finie, M étant très grand (comme pour la théorie de la dispersion), et qu'on a une première approximation satisfaisante en

prenant $\xi_1 = \xi$. L'équation à intégrer devient

$$(\rho + \rho_1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2u\rho_1\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial t} + 2v\rho_1\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial t} + 2w\rho_1\frac{\partial^2 \xi}{\partial z\, \partial t} = \mu\left(\Delta\xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right).$$

Sans passer par les équations générales, M. Poincaré a traité, à titre d'exemple, le cas d'une onde plane normale à l'axe des z, le milieu étant animé d'un mouvement normal à l'onde : ζ, u, v sont nuls, et ξ, η ne dépendent que de z. L'intégration se fait sans difficulté, et l'on trouve, conformément aux expériences de Fizeau et de Michelson, que la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu est augmentée de $w\frac{\rho_1}{\rho + \rho_1}$ ou $w\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

La valeur de n^2 ici introduite est la constante de la formule de dispersion. M. Poincaré ajoute que, d'après les expériences, la valeur de n que contient la formule est celle relative à la couleur considérée et qu'aucune théorie n'est satisfaisante à cet égard (¹). C'est, je crois, s'exagérer la précision dont ces expériences sont susceptibles. Ni les expériences de M. Fizeau ni celles de M. Michelson sur l'entraînement de l'éther ne permettent une telle affirmation; la limite de précision de ces dernières était environ 0,01, c'est-à-dire la dispersion de l'eau du rouge au violet extrême. L'expérience avec une lunette pleine d'eau ne comporte pas plus de précision : les expériences de M. Hirst (1873) laissent subsister des écarts d'une demi-seconde, c'est-à-dire de $\frac{1}{40}$ environ.

Nous conclurons donc, contrairement à M. Poincaré : il faut donner à l'indice n, qui entre dans la formule de Fresnel, une valeur correspondant à peu près aux radiations lumineuses; aucune expérience ne nous renseigne jusqu'à présent sur l'influence de la couleur. La théorie proposée dans l'Ouvrage de M. Poincaré paraît tout à fait satisfaisante.

(¹) Ce qu'ont montré les expériences de M. Mascart, c'est quelque chose de très différent. Dans la formule complète $V + w\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, il faut prendre pour V la vitesse de propagation relative non pas à la longueur d'onde réelle du mouvement lumineux, mais à la longueur d'onde apparente dans le milieu mobile. Cette circonstance paraît d'ailleurs d'accord avec la théorie de M. Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV et LXXVI; 1872).

Conclusions. — Les conclusions de M. Poincaré sont tout à fait agnostiques. Des théories dont le point de départ est fort différent conduisent aux mêmes lois numériques pour les phénomènes principaux. La raison mathématique, c'est que les équations sont linéaires; si elles admettent pour solution ξ, η, ζ, elles admettront aussi pour solution $\xi_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}$, $\eta_1 = \frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\zeta_1 = \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}$, et bien d'autres combinaisons encore. Si (ξ, η, ζ) est la vibration de Fresnel, perpendiculaire au plan de polarisation, (ξ_1, η_1, ζ_1) est celle de Neumann, parallèle au plan de polarisation.

La polarisation par diffraction semblait pouvoir permettre de décider entre les deux théories. « Mais certainement, dit M. Poincaré, les calculs étaient inexacts. » Les expériences n'ont d'ailleurs jamais pu être faites dans des conditions décisives; en particulier, dans les très intéressantes expériences de M. Gouy, la source et le point observé sont trop près du bord de l'écran pour que les calculs ordinaires de diffraction soient applicables.

C'est l'affirmation théorique de M. Poincaré sur laquelle je me permettrai de présenter quelques observations. Dans la théorie de la réflexion, ou de la double réfraction, on peut obtenir l'accord avec l'expérience en partant de l'une ou l'autre des deux hypothèses sur la position du plan de polarisation et de la vibration, mais c'est parce qu'il reste des hypothèses disponibles sur la densité et l'élasticité de l'éther. Rien de pareil dans la théorie de la diffraction. Tout se passe dans un milieu unique; l'état vibratoire au delà de l'ouverture est entièrement déterminé par l'état vibratoire dans le plan de l'ouverture; il ne reste rien d'arbitraire dans le résultat du calcul. Ce résultat le voici : Prenons comme ligne de repère la normale au plan de diffraction, c'est-à-dire, au plan du rayon incident et du rayon diffracté que l'on observe, et considérons deux vibrations incidentes situées dans deux plans rectangulaires, à $\pm 45°$ de la normale au plan de diffraction. Après la diffraction, toutes deux se sont rapprochées de la normale au plan de diffraction, le plan de la vibration a tourné pour l'une dans un sens, pour l'autre en sens opposé. Tel est le résultat de la théorie approchée donnée au Chapitre IV. Si ce résultat est exact, c'est-à-dire si l'angle de rotation n'est pas rigoureusement nul, il permet de choisir entre les deux théories : Si le plan de polarisation est

parallèle au plan de vibration (Neumann), l'angle aigu du plan de polarisation avec la normale au plan de diffraction diminue par la diffraction. Il augmente au contraire si le plan de polarisation est normal à la vibration (Fresnel). L'expérience est difficile à faire à cause de la petitesse de l'effet à mesurer; mais il me semble que, si l'on réussit à la faire en ne faisant intervenir que la diffraction par des écrans noirs, elle sera décisive.

On peut aussi recourir à la comparaison des intensités de lumières diffractées dans la même direction, et provenant de vibrations, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire au plan de diffraction. Les expériences connues sont plutôt favorables à l'hypothèse de Fresnel.

La question peut encore se poser autrement : Les vibrations transversales ξ, η, ζ sont nécessairement accompagnées de rotations élémentaires $\zeta'_y - \eta'_z$, ..., également transversales, mais perpendiculaires aux vibrations. Le plan de polarisation est-il parallèle aux vibrations (Neumann) ou aux rotations qui les accompagnent (Fresnel)? C'est sous la même forme que la question se pose dans la théorie électromagnétique de la lumière. Le plan de polarisation est-il parallèle à la force magnétique ou à la force électromotrice? Et l'on peut imaginer une forme d'expérience, que je me réserve de décrire ailleurs, bien que nos moyens d'observation manquent encore de sensibilité, pour attaquer la question ainsi posée.

Je crois donc qu'on est là en présence d'un problème, non pas insoluble, mais seulement non encore résolu.

De même, les diverses théories de la dispersion et de la double réfraction ne resteront pas au même plan pour le physicien, après la lecture de ce Livre. L'une d'elles, c'est du moins mon impression, passera nettement au premier plan, c'est celle qui fait intervenir directement les actions mutuelles du corps pondérable et de l'éther du vide, mais à la condition d'exprimer complètement ces actions mutuelles. Pour la dispersion, un travail tout récent de M. Carvallo montre que la formule à trois constantes seulement $\frac{1}{n^2} = a + \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2$ représente exactement des expériences de M. Langley sur le sel gemme depuis la longueur d'onde de $\frac{5}{1000}$ de millimètre jusqu'à l'extrême violet, $\frac{4}{10000}$ de millimètre. Elle satis-

fait de même aux mesures sur les radiations lumineuses et ultraviolettes des substances peu absorbantes, et les indications de Ketteler, de Selmeyer, d'Helmholtz montrent que le développement de la même idée fondamentale conduit nécessairement à l'explication de la dispersion anormale. Enfin elle conduit directement à l'explication de l'aberration astronomique.

La théorie de la périodicité de distribution de l'éther semble pouvoir rendre compte du terme en λ^2 et même de la dispersion anomale, par un simple changement dans les hypothèses relatives à l'ordre de grandeur des rayons d'activité et des distances moléculaires. Quant à l'aberration, peut-être pourrait-on l'expliquer en regardant l'excès périodique de densité sur l'éther du vide comme se propageant avec le solide, entraînée par son mouvement. Mais les calculs semblent devoir être inextricables, et les constantes des formules définitives seront indépendantes, tandis que dans l'autre théorie elles ont entre elles des relations susceptibles de contrôle. En outre, il restera toujours à se demander : Quelles sont les conditions d'équilibre de l'éther à la limite de deux corps différents? Quelles sont les conditions de stabilité de l'équilibre?

Mes préférences sont fondées, comme on voit, sur d'autres raisons que la neutralité de M. Poincaré. En me plaçant à son point de vue, je tombe d'accord avec lui, que toutes ces théories sont à peu près équivalentes quant à l'explication numérique des faits. On ne m'étonnerait même que médiocrement si l'on me montrait un jour une théorie numériquement satisfaisante fondée sur l'hypothèse de l'émission.

Tous ceux qu'intéressent les théories de l'Optique liront cet Ouvrage avec fruit. Du rapprochement des divers points de vue, ceux mêmes qui croyaient connaître ces théories, pour les avoir étudiées isolément, verront surgir de nouvelles questions; car, s'il n'est presque pas un Chapitre qui n'ajoute à nos connaissances, il n'en est pas un non plus qui ne suggère de nouvelles recherches.

Il paraît que le Cours du second semestre *Sur la théorie électromagnétique de la lumière* est sous presse. Nous l'attendrons avec impatience, car il ne peut manquer d'être plus instructif encore que le Volume actuel.

M. Br.

SAINT-GERMAIN (A. DE). — RECUEIL D'EXERCICES SUR LA MÉCANIQUE RATIONNELLE, A L'USAGE DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. Nouvelle édition, entièrement refondue. 1 vol. in-8°; x-560 p. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1889 (1).

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition du *Recueil d'Exercices sur la Mécanique* de M. de Saint-Germain. Cet excellent Livre, encore amélioré, continuera de rendre les plus grands services aux candidats à la Licence et à l'Agrégation des Sciences mathématiques. L'un des principaux avantages de l'enseignement de la Mécanique rationnelle, tel qu'il est constitué dans nos Facultés, est de fournir aux étudiants l'occasion de se familiariser, par de nombreuses applications, avec les méthodes du Calcul intégral, avec la discussion des formules et leur traduction géométrique ou mécanique. A ce résultat si essentiel, les problèmes classiques, traités par le professeur dans son cours, ne suffisent point : il en faut d'autres sur lesquels l'étudiant s'exerce lui-même; mais un recueil d'énoncés risquerait de rebuter un débutant, peu habile à mettre les problèmes en équation, peu habitué à en discuter la solution. Sur ces deux points, le Livre de M. de Saint-Germain lui fournit les renseignements désirables, et les meilleurs modèles.

Nous ne reviendrons pas sur l'analyse de l'Ouvrage, dont le plan n'a pas été changé. Disons seulement que cette seconde édition est grossie d'une centaine de pages, bien que certains développements théoriques, relatifs aux équations d'Euler, de Lagrange, d'Hamilton, etc., aient pu être supprimés sans inconvénient, en raison de la publication d'Ouvrages récents ou de progrès réalisés partout dans l'enseignement. C'est dire que le nombre des problèmes traités ou simplement énoncés a été considérablement augmenté.

Quelques indications théoriques nouvelles ont été aussi introduites : nous signalerons celles qui se rapportent à l'équilibre astatique, aux conditions, données par Dirichlet, pour qu'une fonc-

(1) Voir *Bulletin*, I_1, p. 106.

tion soit un potentiel, aux herpolhodies, au gyroscope de Foucault. Parmi les problèmes nouveaux figurent les questions de Mécanique qui ont été proposées aux examens d'agrégation depuis la publication de la première édition. Pendant la plus grande partie de cette période de temps, M. de Saint-Germain était membre du jury d'examen, et l'on peut supposer, sans trop d'invraisemblance, que c'est lui qui a donné la plupart des sujets de composition sur la Mécanique rationnelle. Le lecteur pourra juger, par le choix de ces questions, du soin que l'auteur apportait dans ces délicates et difficiles fonctions.

J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LORIA (G.). — DIE HAUPTSÄCHLICHSTEN THEORIEN DER GEOMETRIE IN IHRER FRÜHEREN UND HEUTIGEN ENTWICKELUNG. HISTORISCHE MONOGRAPHIE. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von *F. Schütte*, mit einem Vorworte von Professor *R. Sturm*. 1 vol. in-8°, IV-132 p. Leipzig, Teubner, 1888.

Le travail de M. Gino Loria avait paru dans le XXXVIIIe Volume de la seconde série des *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino;* M. Schütte a rendu un véritable service en l'en détachant et en le traduisant, d'autant que l'auteur a pu profiter de cette occasion pour perfectionner et compléter son œuvre sur plusieurs points.

Sous cette forme, la monographie de M. Loria a sa place marquée dans toutes les bibliothèques mathématiques; et l'on ne manquera point de la consulter avant d'entreprendre l'étude d'une branche quelconque de la Géométrie ou de commencer des recherches sur un sujet déterminé. La richesse des renseignements bibliographiques qu'elle contient est en effet merveilleuse, et, à en juger par les quelques points sur lesquels nous avons pu l'étudier, ces renseignements sont aussi complets qu'il est possible. En outre, M. Loria a indiqué, çà et là, quelques points où les théories actuelles auraient besoin d'être complétées : ces indications seront sans doute bien accueillies des travailleurs.

On conçoit que le Livre de M. Loria, qui, le plus souvent, se réduit à une nomenclature de noms d'auteurs et de titres de Mémoires, se refuse à toute analyse. Il faut se borner à le recommander. Voici, toutefois, la Table des matières, qui donnera quelque idée de l'ordre adopté par l'auteur.

I. La Géométrie avant le milieu du XIXe siècle.

II. Théorie des courbes planes.

III. Théorie des surfaces.

IV. Recherches sur la forme des courbes et des surfaces. Géométrie numérique.

V. Théorie des courbes à double courbure.

VI. Représentations, correspondances, transformations.
VII. Géométrie des droites.
VIII. Géométrie non euclidienne.
IX. Géométrie à n dimensions. Conclusion. J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE LA GÉOMÉTRIE QUI FORME LE LIEN ENTRE LA GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE ET LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. FERDINAND CASPARY.

Dans deux Mémoires, dont l'un ([1]) est inséré au tome C du *Journal de M. Kronecker* et l'autre au tome XI de ce *Bulletin*, j'ai établi un théorème général, relatif à la génération des courbes en espace et j'y ai proposé, en outre, de nouvelles générations et propriétés des cubiques gauches.

La méthode employée dans ces deux Mémoires y est expliquée sous une forme purement géométrique; mais je me suis déjà permis de faire remarquer dans les préambules qu'elle repose sur des principes tout à fait algébriques.

Le présent Mémoire est consacré à l'exposition de ces principes et au développement d'une méthode générale de la Géométrie qui est basée sur eux et qui forme le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique.

Les principes dont il s'agit sont dus au génie de Cauchy et de M. H. Grassmann. L'illustre académicien de Paris les a proposés dans plusieurs Mémoires des plus importants et il les a appliqués à de nombreuses questions d'Analyse, d'Algèbre, de Géométrie et de Mécanique ([2]). Le célèbre géomètre de Stettin les a expli-

---

([1]) Pour ce Mémoire on pourrait consulter l'exposition élégante que M. Carvallo en a donnée dans le tome XV du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

([2]) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVI, p. 70, 75, 129 et 161; t. XLII, p. 366.

Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, t. III, p. 137 et 305; t. IV, p. 5 et 356.

qués, en toute leur généralité, dans un Ouvrage magistral intitulé : *Die Ausdehnungslehre* (Berlin, 1844, 2e édition, 1862), qui n'est pas encore estimé comme il le mériterait. Dans quelques Mémoires faisant partie du *Journal de Crelle*, M. Grassmann a déduit, comme conséquences immédiates de ses principes, des générations ingénieuses des courbes planes et des surfaces, dont celles relatives aux surfaces du troisième ordre sont devenues les plus connues.

Le Mémoire actuel est divisé en trois Parties. Dans la première Partie je propose, pour l'espace ordinaire, la notion de produit extérieur et son application en Géométrie, notion qui établit le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique. Au moyen de quelques formules, déduites d'une part comme applications de la théorie exposée, j'établis, d'autre part, dans la deuxième Partie de ce Mémoire, des théorèmes relatifs à la génération des surfaces, des complexes, des courbes gauches et des congruences de droites. Après avoir montré, par quelques exemples, que l'on peut transformer rapidement en des formules de la Géométrie analytique les produits extérieurs, même les plus compliqués, je propose encore une méthode pour exprimer, au moyen de paramètres, les coordonnées d'une courbe gauche, représentée par un produit extérieur.

Dans la troisième Partie se trouve la généralisation des notions et des résultats qui ont été donnés dans les Parties précédentes. En me plaçant à un point de vue algébrique, j'explique la notion générale de produit extérieur et celle de complément; j'indique que l'on en peut déduire une théorie simplifiée des déterminants, et je montre que les idées proposées trouvent une de leurs interprétations au moyen de la Géométrie à n dimensions. En terminant, je touche enfin la notion de produit intérieur et son application aux relations métriques de la Géométrie.

La méthode que je vais proposer offre plusieurs avantages.

D'abord elle s'adapte très bien à toutes les questions de la Géométrie synthétique et permet d'examiner aisément des problèmes qui, étudiés par une autre méthode, offrent de plus grandes difficultés [1]. De plus cette méthode introduit dans la Géométrie

[1] Au moyen de cette méthode j'ai trouvé une construction très simple du

synthétique un calcul simple, pour ainsi dire, une analyse géométrique dont les formules bien concises se transforment tout de suite en des formules de la Géométrie analytique.

Dès lors cette méthode rattache l'intuition au calcul : elle fait entrer aussi dans le domaine de l'Algèbre et de l'Analyse les découvertes dues à Chasles, Poncelet, Steiner, à MM. Cremona, Darboux, Hauck, de Jonquières, Mannheim, Reye, Schröter, Sturm, Veronese, Zeuthen et à d'autres géomètres qui ont enrichi, par leurs recherches, la Géométrie synthétique. Du reste, cette méthode transforme les résultats de la Géométrie synthétique en des identités algébriques qui s'appliquent, avec succès, dans toutes les autres parties des Mathématiques.

I.

PRODUITS EXTÉRIEURS. LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE ORDINAIRE. LIEN QU'ILS ÉTABLISSENT ENTRE LA GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE ET LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. Soient P, Q, R, S quatre points quelconques dans l'espace et P_i, Q_i, R_i, S_i $(i=1, 2, 3, 4)$ leurs coordonnées homogènes par rapport à un tétraèdre de référence. En désignant par $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, $E^{(4)}$ quatre expressions auxiliaires dont je vais développer la nature et les propriétés, je dis que les formes

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P &= P_1 E^{(1)} + P_2 E^{(2)} + P_3 E^{(3)} + P_4 E^{(4)},\\ Q &= Q_1 E^{(1)} + Q_2 E^{(2)} + Q_3 E^{(3)} + Q_4 E^{(4)},\\ R &= R_1 E^{(1)} + R_2 E^{(2)} + R_3 E^{(3)} + R_4 E^{(4)},\\ S &= S_1 E^{(1)} + S_2 E^{(2)} + S_3 E^{(3)} + S_4 E^{(4)} \end{aligned}\right.$$

représentent les quatre *points* P, Q, R, S en ce sens que les coefficients des expressions $E^{(i)}$ fournissent les coordonnées homogènes P_i, Q_i, R_i, S_i des points P, Q, R, S.

2. En Géométrie analytique on démontre que les coordonnées de la droite g qui passe par les deux points P et Q sont proportionnelles aux six mineurs

$$g_{12} = P_1 Q_2 - P_2 Q_1, \quad g_{13} = P_1 Q_3 - P_3 Q_1, \quad \ldots, \quad g_{34} = P_3 Q_4 - P_4 Q_3.$$

---

huitième point d'intersection de trois surfaces du second ordre passant par sept points donnés. Voir *Journal de M. Kronecker*, t. IC, p. 198.

Pour obtenir ces mineurs par un calcul simple, je forme le produit PQ et j'y remplace les produits $E^{(i)}E^{(i)}$; $E^{(i)}E^{(k)}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ par les expressions auxiliaires $[E^{(i)}E^{(i)}]$; $[E^{(i)}E^{(k)}]$ que je soumets aux conditions $[E^{(i)}E^{(i)}] = 0$; $[E^{(i)}E^{(k)}] = -[E^{(k)}E^{(i)}]$ $(i \neq k)$. Si l'on désigne alors par $[PQ]$ l'expression qui provient, de cette manière, du produit PQ, on trouve

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} [PQ] = g = {} & g_{12}[E^{(1)}E^{(2)}] + g_{13}[E^{(1)}E^{(3)}] + g_{14}[E^{(1)}E^{(4)}] \\ & + g_{23}[E^{(2)}E^{(3)}] + g_{24}[E^{(2)}E^{(4)}] + g_{34}[E^{(3)}E^{(4)}], \end{aligned} \right.$$

où

$$g_{ik} = P_i Q_k - P_k Q_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

D'une façon analogue on passe du produit PQR à l'expression $[PQR]$. En remplaçant dans le produit PQR les produits $E^{(i)}E^{(i)}E^{(i)}$; $E^{(i)}E^{(i)}E^{(k)}$; $E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}$ $(i, k, l = 1, 2, 3, 4)$ par les expressions auxiliaires $[E^{(i)}E^{(i)}E^{(i)}]$; $[E^{(i)}E^{(i)}E^{(k)}]$; $[E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}]$, soumises aux conditions

$$[E^{(i)}E^{(i)}E^{(i)}] = 0, \qquad [E^{(i)}E^{(i)}E^{(k)}] = 0;$$
$$[E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}] = \quad [E^{(k)}E^{(l)}E^{(i)}] = \quad [E^{(l)}E^{(i)}E^{(k)}]$$
$$= -[E^{(i)}E^{(l)}E^{(k)}] = -[E^{(k)}E^{(i)}E^{(l)}] = -[E^{(l)}E^{(k)}E^{(i)}],$$

on obtient

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} [PQR] = \gamma = {} & \gamma_1[E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] - \gamma_2[E^{(1)}E^{(3)}E^{(4)}] \\ & + \gamma_3[E^{(1)}E^{(2)}E^{(4)}] - \gamma_4[E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}], \end{aligned} \right.$$

où

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 \end{vmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_4 & Q_4 & R_4 \end{vmatrix}, \qquad \gamma_4 = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix}.$$

Les conditions que je viens d'établir peuvent être énoncées ainsi :

Les expressions

$$[E^{(i_1)}E^{(i_2)}], \quad [E^{(i_1)}E^{(i_2)}E^{(i_3)}], \quad (i_1, i_2, i_3 = 1, 2, 3, 4)$$

s'évanouissent si $E^{(i_\lambda)} = E^{(i_\nu)}$, et *leur signe se change* si l'on *échange* $E^{(i_\lambda)}$ *pour* $E^{(i_\nu)}$ où $\lambda \gtrless \nu$. En appliquant ces conditions

aussi aux expressions

$$[E^{(i_1)}E^{(i_2)}E^{(i_3)}E^{(i_4)}] \qquad (i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2, 3, 4)$$

et en ajoutant la dernière condition que l'expression

$$[E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}E^{(m)}] \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4; \quad i \neq k \neq l \neq m)$$

est égale à l'unité positive ou négative suivant que les indices i, k, l, m appartiennent ou non à la même classe que les nombres 1, 2, 3, 4, on déduit du produit PQRS l'expression

$$(4) \qquad [PQRS] = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 & S_4 \end{vmatrix}.$$

3. D'après des formules bien connues de la Géométrie analytique on sait que les mineurs $\gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ représentent les coordonnées du plan qui passe par les trois points P, Q, R et que le déterminant $\Sigma \pm P_1 Q_2 R_3 S_4$ représente, à une constante près, le volume du tétraèdre dont les points P, Q, R, S forment les sommets; par conséquent, en vertu des formules (2), (3) et (4), on peut dire :

L'expression

[PQ] représente la *droite* qui joint les deux points P et Q;
[PQR] représente le *plan* qui passe par les trois points P, Q, R;
[PQRS] représente le *tétraèdre* dont les quatre points P, Q, R, S forment les sommets.

Si les points P et Q se confondent, l'expression [PQ] est égale à zéro. De même, si le point R est situé sur la droite passant par P et Q, il y a une relation linéaire entre les coordonnées P_i, Q_i, R_i; par conséquent, dans ce cas, les mineurs γ_i sont égaux à zéro et l'expression [PQR] s'évanouit. Enfin, si les points P, Q, R, S sont situés dans le même plan, l'expression [PQRS] est égale à o. Donc :

L'égalité

[PQ] = o exprime que les deux points P et Q sont situés *l'un sur l'autre*.

$[PQR] = 0$ exprime que les trois points P, Q, R sont situés *sur la même droite*.

$[PQRS] = 0$ exprime que les quatre points P, Q, R, S sont situés *dans le même plan*.

Au dernier cas les deux droites $g = [PQ]$ et $h = [RS]$ se rencontrent; donc :

L'égalité $[gh] = 0$ exprime que les deux droites g et h *se rencontrent*.

Comme on a, d'après la formule (4),

$$(5) \qquad [gh] = g_{12}h_{34} + g_{13}h_{42} + g_{14}h_{23} + g_{23}h_{14} + g_{24}h_{31} + g_{34}h_{12},$$

où

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &= P_iQ_k - P_kQ_i, \\ h_{ik} &= R_iS_k - R_kS_i, \end{aligned}\right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

l'égalité $[gh] = 0$ fournit, sous une forme très simple, la condition connue que les droites g et h se rencontrent.

4. J'appellerai dès à présent les points, les droites et les plans *éléments* dans l'espace et je dirai que ces éléments sont *incidents* si l'un est situé sur l'autre. Au moyen de ces définitions on peut énoncer ainsi les résultats obtenus :

1° *Les expressions* P, Q, R, S; [PQ], [PR], ...; [PQR], [PQS], ... *représentent les éléments dans l'espace en ce sens que les coefficients des expressions auxiliaires* $E^{(i)}$; $[E^{(i)}E^{(k)}]$; $[E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}]$ *fournissent leurs coordonnées homogènes;*

2° *Les expressions* [PQ], [PQR], [PQRS] *sont égales à zéro si leurs éléments sont incidents et* vice versa.

5. Comme les expressions [PQ], [PQR], [PQRS] ne définissent une droite, un plan et un tétraèdre que dans le cas où, de leurs éléments, l'un est *au dehors* de l'autre, et comme ces expressions sont déduites des *produits*, je les appellerai *produits extérieurs*, en adoptant une notation due à M. H. Grassmann (1).

Il est bon de remarquer que *les produits extérieurs* [PQ], [PQR], [PQRS] *ne sont point des produits :* ce sont des expres-

(1) Voir *Journal de Crelle*, t. 49, p. 150.

sions, composées de *déterminants*. Par conséquent le résultat, à première vue un peu surprenant, que ces produits extérieurs changent de signe si l'on y échange des éléments P, Q, R, S l'un pour l'autre, n'est que la conséquence d'un théorème bien connu des déterminants.

6. Si l'on égale, dans les expressions (1), les coordonnées P_1, Q_2, R_3, S_4 à l'unité positive et les autres coordonnées à zéro, on a

$$E^{(1)} = P, \qquad E^{(2)} = Q, \qquad E^{(3)} = R, \qquad E^{(4)} = S.$$

Il résulte de là que $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, $E^{(4)}$, introduits comme des expressions auxiliaires, peuvent dès lors être envisagés eux-mêmes comme quatre *points*. En choisissant ces points comme les *sommets* du tétraèdre de référence, ses *arêtes* et ses *faces* sont représentées par les produits extérieurs

$$[E^{(i)}E^{(k)}], \quad [E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}].$$

Cela établi, les formules (1), (2), (3) mettent en évidence que les *éléments* dans l'espace peuvent être représentés comme *des fonctions linéaires des éléments correspondants, relatifs au tétraèdre de référence*. Les coefficients qui entrent dans ces fonctions linéaires sont les coordonnées homogènes des éléments représentés.

7. Pour examiner la nature de ces coordonnées, je tire de l'expression

$$P = P_1 E^{(1)} + P_2 E^{(2)} + P_3 E^{(3)} + P_4 E^{(4)}$$

la relation

$$\begin{aligned}[PE^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = {} & P_1[E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] + P_2[E^{(2)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] \\ & + P_3[E^{(3)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] + P_4[E^{(4)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}].\end{aligned}$$

D'après les conditions auxquelles j'ai soumis les

$$[E^{(i_1)}E^{(i_2)}E^{(i_3)}E^{(i_4)}],$$

on sait que le produit extérieur $[E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}]$ est égal à l'unité positive et que les autres produits extérieurs qui renferment deux éléments égaux s'évanouissent. Par conséquent, la dernière relation prend la forme plus simple

$$[PE^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = P_1.$$

qui met en évidence que la coordonnée P_1 est proportionnelle au volume du tétraèdre dont les points P, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, $E^{(4)}$, *pris dans cet ordre*, forment les sommets.

Désignons dès à présent par i, k, l, m les indices 1, 2, 3, 4 pris dans un tel ordre que l'on a

$$[E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}E^{(m)}] = [E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = +1,$$

ou, en d'autres termes, désignons par i, k, l, m $(i \neq k \neq l \neq m)$ les indices 1, 2, 3, 4, choisis de telle manière que les permutations i, k, l, m appartiennent à la même classe que la suite ordinaire 1, 2, 3, 4.

Alors on trouve, pour les coordonnées P_i,

$$P_i = [PE^{(k)}E^{(l)}E^{(m)}],$$

et d'une façon analogue on déduit des formules (2) et (3), pour les coordonnées g_{ik} et γ_i, les valeurs

$$g_{ik} = [PQE^{(l)}E^{(m)}],$$
$$\gamma_i = [E^{(i)}PQR].$$

Ces expressions prouvent que les coordonnées homogènes P_i, g_{ik}, γ_i du point P, de la droite $g = [PQ]$ et du plan $\gamma = [PQR]$, sont également des coordonnées *tétraédriques*.

8. Pour rapprocher plus encore les notions que j'ai établies jusqu'à présent de celles que l'on emploie ordinairement en Géométrie analytique, je remarque que le plan, représenté dans notre théorie par le produit extérieur [PQR], est défini, en Géométrie analytique, par l'*équation* $[PQRX] = 0$, X étant un point variable dont X_i sont les coordonnées homogènes. D'une façon analogue, le point P, représenté dans notre théorie par l'expression

$$P = P_1 E^{(1)} + P_2 E^{(2)} + P_3 E^{(3)} + P_4 E^{(4)},$$

est défini, en Géométrie analytique, par l'équation

$$[P\xi] = P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + P_3\xi_3 + P_4\xi_4 = 0,$$

où ξ_i sont les coordonnées homogènes d'un plan variable ξ. Quant à la représentation d'une droite, j'ai choisi les expressions de leurs coordonnées, telles qu'on les emploie ordinairement en Géométrie

analytique, comme point de départ pour les recherches présentes.

D'après ces remarques, on voit que les coordonnées courantes dont on fait usage en Géométrie analytique sont remplacées, dans notre théorie, par les expressions $E^{(i)}$ et leurs produits extérieurs. L'introduction de ces expressions auxiliaires offre l'avantage *d'éviter les éliminations*. Les résultats qui proviennent en Géométrie analytique d'*éliminations* quelquefois très pénibles sont fournis, dans notre théorie, par *un simple calcul*.

J'appellerai ce calcul, dès à présent, *multiplication extérieure*, parce qu'en résultent les produits extérieurs.

9. On a vu déjà que la multiplication extérieure de deux et de trois points fournit la droite et le plan qui en proviennent par *des constructions linéaires*. Je vais généraliser ce résultat de telle manière que la multiplication extérieure des éléments quelconques, fussent-ils des points, des droites ou des plans, provenant soit de la jonction, soit de l'intersection des éléments originaux, fournisse l'élément qui en est déterminé par des constructions linéaires.

Commençons par des éléments qui proviennent de l'intersection de deux et de trois plans.

En désignant ces plans par π, $\varkappa$, ρ et leurs coordonnées homogènes par π_i, $\varkappa_i$, ρ_i, on a, d'après la formule (3),

$$\pi = \pi_1 \varepsilon^{(1)} + \pi_2 \varepsilon^{(2)} + \pi_3 \varepsilon^{(3)} + \pi_4 \varepsilon^{(4)},$$
$$\varkappa = \varkappa_1 \varepsilon^{(1)} + \varkappa_2 \varepsilon^{(2)} + \varkappa_3 \varepsilon^{(3)} + \varkappa_4 \varepsilon^{(4)},$$
$$\rho = \rho_1 \varepsilon^{(1)} + \rho_2 \varepsilon^{(2)} + \rho_3 \varepsilon^{(3)} + \rho_4 \varepsilon^{(4)},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon^{(1)} = [E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)}], & \varepsilon^{(2)} = -[E^{(1)} E^{(3)} E^{(4)}], \\ \varepsilon^{(3)} = [E^{(1)} E^{(2)} E^{(4)}], & \varepsilon^{(4)} = -[E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)}]. \end{array}\right.$$

Comme il y a en Géométrie une dualité absolue entre les points et les plans, *je soumets les* $\varepsilon^{(i)}$ *et leurs produits extérieurs aux mêmes conditions que j'ai établies pour les* $E^{(i)}$ *et leurs produits extérieurs*.

Alors les produits extérieurs $[\pi\varkappa]$, $[\pi\varkappa\rho]$, $[\pi\varkappa\rho\sigma]$, où

$$\sigma = \sigma_1 \varepsilon^{(1)} + \sigma_2 \varepsilon^{(2)} + \sigma_3 \varepsilon^{(3)} + \sigma_4 \varepsilon^{(4)}$$

représente un quatrième plan, sont définis par des expressions

qui proviennent des formules (2), (3), (4), si l'on y remplace les majuscules de l'alphabet latin par les minuscules de l'alphabet grec.

On voit immédiatement que le produit extérieur $[\pi\varkappa]$ représente la droite d'intersection des deux plans π et $\varkappa$, et que le produit extérieur $[\pi\varkappa\rho]$ représente le point d'intersection des trois plans π, $\varkappa$, ρ.

Pour exprimer cette droite et ce point au moyen des arêtes et des sommets du tétraèdre de référence, c'est-à-dire au moyen des produits extérieurs $[E^{(i)}E^{(k)}]$ et des $E^{(i)}$, je remarque que les deux faces du tétraèdre de référence $\varepsilon^{(l)}$ et $\varepsilon^{(m)}$ se coupent suivant l'arête $[E^{(i)}E^{(k)}]$, et que le point d'intersection des trois faces $\varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(k)}$, $\varepsilon^{(l)}$ est le sommet $E^{(m)}$.

Pour cette raison, je pose

$$\text{(II*)} \qquad [\varepsilon^{(l)}\varepsilon^{(m)}] = [E^{(i)}E^{(k)}],$$

$$\text{(III*)} \qquad [\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(k)}\varepsilon^{(l)}] = E^{(m)}.$$

On tire de l'équation (II*)

$$[\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(k)}\varepsilon^{(l)}\varepsilon^{(m)}] = [E^{(l)}E^{(m)}E^{(i)}E^{(k)}],$$

ou

$$\text{(V)} \qquad [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(3)}\varepsilon^{(4)}] = [E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = +1.$$

Enfin on déduit des deux équations (II*) et (III*) :

$$\text{(IV*)} \qquad [E^{(i)}E^{(k)} \quad \varepsilon^{(i)}] = E^{(k)}.$$

Comme les équations qui découlent des conditions (II*) et (III*) sont appliquées fréquemment, je les réunis dans le Tableau suivant :

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{llll} [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}] = & [E^{(3)}E^{(4)}] & [\varepsilon^{(3)}\varepsilon^{(4)}] = & [E^{(1)}E^{(2)}] \\ [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(3)}] = - & [E^{(2)}E^{(4)}] & [\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(4)}] = - & [E^{(1)}E^{(3)}] \\ [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(4)}] = & [E^{(2)}E^{(3)}] & [\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(3)}] = & [E^{(1)}E^{(4)}] \end{array} \right.$$

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(3)}\varepsilon^{(4)}] = -E^{(1)}, \\ [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(3)}\varepsilon^{(4)}] = E^{(2)}, \\ [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(4)}] = -E^{(3)}, \\ [\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(3)}] = E^{(4)}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [E^{(1)}E^{(2)} \quad E^{(1)}E^{(3)}E^{(4)}] = -[E^{(1)}E^{(3)} \quad E^{(1)}E^{(2)}E^{(4)}] = [E^{(1)}E^{(4)} \quad E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}] = E^{(1)} \\ [E^{(1)}E^{(2)} \quad E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = -[E^{(2)}E^{(3)} \quad E^{(1)}E^{(2)}E^{(4)}] = [E^{(2)}E^{(4)} \quad E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}] = E^{(2)} \\ [E^{(1)}E^{(3)} \quad E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = -[E^{(2)}E^{(3)} \quad E^{(1)}E^{(3)}E^{(4)}] = [E^{(3)}E^{(4)} \quad E^{(1)}E^{(2)}E^{(3)}] = E^{(3)} \\ [E^{(1)}E^{(4)} \quad E^{(2)}E^{(3)}E^{(4)}] = -[E^{(2)}E^{(4)} \quad E^{(1)}E^{(3)}E^{(4)}] = [E^{(3)}E^{(4)} \quad E^{(1)}E^{(2)}E^{(4)}] = E^{(4)} \end{array} \right.$$

Ceci établi, l'exposition des principes de notre théorie est terminée.

10. Pour déduire de ces principes quelques conséquences immédiates, je vais exprimer d'abord le point d'intersection d'une droite $g = [AP]$ et d'un plan ρ. Ce point est représenté par le produit extérieur $[AP \quad \rho]$.

En posant

$$\begin{aligned} A &= A_1 E^{(1)} + A_2 E^{(2)} + A_3 E^{(3)} + A_4 E^{(4)}, \\ P &= P_1 E^{(1)} + P_2 E^{(2)} + P_3 E^{(3)} + P_4 E^{(4)}, \\ \rho &= \rho_1 \varepsilon^{(1)} + \rho_2 \varepsilon^{(2)} + \rho_3 \varepsilon^{(3)} + \rho_4 \varepsilon^{(4)}, \\ f_{ik} &= A_i P_k - A_k P_i, \end{aligned}$$

on trouve

$$[AP \quad \rho] = \left[f_{12}[E^{(1)} E^{(2)}] + \ldots f_{34}[E^{(3)} E^{(4)}] \qquad \rho_1 \varepsilon^{(1)} + \ldots \rho_4 \varepsilon^{(4)}\right].$$

A l'aide des formules (III*) ou (III) et en tenant compte des identités

$$\begin{aligned} & f_{1k}\rho_1 + f_{2k}\rho_2 + f_{3k}\rho_3 + f_{4k}\rho_4 \\ & \quad = P_k(A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3\rho_3 + A_4\rho_4) - A_k(P_1\rho_1 + P_2\rho_2 + P_3\rho_3 + P_4\rho_4), \end{aligned}$$

on obtient

$$(6) \qquad [AP \quad \rho] = [A\rho]P - [P\rho]A.$$

Cette formule exprime, sous une forme nouvelle, un résultat bien connu que l'on doit à M. *Hesse*. On sait qu'un point quelconque de la droite passant par les points A et P, dont les coordonnées sont A_i et P_i, peut être représenté par l'expression $\mathfrak{L} A_i + \mathfrak{M} P_i$. La formule (6) met en évidence que les coefficients $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont proportionnels aux expressions

$$\begin{aligned} -[P\rho] &= -(P_1\rho_1 + P_2\rho_2 + P_3\rho_3 + P_4\rho_4), \\ [A\rho] &= A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3\rho_3 + A_4\rho_4, \end{aligned}$$

si ce point devient le point d'intersection de la droite $[AP]$ et du plan ρ dont ρ_i sont les coordonnées homogènes.

Admettons maintenant que le plan ρ passe par les points B, C, D. Alors le point d'intersection de la droite $[AP]$ et du plan $[BCD]$, savoir le point $[[AP][BCD]]$, peut être représenté par les trois points B, C, D. En effet, au moyen des formules (III*) ou

(III), on trouve aisément

$$(7)\qquad [\mathrm{AP}\ \ \mathrm{BCD}] = [\mathrm{APCD}]\mathrm{B} + [\mathrm{APDB}]\mathrm{C} + [\mathrm{APBC}]\mathrm{D}.$$

Quant à la notation, j'ai supprimé, dans le premier membre, les crochets intérieurs; j'adopterai cette abréviation dès à présent pour la notation de tels éléments qui renferment d'autres éléments eux mêmes composés.

Comme on a, d'après la formule (6),

$$[\mathrm{AP}\ \ \mathrm{BCD}] = [\mathrm{ABCD}]\mathrm{P} - [\mathrm{PBCD}]\mathrm{A},$$

on déduit de la formule (7) la relation

$$(8)\quad [\mathrm{ABCD}]\mathrm{P} = [\mathrm{PBCD}]\mathrm{A} - [\mathrm{PCDA}]\mathrm{B} + [\mathrm{PDAB}]\mathrm{C} - [\mathrm{PABC}]\mathrm{D}.$$

Dans les formules (6), (7), (8) les coordonnées des éléments ont disparu : comme en Géométrie synthétique, les éléments y entrent eux-mêmes. C'est à cause de cela que ces formules et toutes les autres, fournies par notre théorie, sont beaucoup plus simples et plus concises que les formules correspondantes de la Géométrie analytique en lesquelles on peut les transformer immédiatement.

11. En désignant par ξ_i les coordonnées homogènes d'un plan quelconque, on tire de la formule (8)

$$[\mathrm{ABCD}][\mathrm{P}\xi] = [\mathrm{PBCD}][\mathrm{A}\xi] - [\mathrm{PCDA}][\mathrm{B}\xi] + [\mathrm{PDAB}][\mathrm{C}\xi] - [\mathrm{PABC}][\mathrm{D}\xi];$$

comme [ABCD], [PBCD], ... désignent des déterminants et comme $[\mathrm{P}\xi]$, $[\mathrm{A}\xi]$, ... désignent les expressions $\mathrm{P}_1\xi_1 + \ldots + \mathrm{P}_4\xi_4$, $\mathrm{A}_1\xi_1 + \ldots + \mathrm{A}_4\xi_4$, on a, dans la dernière formule, une identité bien connue et fréquemment employée. Si l'on définit par les équations

$$[\mathrm{P}\xi] = 0,\qquad [\mathrm{A}\xi] = 0,\qquad [\mathrm{B}\xi] = 0,\qquad [\mathrm{C}\xi] = 0,\qquad [\mathrm{D}\xi] = 0$$

cinq points dans l'espace, cette formule fournit le résultat connu que le premier membre de l'équation d'un point quelconque dans l'espace peut être représenté, d'une façon linéaire, par les premiers membres des équations de quatre points formant un tétraèdre. Comme le volume de ce tétraèdre [ABCD] est égal à la somme des volumes des quatre tétraèdres [PBCD], —[PCDA], [PDAB], —[PABC], quelle que soit la position du point P, on peut donner à ce résultat une forme nouvelle. Si l'on attribue aux

points A, B, C, D des *masses*, proportionnelles aux volumes [PBCD], — [PCDA], [PDAB], — [PABC], le point P sera *le centre de gravité* des points A, B, C, D. Donc on voit qu'un point quelconque dans l'espace peut être envisagé comme centre de gravité. Cette idée ingénieuse forme la base des profondes recherches que M. *Möbius* a expliquées dans son célèbre *Calcul barycentrique*. Sans entrer ici dans une étude détaillée des relations qui existent entre le calcul barycentrique et la méthode que je propose, je me permets de remarquer que les liaisons entre les deux méthodes sont bien intimes et que la méthode proposée est, en quelque sorte, la généralisation de celle à laquelle le nom de *Möbius* est attaché.

12. Pour ajouter aux formules (6), (7), (8) encore d'autres qui sont fréquemment employées, j'exprime d'abord la droite passant par le point A et le point $[\pi\varkappa\rho]$ au moyen des trois droites $[\varkappa\rho]$, $[\rho\pi]$, $[\pi\varkappa]$. En vertu des conditions (I) et (II), on obtient

$$(9) \qquad [A \quad \pi\varkappa\rho] = [A\pi][\varkappa\rho] + [A\varkappa][\rho\pi] + [A\rho][\pi\varkappa].$$

Si l'on remplace ensuite les points A, B, C, D, P par les plans α, β, γ, δ, π et les plans π, $\varkappa$, ρ par les points P, Q, R, on déduit des formules (6), ..., (9) les relations corrélatives

$$(10) \qquad [\alpha\pi \quad R] = [\alpha R]\pi - [\pi R]\alpha,$$

$$(11) \qquad [\alpha\pi \quad \beta\gamma\delta] = [\alpha\pi\gamma\delta]\beta + [\alpha\pi\delta\beta]\gamma + [\alpha\pi\beta\gamma]\delta,$$

$$(12) \qquad [\alpha\beta\gamma\delta]\pi = [\pi\beta\gamma\delta]\alpha - [\pi\gamma\delta\alpha]\beta + [\pi\delta\alpha\beta]\gamma - [\pi\alpha\beta\gamma]\delta,$$

$$(13) \qquad [\alpha \quad PQR] = [\alpha P][QR] + [\alpha Q][RP] + [\alpha R][PQ].$$

Dans les formules précédentes les produits extérieurs $[A\pi]$, ..., $[\alpha P]$, ... sont définis par les expressions

$$[A_1E^{(1)} + A_2E^{(2)} + A_3E^{(3)} + A_4E^{(4)} \qquad \pi_1\varepsilon^{(1)} + \pi_2\varepsilon^{(2)} + \pi_3\varepsilon^{(3)} + \pi_4\varepsilon^{(4)}], \quad \ldots$$

$$[\alpha_1\varepsilon^{(1)} + \alpha_2\varepsilon^{(2)} + \alpha_3\varepsilon^{(3)} + \alpha_4\varepsilon^{(4)} \qquad P_1E^{(1)} + P_2E^{(2)} + P_3E^{(3)} + P_4E^{(4)}], \quad \ldots$$

Comme on a, d'après les conditions $[E^{(i)}\varepsilon^{(i)}] = -[\varepsilon^{(i)}E^{(i)}] = +1$, $[E^{(i)}\varepsilon^{(k)}] = 0$, on obtient

$$[A\pi] = +(A_1\pi_1 + A_2\pi_2 + A_3\pi_3 + A_4\pi_4) = -[\pi A],$$
$$[\alpha P] = -(\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \alpha_3P_3 + \alpha_4P_4) = -[P\alpha].$$

13. Supposons maintenant que les quatre plans quelconques α, β, γ, δ soient les faces du tétraèdre dont les points A, B, C, D

forment les sommets. Alors on a

$$(14)\quad \alpha = [BCD],\qquad \beta = -[CDA],\qquad \gamma = [DAB],\qquad \delta = -[ABC],$$

et l'on déduit de la formule (13)

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} [\alpha\beta] = \ \ \mathfrak{f}[CD], & [\gamma\delta] = \ \ \mathfrak{f}[AB], \\ [\alpha\gamma] = -\mathfrak{f}[BD], & [\beta\delta] = -\mathfrak{f}[AC], \\ [\alpha\delta] = \ \ \mathfrak{f}[BC], & [\beta\gamma] = \ \ \mathfrak{f}[AD], \end{array}\right.$$

où

$$(16)\qquad \mathfrak{f} = [ABCD].$$

Au moyen de la formule (6) on en tire de plus

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} [\beta\gamma\delta] = -\mathfrak{f}^2 A, \\ [\gamma\delta\alpha] = \ \ \mathfrak{f}^2 B, \\ [\delta\alpha\beta] = -\mathfrak{f}^2 C, \\ [\alpha\beta\gamma] = \ \ \mathfrak{f}^2 D, \end{array}\right.$$

et, en combinant ces formules avec les formules (14), on obtient enfin

$$(18)\qquad [\alpha\beta\gamma\delta] = \mathfrak{f}^3.$$

En tenant compte des formules (14), ..., (18), les formules (8) et (12) deviennent

$$(19)\qquad \mathfrak{f}P = [P\alpha]A + [P\beta]B + [P\gamma]C + [P\delta]D,$$

$$(20)\qquad \mathfrak{f}\pi = [A\pi]\alpha + [B\pi]\beta + [C\pi]\gamma + [D\pi]\delta.$$

Comme on a

$$[A\alpha] = [B\beta] = [C\gamma] = [D\delta] = \mathfrak{f},$$
$$[A\beta] = [B\alpha] = [A\gamma] = [C\alpha] = \ldots [C\delta] = [D\gamma] = 0.$$

on déduit des formules (19) et (20)

$$(21)\quad [P\pi] = \frac{[P\alpha][A\pi]}{[A\alpha]} + \frac{[P\beta][B\pi]}{[B\beta]} + \frac{[P\gamma][C\pi]}{[C\gamma]} + \frac{[P\delta][D\pi]}{[D\delta]},$$

relation qui est donnée, sous une forme légèrement différente, par M. *Kronecker* (¹).

14. Les formules (8) et (19) méritent un intérêt particulier,

(¹) Voir *Journal de Borchardt*, t. 72, p. 160.

parce qu'elles sont les généralisations de l'expression

$$P = P_1 E^{(1)} + P_2 E^{(2)} + P_3 E^{(3)} + P_4 E^{(4)},$$

formant la base et le point de départ des recherches actuelles. On obtient ce résultat immédiatement, en posant

$$A = E^{(1)}, \qquad B = E^{(2)}, \qquad C = E^{(3)}, \qquad D = E^{(4)},$$

et en tenant compte que

$$[E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)}] = +1, \qquad [P E^{(k)} E^{(l)} E^{(m)}] = P_i.$$

De même, les formules (12) et (20) sont les généralisations de l'expression

$$\pi = \pi_1 \varepsilon^{(1)} + \pi_2 \varepsilon^{(2)} + \pi_3 \varepsilon^{(3)} + \pi_4 \varepsilon^{(4)}.$$

De plus on trouve que les formules (14), (15), (17), qui fournissent, en Algèbre, des théorèmes connus, relatifs aux relations entre les mineurs et leurs adjoints, sont les généralisations des formules (I), (II), (III). Enfin on voit que les formules (6), (16) et (18) sont les généralisations des formules (IV*) et (V). On conclut de là que les points $E^{(i)}$ formant les sommets du tétraèdre de référence ne jouent point un rôle exceptionnel et qu'ils peuvent être remplacés par quatre points quelconques, non situés dans le même plan. Si l'on passe des points $E^{(i)}$ à quatre autres points, on a, dans notre théorie, ce que l'on appelle en Géométrie analytique *la transformation des coordonnées*. Les notions et les formules que je viens d'établir simplifient ce problème d'une manière remarquable et leur généralisation conduit à une théorie nouvelle et simplifiée des formes invariantives. Cependant, comme cette théorie des invariants, des covariants et des formes intermédiaires appartient à l'Algèbre et comme elle surpasse le but de ce Mémoire, je me borne à l'indiquer.

En terminant la première Partie de ce Mémoire, je résume rapidement les résultats obtenus :

La multiplication extérieure, due à Cauchy et à M. Grassmann, permet d'exprimer, d'une manière simple, les points, les droites et les plans dans l'espace. Si ces éléments proviennent, soit de la jonction, soit de l'intersection d'autres éléments originaux, leur produit extérieur représente exactement l'élément composé. En Géométrie synthétique, la juxtaposition des

lettres qui représentent, dans le produit extérieur, les éléments originaux fournit la construction linéaire de l'élément composé; en Géométrie analytique, les coefficients des $E^{(i)}$ *et de leurs produits extérieurs en fournissent les coordonnées homogènes.*

Si deux éléments d'un produit extérieur sont incidents, c'est-à-dire si l'un est situé sur l'autre, le produit extérieur est égal à zéro; et vice versa.

Les produits extérieurs sont désignés par deux crochets qui renferment leurs éléments.

II.

GÉNÉRATION DES SURFACES, DES COMPLEXES, DES COURBES GAUCHES ET DES CONGRUENCES DE DROITES. TRANSFORMATIONS DES PRODUITS EXTÉRIEURS, REPRÉSENTANT DES SURFACES. EXPRESSION DES COORDONNÉES D'UNE COURBE GAUCHE AU MOYEN DE PARAMÈTRES.

15. J'ai désigné, dans la Partie précédente, les points et les droites dans l'espace par les majuscules et les minuscules de l'alphabet latin; j'ai désigné de plus les plans par les minuscules de l'alphabet grec. Je conserverai cette notation et je désignerai, d'ailleurs, par les *premières* lettres des deux alphabets les éléments *fixes* et par les *dernières* lettres les éléments *variables* ou *mobiles*. Soient, conformément à cette notation, A, B, ... et α, β, ... des points et des plans fixes; soit de plus

$$X = X_1 E^{(1)} + X_2 E^{(2)} + X_3 E^{(3)} + X_4 E^{(4)}$$

un point variable. Alors le produit extérieur

$$[X A \alpha B \beta \ldots]$$

désignera ou un point ou une droite suivant que le dernier élément, renfermé dans le produit extérieur, est un plan ou un point. Si l'on transforme ce produit extérieur à l'aide de la formule (6), on obtiendra une expression, homogène par rapport aux coordonnées X_i et du premier ordre. D'une façon analogue, un produit extérieur dans lequel le point X entre m fois sera égal à une expression homogène d'ordre m, par rapport aux coordonnées X_i.

Soient P, [PQ], [PQR] de telles expressions dans lesquelles le point X entre plusieurs fois.

Pour établir, dans ce cas, une distinction entre les expressions P, Q, ...; [PQ]; [PQR], je leur attribue une *dimension* égale respectivement à 1; 2; 3. Il résulte de là immédiatement que la dimension d'un produit extérieur qui renferme des éléments, eux-mêmes composés d'autres éléments, sera égale à la somme des dimensions de leurs éléments. Prenons cette somme suivant le module 4. Alors on n'aura que des produits extérieurs dont les dimensions sont $\equiv 0, 1, 2, 3$, mod. 4.

16. Les produits extérieurs dont les dimensions sont $\equiv 0$, mod. 4, ne contiennent ni les $E^{(i)}$ ni leurs produits extérieurs $[E^{(i)}E^{(k)}]$, $[E^{(i)}E^{(k)}E^{(l)}]$; ce sont exactement des fonctions homogènes d'ordre n si le point X y entre n fois. Donc on a :

1^a. *Si l'on égale à zéro un produit extérieur dont la dimension est* $\equiv 0$, mod. 4, *et dans lequel le* point X *entre n fois, on a l'équation d'une* surface *algébrique d'*ordre n, décrite *par le* point X.

En désignant par

$$\xi = \xi_1 \varepsilon^{(1)} + \xi_2 \varepsilon^{(2)} + \xi_3 \varepsilon^{(3)} + \xi_4 \varepsilon^{(4)},$$

un plan variable, on a le théorème corrélatif :

1^b. *Si l'on égale à zéro un produit extérieur dont la dimension est* $\equiv 0$, mod. 4, *et dans lequel le* plan ξ *entre n fois, on a l'équation d'une* surface *algébrique de la* classe n, enveloppée *par le* plan ξ.

Rien n'empêche de remplacer le point ou le plan variables par une droite variable x. Cette droite peut être envisagée comme la jonction de deux points ou comme l'intersection de deux plans. Alors on a :

1^c. *Si l'on égale à zéro un produit extérieur dont la dimension est* $\equiv 0$, mod. 4 *et dans lequel la droite x entre n fois, on a l'équation d'un* complexe *algébrique. Ce complexe sera ou d'*ordre n *ou de* classe n, *suivant que la droite x est la jonction de deux points ou l'intersection de deux plans.*

Passons maintenant à l'étude des produits extérieurs dont les dimensions sont $\equiv 1$ ou $\equiv 3$, mod. 4. Ces produits extérieurs peuvent être représentés par les expressions $[PQ\ \rho]$ et $[\pi\varkappa\ R]$.

Or on a, d'après les formules (6) et (10),

$$[PQ\ \rho] = [P\rho]Q - [Q\rho]P,$$
$$[\pi\varkappa\ R] = [\pi R]\varkappa - [\varkappa R]\pi.$$

Par conséquent, l'équation

$$[PQ\ \rho] = 0$$

se décompose en les deux équations

$$[P\rho] = 0, \qquad [Q\rho] = 0;$$

et d'une façon analogue l'équation

$$[\pi\varkappa\ R] = 0$$

entraîne les deux autres

$$[\pi R] = 0, \qquad [\varkappa R] = 0.$$

Donc on a :

2. *Si l'on égale à zéro un produit extérieur dont la dimension est* $\equiv 1$ *ou* $\equiv 3$, mod. 4, *on a l'équation ou d'une* courbe gauche, *ou d'une* surface développable, *ou d'une* congruence de droites, *suivant que l'élément variable qui entre dans le produit extérieur est un* point, *ou un* plan, *ou une* droite.

17. Pour donner à ces théorèmes une forme, à la fois plus concise et plus géométrique, j'appellerai *élément dérivé* un tel élément qui renferme un élément *variable*, point, droite ou plan. Alors les théorèmes 1^a, 1^b, 1^c, 2 deviennent :

I. *Si un point et un plan sont assujettis à la condition de demeurer incidents, et si le point et le plan sont dérivés ou d'un point, ou d'un plan, ou d'une droite mobiles, lesquels éléments mobiles entrent n fois, le point mobile décrira une surface d'ordre n; le plan mobile enveloppera une surface de classe n; la droite mobile formera un complexe, étant ou d'ordre n ou de classe n suivant que la droite mobile est la jonction de deux points ou l'intersection de deux plans.*

II. *Si un point ou un plan sont assujettis à la condition de demeurer incidents d'une droite, et si le point, le plan et la droite sont dérivés ou d'un point, ou d'un plan ou d'une droite mobiles, le point mobile décrira une courbe gauche, le plan mobile enveloppera une surface développable et la droite mobile formera une congruence de droites.*

Le théorème général, relatif à la génération des surfaces, a été découvert par M. H. Grassmann, qui en a tiré, comme premières conséquences, ses générations célèbres des surfaces du troisième ordre (¹); le théorème relatif à la génération des courbes gauches est établi par moi dans un Mémoire publié au tome C du *Journal de M. Kronecker*. Dans ce Mémoire, dont M. Carvallo (²) a donné une exposition élégante et approfondie, j'ai déduit, en outre, du théorème général quelques générations des cubiques gauches; d'ailleurs, j'ai ajouté, dans un autre travail, inséré dans ce Bulletin (2ᵉ série, t. XI, p. 222), de nouvelles propriétés de ces courbes en espace.

La méthode, employée dans les deux Mémoires, est purement géométrique et se repose seulement sur les principes les plus simples de l'intuition. Après en avoir établi, dans ce Mémoire, la base algébrique, on peut transformer immédiatement les résultats, déduits de l'intuition, en ceux du calcul; il me reste à montrer, par quelques exemples, avec quelle facilité cette transformation s'effectue.

18. Soit X un point mobile et A, B, C, D, E, F six points fixes. J'en forme les trois droites [AB], [CD], [EF] et je désigne, pour l'instant, par P le point [X AB CD]. On voit immédiatement que la droite [XP] rencontre les deux droites [AB] et [CD]; elle rencontrera d'ailleurs la troisième droite [EF] si l'on pose

$$[P \quad EF \quad X] = 0,$$

ou

$$\mathfrak{H} = [X \quad AB \quad CD \quad EF \quad X] = 0.$$

Par conséquent $\mathfrak{H} = 0$ représente un *hyperboloïde à une nappe* ayant [AB], [CD], [EF] comme génératrices.

(¹) Voir *Journal de Crelle*, t. 49, p. 47.

(²) Voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 158.

Pour transformer l'expression $\mathfrak{H}$, j'emploie la formule (6). Alors on a

$$[X \quad AB \quad CD] = [XABC]D - [XABD]C,$$

et, par conséquent,

$$\mathfrak{H} = -[XABC][XDEF] + [XABD][XCEF].$$

Comme les produits extérieurs [XABC], ..., [XCEF] sont des déterminants, l'équation de l'hyperboloïde $\mathfrak{H}$ est donnée sous la forme que l'on emploie ordinairement en Géométrie analytique.

19. Pour établir un deuxième exemple plus compliqué, je vais déduire l'équation de la surface $\mathfrak{F}$ qui forme le lieu géométrique des sommets des cônes du second ordre passant par les six points A, B, ..., F. D'après l'article 5 de mon Mémoire sur les cubiques gauches, cette surface du quatrième ordre peut être représentée par l'expression

$$\mathfrak{F} = [X \quad L' \quad M \quad N] = 0,$$

où

$$L' = [XDE \quad AB],$$
$$M = [XEF \quad BC],$$
$$N = [XCD \quad FA].$$

D'après la formule (6) on a

$$L' = [XADE]B - [XBDE]A,$$
$$M = [XBEF]C - [XCEF]B,$$
$$N = [XCDF]A - [XACD]F;$$

par conséquent on obtient

$$\mathfrak{F} = [XABC][XADE][XBEF][XCDF] - [XACD]\mathfrak{A},$$

$\mathfrak{A}$ étant égal à

$$[XADE][XBEF][XBCF] - [XBDE][XBEF][XACF] + [XBDE][XCEF][XABF].$$

Or on a, d'après la formule (8),

$$[XBCE]F - [XBCF]E + [XBEF]C - [XCEF]B + [BCEF]X = 0$$

on en déduit immédiatement

$$[XBCF][XAEF] - [XBEF][XACF] + [XCEF][XABF] = 0.$$

Par conséquent on obtient

$$\mathfrak{A} = [XBCF]\{[XADE][XBEF] - [XBDE][XAEF]\},$$

et comme

$$[XADE][XBEF] - [XBDE][XAEF] - [XABE][XDEF] = 0,$$

on trouve enfin

$$\mathfrak{A} = [XBCF][XABE][XDEF];$$

donc on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \;& [XABC][XADE][XBEF][XCDF]\\ & - [XACD][XBCF][XABE][XDEF],\end{aligned}$$

conformément au résultat que j'ai donné, sans démonstration dans mon Mémoire cité.

20. Si les droites [AB], [CD], [EF] ou d'autres ne sont pas données par les points qu'elles joignent ni par les plans dont elles forment l'intersection, mais si elles sont représentées par les expressions

$$\begin{aligned}p &= p_{12}[E^{(1)}E^{(2)}] + p_{13}[E^{(1)}E^{(3)}] + \ldots p_{34}[E^{(3)}E^{(4)}],\\ q &= q_{12}[E^{(1)}E^{(2)}] + q_{13}[E^{(1)}E^{(3)}] + \ldots q_{34}[E^{(3)}E^{(4)}],\\ r &= r_{12}[E^{(1)}E^{(2)}] + r_{13}[E^{(1)}E^{(3)}] + \ldots r_{34}[E^{(3)}E^{(4)}],\end{aligned}$$

les formules (6) et (10) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}[\rho q] = &-(\rho_2 q_{12} + \rho_3 q_{13} + \rho_4 q_{14})E^{(1)}\\ &+(\rho_1 q_{12} + \rho_3 q_{32} + \rho_4 q_{42})E^{(2)}\\ &-(\rho_1 q_{31} + \rho_2 q_{32} + \rho_4 q_{34})E^{(3)}\\ &+(\rho_1 q_{14} + \rho_2 q_{24} + \rho_3 q_{34})E^{(4)};\end{aligned}\right.$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}[Xp] = \;&(X_2 p_{34} + X_3 p_{42} + X_4 p_{23})\varepsilon^{(1)}\\ &-(X_1 p_{34} + X_3 p_{41} + X_4 p_{13})\varepsilon^{(2)}\\ &+(X_1 p_{24} + X_2 p_{41} + X_4 p_{12})\varepsilon^{(3)}\\ &-(X_1 p_{23} + X_2 p_{31} + X_3 p_{12})\varepsilon^{(4)},\end{aligned}\right.$$

où

$$p_{ik} = -p_{ki},$$
$$q_{ik} = -q_{ki}.$$

On en déduit d'abord, si l'on égale à zéro les coefficients des $E^{(i)}$ et des $\varepsilon^{(i)}$, les conditions qui expriment qu'un plan et qu'un point sont incidents d'une droite. De plus, si l'on pose $[Xp] = \rho$,

on tire des expressions (22) et (23)

$$(24) \qquad Y = [Xpq] = \sum_i (X_1 Y_{i1} + X_2 Y_{i2} + X_3 Y_{i3} + X_4 Y_{i4}) E^{(i)},$$

où

$$(25) \qquad \begin{cases} Y_{ii} = p_{kl} q_{im} + p_{lm} q_{ik} + p_{mk} q_{il}, \\ Y_{ik} = p_{im} q_{il} - p_{il} q_{im}. \end{cases}$$

Les formules (24) et (25) permettent de transformer l'équation de l'hyperboloïde, donnée sous la forme

$$\mathfrak{H} = [XpqrX] = 0,$$

p, q, r étant trois génératrices. On trouve aisément ([1])

$$\mathfrak{H} = \sum_{i,j} \mathfrak{H}_{ij} X_i X_j \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

où

$$\mathfrak{H}_{ii} = - \begin{vmatrix} p_{kl} & q_{kl} & r_{kl} \\ p_{lm} & q_{lm} & r_{lm} \\ p_{mk} & q_{mk} & r_{mk} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{H}_{ik} + \mathfrak{H}_{ki} = \begin{vmatrix} p_{il} & q_{il} & r_{il} \\ p_{lm} & q_{lm} & r_{lm} \\ p_{mk} & q_{mk} & r_{mk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{kl} & q_{kl} & r_{kl} \\ p_{lm} & q_{lm} & r_{lm} \\ p_{mi} & q_{mi} & r_{mi} \end{vmatrix}.$$

Sous cette forme, l'équation de l'hyperboloïde est donnée, pour la première fois, par M. Cayley ([1]).

21. Après avoir établi les exemples précédents, je vais continuer la théorie générale. Je me propose d'expliquer une méthode pour exprimer au moyen de paramètres les coordonnées d'une courbe gauche, représentée par un produit extérieur égal à zéro. Je commence par deux cas particuliers.

Soient $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(2n_1+1)}$; $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(2n_2+1)}$; $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(2n_3+1)}$; g des droites fixes, situées d'une manière quelconque dans l'espace. Alors l'expression ([2])

$$\mathfrak{C}_{(3)} = [X a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(2n_1+1)} \, X b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(2n_2+1)} \, X c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(2n_3+1)} g] = 0,$$

([1]) *Voir* CAYLEY, *On the six coordinates of a line* (*Transactions of the Cambridge Phil. Soc.*, Vol. XI, Part. II, article 54).

([2]) *Voir* mon Mémoire au tome C du *Journal de M. Kronecker*, p. 410.

se décompose en les trois expressions

$$\mathfrak{Z}^{(1)} = [X b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(2n_2+1)} \quad X c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(2n_3+1)} g] = 0,$$
$$\mathfrak{Z}^{(2)} = [X c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(2n_3+1)} \quad X a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(2n_1+1)} g] = 0,$$
$$\mathfrak{Z}^{(3)} = [X a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(2n_1+1)} \quad X b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(2n_2+1)} g] = 0,$$

dont deux entraînent la troisième. Comme $\mathfrak{Z}^{(1)} = 0$, $\mathfrak{Z}^{(2)} = 0$, $\mathfrak{Z}^{(3)} = 0$, représentent trois quadriques réglées qui possèdent deux à deux une génératrice commune, savoir $\mathfrak{Z}^{(2)}, \mathfrak{Z}^{(3)}$; $\mathfrak{Z}^{(3)}, \mathfrak{Z}^{(1)}$; $\mathfrak{Z}^{(1)}, \mathfrak{Z}^{(2)}$ respectivement la génératrice $a^{(1)}$; $b^{(1)}$; $c^{(1)}$, l'expression $\mathfrak{C}_{(3)} = 0$ représente *une cubique gauche*.

Désignons par Q le point d'intersection des trois plans :

$$[X a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(2n_1+1)}],$$
$$[X b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(2n_2+1)}],$$
$$[X c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(2n_3+1)}].$$

Alors l'expression $\mathfrak{C}_{(3)} = 0$ prend la forme

$$[Q g] = 0.$$

D'ailleurs on a

$$[X a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(2n_1+1)} Q] = 0,$$
$$[X b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(2n_2+1)} Q] = 0,$$
$$[X c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(2n_3+1)} Q] = 0.$$

On voit immédiatement que l'on peut en déduire les équations

$$[Q a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)} X] = 0,$$
$$[Q b^{(2n_2+1)} \ldots b^{(2)} b^{(1)} X] = 0,$$
$$[Q c^{(2n_3+1)} \ldots c^{(2)} c^{(1)} X] = 0,$$

qui proviennent des dernières si l'on y intervertit l'ordre des éléments renfermés. Ces équations expriment que le point X est situé sur les trois plans

$$[Q a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)}], \quad [Q b^{(2n_2+1)} \ldots b^{(2)} b^{(1)}], \quad [Q c^{(2n_3+1)} \ldots c^{(2)} c^{(1)}],$$

et qu'il en est, par conséquent, le point d'intersection ; donc on a

$$X = [Q a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)} \quad Q b^{(2n_2+1)} \ldots b^{(2)} b^{(1)} \quad Q c^{(2n_3+1)} \ldots c^{(2)} c^{(1)}].$$

Je dis que cette expression de X est déduite de l'équation $\mathfrak{C}_{(3)} = 0$ par le procédé d'*intervertissement*.

Comme on a $[Qg] = 0$, le point Q est situé sur la droite fixe g, et comme le point Q est variable, il décrira sur la droite g

une *série de points*. Dans ce cas, le produit extérieur

$$[Q a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)}]$$

représente un *faisceau de plans* qui est homographique de la série de points décrite par Q. L'axe de ce faisceau est la droite $a^{(1)}$. De même les produits extérieurs

$$[Q b^{(2n_2+1)} \ldots b^{(2)} b^{(1)}], \quad [Q c^{(2n_3+1)} \ldots c^{(2)} c^{(1)}]$$

représentent des faisceaux de plans, homographiques de la même série de points et passant par les axes $b^{(1)}$, $c^{(1)}$. Donc ces trois faisceaux, homographiques de la même série de points, sont homographiques entre eux et leur point d'intersection X décrit la cubique gauche $\mathfrak{C}_{(3)}$.

A ce résultat connu, appartenant à la Géométrie synthétique, correspond, en Géométrie analytique, la représentation des coordonnées X_i au moyen de paramètres. En effet, comme le point variable Q est situé sur la droite fixe g, on peut poser

$$Q = \mathfrak{L}_1 G^{(1)} + \mathfrak{L}_2 G^{(2)},$$

où $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ sont deux paramètres variables et où $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ désignent deux points fixes, situés sur g. Si l'on met cette expression dans le produit extérieur

$$[Q a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)}],$$

on obtiendra

$$\mathfrak{L}_1 [G^{(1)} a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)}] + \mathfrak{L}_2 [G^{(2)} a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)}],$$

c'est-à-dire on aura une forme homogène et linéaire par rapport aux paramètres $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. Par conséquent, l'expression

$$X = [Q a^{(2n_1+1)} \ldots a^{(2)} a^{(1)} \quad Q b^{(2n_2+1)} \ldots b^{(2)} b^{(1)} \quad Q c^{(2n_3+1)} \ldots c^{(2)} c^{(1)}]$$

sera homogène et du troisième ordre par rapport à $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$. Donc on obtient, en égalant dans les deux membres de cette expression les coefficients des $E^{(i)}$, les valeurs des coordonnées X_i comme fonctions homogènes du troisième ordre par rapport aux paramètres $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$.

22. Passons maintenant à l'étude de l'expression

$$\mathfrak{C}_{(3)} = [X a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(2n_1+1)} \quad X b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(2n_2+1)} \quad X] = 0.$$

Comme cette expression se décompose en les deux

$$[X a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(2n_1+1)} X] = 0,$$
$$[X b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(2n_2+1)} X] = 0,$$

qui représentent deux quadriques réglées, $\mathfrak{C}_{(4)} = 0$ représente *une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce.*

Si l'on pose

$$[X a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(2n_1+1)}] = \varkappa,$$
$$[X b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(2n_2+1)}] = \lambda,$$

on a

$$[\varkappa a^{(2n_1+1)}] = 0, \qquad [\lambda b^{(2n_2+1)}] = 0,$$
$$[X a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(2n_1)} \varkappa] = 0, \qquad [X b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(2n_2)} \lambda] = 0.$$

On tire de ces dernières relations

$$[\varkappa a^{(2n_1)} \dots a^{(2)} a^{(1)} X] = 0$$
$$[\lambda b^{(2n_2)} \dots b^{(2)} b^{(1)} X] = 0,$$

et, comme les équations des quadriques réglées prennent la forme

$$[\varkappa X] = 0, \qquad [\lambda X] = 0,$$

on voit que les quatre plans

$$\varkappa, \quad \lambda, \quad [\varkappa a^{(2n_1)} \dots a^{(2)} a^{(1)}], \quad [\lambda b^{(2n_2)} \dots b^{(2)} b^{(1)}]$$

passent par le même point X. Par conséquent, on a

$$\mathfrak{c}_{(4)} = [\varkappa \quad \lambda \quad \varkappa a^{(2n_1)} \dots a^{(2)} a^{(1)} \quad \lambda b^{(2n_2)} \dots b^{(2)} b^{(1)}] = 0.$$

Or les équations $[\varkappa a^{(2n_1+1)}] = 0$, $[\lambda b^{(2n_2+1)}] = 0$ expriment que les plans $\varkappa$, λ passent respectivement par les droites $a^{(2n_1+1)}$, $b^{(2n_2+1)}$; par conséquent on peut poser

$$\varkappa = \mathfrak{M}_2 \alpha + \mathfrak{M}_3 \alpha^\star$$
$$\lambda = \mathfrak{M}_1 \beta + \mathfrak{M}_3 \beta^\star,$$

où $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ désignent trois paramètres homogènes et les plans α, $\alpha^\star$; β, $\beta^\star$ passent par les droites $a^{(2n_1+1)}$; $b^{(2n_2+1)}$. Ceci établi, on trouve

$$[\varkappa a^{(2n_1)} \dots a^{(2)} a^{(1)}] = \mathfrak{M}_2 \gamma + \mathfrak{M}_3 \gamma^\star,$$
$$[\lambda b^{(2n_2)} \dots b^{(2)} b^{(1)}] = \mathfrak{M}_1 \delta + \mathfrak{M}_3 \delta^\star,$$

où

$$\gamma = [\alpha a^{(2n_1)} \dots a^{(2)} a^{(1)}], \qquad \gamma^\star = [\alpha^\star a^{(2n_1)} \dots a^{(2)} a^{(1)}],$$
$$\delta = [\beta b^{(2n_2)} \dots b^{(2)} b^{(1)}], \qquad \delta^\star = [\beta^\star b^{(2n_2)} \dots b^{(2)} b^{(1)}].$$

Par conséquent l'expression $\mathfrak{c}_{(4)}$ prend la forme

$$[\mathfrak{M}_2 \alpha + \mathfrak{M}_3 \alpha^\star \quad \mathfrak{M}_1 \beta + \mathfrak{M}_3 \beta^\star \quad \mathfrak{M}_2 \gamma + \mathfrak{M}_3 \gamma^\star \quad \mathfrak{M}_1 \delta + \mathfrak{M}_3 \delta^\star].$$

On en déduit

$$\mathfrak{c}_{(4)} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{M}_1^2 \mathfrak{M}_2^2 + \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 (\mathfrak{m}_1 \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{M}_2) + \mathfrak{M}_3^2 \mathfrak{c}_{(2)} = 0,$$

$\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ étant des constantes égales respectivement aux valeurs

$$[\alpha\beta\gamma\delta], \quad -[\alpha\beta\delta\gamma^\star] - [\beta\gamma\delta\alpha^\star], \quad [\alpha\beta\gamma\delta^\star] + [\alpha\gamma\delta\beta^\star],$$

et $\mathfrak{c}_{(2)}$ étant une forme homogène du deuxième ordre par rapport aux paramètres $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$.

Admettons maintenant que les paramètres $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ soient les coordonnées homogènes d'un point $\mathfrak{M}$, qui se meut dans un plan quelconque. Alors l'expression $\mathfrak{c}_{(4)} = 0$ représentera une *courbe plane du quatrième ordre,* décrite par le point $\mathfrak{M}$, et douée des *deux points doubles* $\mathfrak{M}_1 = 0$, $\mathfrak{M}_3 = 0$; $\mathfrak{M}_2 = 0$, $\mathfrak{M}_3 = 0$. Par conséquent la courbe plane $\mathfrak{c}_{(4)}$ aura le *genre* 1 et les coordonnées $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ pourront être exprimées au moyen des fonctions elliptiques. Il résulte de là que par les mêmes fonctions on pourra exprimer $\varkappa$, λ et conséquemment aussi les coordonnées X_i de la courbe gauche $\mathfrak{C}_{(4)}$. Donc cette courbe gauche aura elle-même le genre 1.

23. Pour étendre les considérations que je viens d'appliquer dans les deux articles précédents et pour établir un théorème général, relatif aux courbes gauches, je rappelle les notions des *systèmes élémentaires de première et de seconde espèce* que l'on emploie en Géométrie synthétique.

Soient P, p, π un point, une droite et un plan, tout à fait variables dans l'espace, et A, a, α un point, une droite et un plan fixes. Alors :

1° $[Pa]$ représente tous les plans passant par la droite a;

2° $[\pi a]$ représente tous les points situés sur la droite a;

3° $[Pa\alpha]$ représente toutes les droites du plan α qui passent par le point $[a\alpha]$;

4° $[\pi a A]$ représente toutes les droites du plan $[aA]$ qui passent par le point A.

Ces systèmes sont appelés *systèmes élémentaires de première espèce*. De plus :

5° $[p\mathrm{A}]$ représente tous les plans passant par le point A;

6° $[p\alpha]$ représente tous les points situés dans le plan α;

7° $[\pi\alpha]$ représente toutes les droites situées dans le plan α;

8° $[\mathrm{PA}]$ représente toutes les droites passant par le point A. Ce sont *les systèmes élémentaires de seconde espèce.*

Ceci rappelé, on peut énoncer le théorème suivant :

Par le procédé d'intervertissement on peut déduire d'un produit extérieur représentant une courbe gauche les expressions de ses coordonnées au moyen de paramètres. Si par l'intervertissement un seul système élémentaire de première espèce est introduit, les coordonnées sont exprimées par des fonctions entières et homogènes de deux paramètres. Dans ce cas, la courbe gauche est unicursale ou de genre 0. *Si, au contraire, par l'intervertissement, deux systèmes élémentaires de première espèce ou un système élémentaire de seconde espèce sont introduits, on obtient une équation homogène entre trois paramètres, qui peut être envisagée comme l'équation d'une courbe plane. Le genre de cette courbe plane est aussi celui de la courbe gauche. Les expressions des coordonnées de la courbe plane au moyen des fonctions transcendantes étant connues, les formules, fournies par l'intervertissement, donnent les coordonnées de la courbe gauche, exprimées au moyen des mêmes fonctions transcendantes.*

Dans une autre occasion je communiquerai des applications de ce théorème.

III.

GÉNÉRALISATIONS. PRODUITS EXTÉRIEURS ET LES DÉTERMINANTS. COMPLÉMENT. FORMULES GÉNÉRALES. LEUR INTERPRÉTATION AU MOYEN DE LA GÉOMÉTRIE A N DIMENSIONS. PRODUITS INTÉRIEURS ET LEURS APPLICATIONS AUX RELATIONS MÉTRIQUES. REMARQUES FINALES.

24. Pour généraliser, d'abord en sens purement algébrique, les notions et les résultats, obtenus dans les deux premières Parties de ce Mémoire, je remplace les expressions $\mathrm{E}^{(1)}, \mathrm{E}^{(2)}, \mathrm{E}^{(3)}, \mathrm{E}^{(4)}$ par les quantités

$$e^{(1)},\quad e^{(2)},\quad \ldots,\quad e^{(n)}.$$

En Algèbre, je ne donne à ces quantités aucune interprétation;

je les introduis comme un instrument de calcul, comme une sorte de clef algébrique. Pour avoir une dénomination pour les $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$, je les appelle d'*unités,* et je dis que *les expressions*

$$a^{(i)} = a_1^{(i)} e^{(1)} + a_2^{(i)} e^{(2)} + \ldots a_n^{(i)} e^{(n)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ r \leqq n)$$

sont dérivées des unités $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$ *au moyen des coefficients* $a_j^{(i)}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Cela établi, je forme, conformément aux développements de l'article 2, les produits $a^{(1)} a^{(2)}$; $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}$; ... $a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}$; j'y remplace les produits $e^{(i_1)} e^{(i_2)}$; $e^{(i_1)} e^{(i_2)} e^{(i_3)}$; ... $e^{(i_1)} e^{(i_2)} \ldots e^{(i_r)}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)$ par les expressions $[e^{(i_1)} e^{(i_2)}]$; $[e^{(i_1)} e^{(i_2)} e^{(i_3)}]$; ..., $[e^{(i_1)} e^{(i_2)} \ldots e^{(i_r)}]$ et je soumets ces expressions aux conditions de changer de signe si l'on y échange deux unités et de s'évanouir, par conséquent, si deux unités renfermées sont égales. Enfin j'ajoute la condition que l'expression $[e^{(1)} e^{(2)} \ldots e^{(n)}]$, qui renferme les unités rangées dans l'ordre naturel, est égale à $+1$.

Conformément à la notation et aux dénominations, introduites dans les articles 2, 5 et 8, je désigne par $[a^{(1)} a^{(2)}]$, $[a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}]$, ..., $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}]$ les expressions qui proviennent, par le procédé exposé, des produits $a^{(1)} a^{(2)}$, $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}$, ..., $a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}$; je les appelle *produits extérieurs* et je nomme le calcul par lequel les produits extérieurs sont formés *multiplication extérieure*.

25. On reconnaît aisément que le produit extérieur $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)}]$ est exactement le *déterminant* $|a_j^{(i)}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$; on reconnaît de plus que le produit extérieur $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}]$, où $r < n$, fournit comme coefficients des produits extérieurs $[e^{(i'_1)} e^{(i'_2)} \ldots e^{(i'_r)}]$ $(i'_1 \neq i'_2 \ldots \neq i'_r;\ i'_1, i'_2, \ldots, i'_r = 1, 2, \ldots, n)$ les *mineurs d'ordre r*. Par conséquent le produit extérieur $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}]$ est dérivé des

$$n_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}$$

produits extérieurs $[e^{(i'_1)} e^{(i'_2)} \ldots e^{(i'_r)}]$ de la même façon que l'expression $a^{(i)}$ est dérivée des n unités $e^{(1)} \ldots e^{(n)}$. Pour cette raison, j'appellerai les produits extérieurs $[e^{(i'_1)} e^{(i'_2)} \ldots e^{(i'_r)}]$ d'*unités de la* $r^{\text{ième}}$ *dimension*. D'après cette définition, les $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$

sont les unités de la première dimension et $+1$ et -1 *sont les unités de la $n^{ième}$ dimension.*

Donc on a :

Si, au moyen des coefficients $a_j^{(i)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, *les expressions*

$$a^{(i)} = a_1^{(i)} e^{(1)} + a_2^{(i)} e^{(2)} + \ldots + a_n^{(i)} e^{(n)}$$

sont dérivées des n unités de la première dimension $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$, *le produit extérieur* $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}]$, *où* $r < n$, *sera dérivé des* n_r *unités de la* $r^{ième}$ *dimension, et les coefficients seront les* n_r *mineurs formés des coefficients* $a_j^{(i)}$.

Le produit extérieur $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)}]$ *est le déterminant* $|a_j^{(i)}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *d'ordre n.*

Le produit extérieur $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(q)}]$, *où* $q > n$, *est égal à zéro.*

Ce dernier résultat découle de la remarque que les unités de la $q^{ième}$ dimension, si $q > n$, s'évanouissent sans exception, parce qu'elles *doivent* renfermer des unités *égales* de la première dimension.

26. Le théorème précédent met en évidence que les produits extérieurs $[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}]$ $(r \leqq n)$ changent de signe, si l'on y échange deux expressions $a^{(i)}$, $a^{(k)}$ et qu'ils s'évanouissent par conséquent si deux expressions renfermées deviennent égales. On tire de cette proposition la conséquence plus générale qu'un produit extérieur quelconque s'évanouit s'il y a une relation linéaire entre les expressions renfermées, et *vice versa*. Or on a, d'après le théorème précédent,

$$[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n+1)}] = 0;$$

par conséquent, on aura entre les $n+1$ expressions $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n+1)}$ une relation linéaire

$$\mathfrak{L}_1 a^{(1)} + \mathfrak{L}_2 a^{(2)} + \ldots + \mathfrak{L}_{n+1} a^{(n+1)} = 0,$$

dont je vais déterminer les coefficients $\mathfrak{L}_m$.

Par multiplication extérieure on tire de la dernière formule

$$\mathfrak{L}_1 [a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)}] + \mathfrak{L}_2 [a^{(2)} a^{(2)} \ldots a^{(n)}] + \ldots + \mathfrak{L}_{n+1} [a^{(n+1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)}] = 0.$$

ou

$$\mathfrak{L}_1 [a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)}] + (-1)^{n-1} \mathfrak{L}_{n+1} [a^{(2)} \ldots a^{(n)} a^{(n+1)}] = 0.$$

ou

$$(-1)^n \mathfrak{F}_1[a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n)}] - \mathfrak{F}_{n+1}[a^{(2)}\dots a^{(n)}a^{(n+1)}] = 0.$$

Il résulte de là que les coefficients $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_{n+1}$ sont proportionnels respectivement aux produits extérieurs

$$[a^{(2)}\dots a^{(n)}a^{(n+1)}], \qquad (-1)^n[a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n)}];$$

et l'on trouve de même que le coefficient $\mathfrak{F}_m$ est proportionnel au produit extérieur

$$(-1)^{m-1}[a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(m-1)}a^{(m+1)}\dots a^{(n+1)}].$$

Donc on a la relation identique

$$\left\{\begin{array}{l}[a^{(2)}a^{(3)}\dots a^{(n+1)}]a^{(1)} - [a^{(1)}a^{(3)}\dots a^{(n+1)}]a^{(2)} + \dots \\ \quad + (-1)^m[a^{(1)}\dots a^{(m-1)}a^{(m+1)}\dots a^{(n+1)}] + \dots (-1)^n[a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n)}]a^{(n+1)} = 0,\end{array}\right.$$

qui représente la généralisation de la formule (8) (n° 10).

Les développements précédents montrent la liaison intime qui existe entre les produits extérieurs et les déterminants. En effet, on peut établir, au moyen des notions déjà expliquées et de celles que je donnerai encore, une théorie des déterminants qui me paraît bien remarquable par sa simplicité. Elle est due à Cauchy (1) et à M. Grassmann (2) et l'on en trouve une exposition élégante dans les Ouvrages importants de M. Schlegel (3) et de M. Scott (4).

27. Soient $\mathcal{E}$ une unité quelconque de la dimension $r < n$ et $\mathcal{E}'$ l'unité de la dimension $n - r$ qui renferme les unités de la première dimension qui n'entrent pas dans $\mathcal{E}$. Je suppose d'ailleurs que les unités $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$, renfermées dans $\mathcal{E}'$, soient rangées dans un tel ordre que $[\mathcal{E}\mathcal{E}'] = +1$. Alors j'appelle $\mathcal{E}'$ le *complément* de $\mathcal{E}$ et je désigne le complément de $\mathcal{E}$ par $|\mathcal{E}$, c'est-à-dire par un trait vertical, posé devant $\mathcal{E}$.

---

(1) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 374.

(2) *Die Ausdehnungslehre*. Berlin, 1862. Articles 62, 63, 134, 173-187.

(3) *System der Raumlehre*. Leipzig, 1872, t. II, p. 129.

(4) *A Treatise on the theory of determinants and their applications in Analysis and Geometry*. Cambridge, 1880.

Voir aussi les deux Mémoires que j'ai publiés au *Journal de M. Kronecker*, t. XCII et XCV.

D'après cette définition on a

$$
(\mathrm{I}') \quad \left\{ \begin{array}{l}
| e^{(1)} = | e^{(2)} e^{(3)} \ldots e^{(n)}], \\
| e^{(2)} = - [e^{(1)} e^{(3)} \ldots e^{(n)}], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
| e^{(r)} = (-1)^{r-1} [e^{(1)} \ldots e^{(r-1)} e^{(r+1)} \ldots e^{(n)}],
\end{array} \right.
$$

$$
(\mathrm{II}') \quad \left\{ \begin{array}{l}
| [e^{(1)} e^{(2)}] = [e^{(3)} e^{(4)} \ldots e^{(n)}], \\
| [e^{(1)} e^{(3)}] = - [e^{(2)} e^{(4)} \ldots e^{(n)}], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
| [e^{(n-1)} e^{(n)}] = [e^{(1)} e^{(2)} \ldots e^{(n-2)}],
\end{array} \right.
$$

$$
(\mathrm{III}') \quad \left\{ \begin{array}{l}
| [e^{(1)} e^{(2)} e^{(3)}] = [e^{(4)} \ldots e^{(n)}], \\
| [e^{(1)} e^{(2)} e^{(4)}] = - [e^{(3)} \ldots e^{(n)}], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
| [e^{(n-2)} e^{(n-1)} e^{(n)}] = (-1)^{n-3} [e^{(1)} \ldots e^{(n-3)}];
\end{array} \right.
$$

et d'une façon analogue on pourrait établir les compléments des unités d'une dimension quelconque.

28. Supposons, pour un instant, que n soit égal à 4 et posons $e^{(1)} = \mathrm{E}^{(1)}, \ldots, e^{(4)} = \mathrm{E}^{(4)}$. Alors, en comparant les formules (I'), (II'), (III') avec les formules (I), (II), (III) du n° 9, on obtient d'une part

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^{(i)} = | \mathrm{E}^{(i)}, \\
[\varepsilon^{(i)} \varepsilon^{(k)}] = | [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)}], \\
[\varepsilon^{(i)} \varepsilon^{(k)} \varepsilon^{(l)}] = | [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)} \mathrm{E}^{(l)}];
\end{gathered}
$$

on en tire

$$
\begin{gathered}
| [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)}] = [| \mathrm{E}^{(i)} | \mathrm{E}^{(k)}], \\
| [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)} \mathrm{E}^{(l)}] = [| \mathrm{E}^{(i)} | \mathrm{E}^{(k)} | \mathrm{E}^{(l)}];
\end{gathered}
$$

ou, sous forme commune,

$$
(\mathrm{VI}) \qquad | [\mathcal{E} \;\; \mathcal{E}^{\star}] = [| \mathcal{E} \;\; | \mathcal{E}^{\star}],
$$

$\mathcal{E}$ étant égal à $\mathrm{E}^{(i)}$ et $\mathcal{E}^{\star}$, dans la première formule, égal à $\mathrm{E}^{(k)}$ et, dans la deuxième formule, égal à $[\mathrm{E}^{(k)} \mathrm{E}^{(l)}]$.

D'autre part, les formules (II*) et (III*) du n° 9, savoir

$$
\begin{gathered}
[\varepsilon^{(l)} \varepsilon^{(m)}] = [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)}], \\
[\varepsilon^{(i)} \varepsilon^{(k)} \varepsilon^{(l)}] = \mathrm{E}^{(m)}.
\end{gathered}
$$

ou

$$
\begin{gathered}
- | \mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)} \mathrm{E}^{(m)} \quad \mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)} \mathrm{E}^{(l)}] = - [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)} \mathrm{E}^{(m)} \mathrm{E}^{(l)}] [\mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)}], \\
| \mathrm{E}^{(m)} \mathrm{E}^{(l)} \quad \mathrm{E}^{(m)} \mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)}] = \quad [\mathrm{E}^{(m)} \mathrm{E}^{(l)} \mathrm{E}^{(i)} \mathrm{E}^{(k)}] \mathrm{E}^{(m)}.
\end{gathered}
$$

peuvent être représentées sous la forme commune

$$(\mathrm{VII}) \qquad [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star \quad \mathcal{E}\mathcal{E}^{\star\star}] = [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}]\mathcal{E},$$

étant dans la première formule

$$\mathcal{E} = [\mathrm{E}^{(i)}\mathrm{E}^{(k)}], \qquad \mathcal{E}^\star = \mathrm{E}^{(m)}, \qquad \mathcal{E}^{\star\star} = \mathrm{E}^{(l)},$$

et dans la deuxième formule

$$\mathcal{E} = \mathrm{E}^{(m)}, \qquad \mathcal{E}^\star = \mathrm{E}^{(l)}, \qquad \mathcal{E}^{\star\star} = [\mathrm{E}^{(i)}\mathrm{E}^{(k)}].$$

J'admets dès à présent que les formules (VI) et (VII) soient généralisées pour n unités; ou :

Etant $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\star$, $\mathcal{E}^{\star\star}$ trois unités de telles dimensions que la somme de leurs dimensions est égale à n, j'introduis les définitions :

$$(\mathrm{VI}) \qquad |[\mathcal{E}\mathcal{E}^\star] = [|\mathcal{E} \quad |\mathcal{E}^\star]$$

et

$$(\mathrm{VII}) \qquad [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star \quad \mathcal{E}\mathcal{E}^{\star\star}] = [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}]\mathcal{E}.$$

En changeant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\star$, la formule (VII) devient

$$[\mathcal{E}^\star\mathcal{E} \quad \mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}] = [\mathcal{E}^\star\mathcal{E}\mathcal{E}^{\star\star}]\mathcal{E}^\star,$$

et, en y changeant l'ordre de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\star$, on obtient

$$(\mathrm{VII}_1) \qquad [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star \quad \mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}] = [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}]\mathcal{E}^\star.$$

Nous avons supposé que la somme des dimensions des unités $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\star$, $\mathcal{E}^{\star\star}$ soit égale à n; supposons d'ailleurs, pour un instant, que les unités $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\star$, $\mathcal{E}^{\star\star}$ ne renferment que des unités *différentes* de la première dimension et rangées dans un tel ordre que $[\mathcal{E}\mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}] = +1$. Alors on aura, d'après la définition du *complément*,

$$|\mathcal{E} = [\mathcal{E}^\star\mathcal{E}^{\star\star}]$$

et, par conséquent, la formule (VII_1) prendra la forme

$$(\mathrm{IV}') \qquad [\mathcal{E}\mathcal{E}^\star \quad |\mathcal{E}] = \mathcal{E}^\star.$$

Dans cette formule, qui représente la généralisation de la formule ($\mathrm{IV}^\star$) (n° 9), $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\star$ sont des unités de telles dimensions, que la somme de leurs dimensions reste plus petite que n.

29. Soit

$$\left.\begin{aligned} a^{(p)} &= a_1^{(p)} e^{(1)} + a_2^{(p)} e^{(2)} + \ldots + a_n^{(p)} e^{(n)} \\ b^{(q)} &= b_1^{(q)} e^{(1)} + b_2^{(q)} e^{(2)} + \ldots + b_n^{(q)} e^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad (p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

et remplaçons, dans ces expressions, les $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ par les compléments $| e^{(1)}, \ldots, | e^{(n)}$, sans changer les valeurs des coefficients.

Je désigne par $| a^{(p)}$ et $| b^{(q)}$ les expressions qui proviennent de cette manière des expressions $a^{(p)}$ et $b^{(q)}$, et je nomme les expressions

$$\begin{aligned} | a^{(p)} &= a_1^{(p)} \, | \, e^{(1)} + a_2^{(p)} \, | \, e^{(2)} + \ldots + a_n^{(p)} \, | \, e^{(n)}, \\ | b^{(q)} &= b_1^{(q)} \, | \, e^{(1)} + b_2^{(q)} \, | \, e^{(2)} + \ldots + b_n^{(q)} \, | \, e^{(n)} \end{aligned}$$

les *compléments de* $a^{(p)}$ *et* $b^{(q)}$.

D'après les formules (I'), on a

$$\text{(VIII)} \qquad [e^{(i)} \, | \, e^{(i)}] = 1, \qquad [e^{(i)} \, | \, e^{(k)}] = 0, \qquad (i \neq k; \; i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par conséquent, on obtient

$$(27) \qquad [a^{(p)} \, | \, b^{(q)}] = a_1^{(p)} b_1^{(q)} + a_2^{(p)} b_2^{(q)} + \ldots + a_n^{(p)} b_n^{(q)}.$$

30. La formule (IV') donne naissance à beaucoup de systèmes de relations dont je vais établir quelques-unes.

Égalons $\mathcal{E}$ à $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ et $\mathcal{E}^*$ successivement aux unités de la première, de la deuxième, ..., de la $r^{\text{ième}}$ dimension. Alors on trouve

$$(28) \qquad \begin{aligned} [a^{(1)} a^{(2)} \, | \, b^{(1)}] = {} & [a^{(1)} \, | \, b^{(1)}] a^{(2)} \\ & - [a^{(2)} \, | \, b^{(1)}] a^{(1)}, \end{aligned}$$

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} [a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} \, | \, b^{(1)}] = {} & [a^{(1)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(2)} a^{(3)}] \\ & + [a^{(2)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(3)} a^{(1)}] \\ & + [a^{(3)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(1)} a^{(2)}], \end{aligned} \right.$$

. . . .

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} & [a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)} \, | \, b^{(1)}] \\ & \quad = [a^{(1)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(2)} a^{(3)} \ldots a^{(r)}] \\ & \qquad - [a^{(2)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(1)} a^{(3)} \ldots a^{(r)}] \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad + (-1)^{i-1} [a^{(i)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(i-1)} a^{(i+1)} \ldots a^{(r)}] \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad + (-1)^{r-1} [a^{(r)} \, | \, b^{(1)}] [a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r-1)}]. \end{aligned} \right.$$

D'après la formule (VI), on obtient aisément

$$(31) \qquad | \, [a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(r)}] = [\, | \, a^{(1)} \, | \, a^{(2)} \ldots | \, a^{(r)}].$$

et à l'aide de cette égalité on déduit de la formule (28)

$$(32_1)\qquad [a^{(1)}a^{(2)} \mid b^{(1)}b^{(2)}] = [a^{(1)} \mid b^{(1)}][a^{(2)} \mid b^{(2)}] - [a^{(2)} \mid b^{(1)}][a^{(1)} \mid b^{(2)}].$$

De même, on tire de la formule (29)

$$\begin{aligned}[a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} \mid b^{(1)}b^{(2)}] = {} & [a^{(1)} \mid b^{(1)}][a^{(2)}a^{(3)} \mid b^{(2)}] \\ & + [a^{(2)} \mid b^{(1)}][a^{(3)}a^{(1)} \mid b^{(2)}] \\ & + [a^{(3)} \mid b^{(1)}][a^{(1)}a^{(2)} \mid b^{(2)}],\end{aligned}$$

et, au moyen de la formule (28), on a

$$*)\quad \left\{\begin{aligned}[a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} \mid b^{(1)}b^{(2)}] = {} & [a^{(1)} \mid b^{(1)}]\big\{[a^{(2)} \mid b^{(2)}]a^{(3)} - [a^{(3)} \mid b^{(2)}]a^{(2)}\big\} \\ & + [a^{(2)} \mid b^{(1)}]\big\{[a^{(3)} \mid b^{(2)}]a^{(1)} - [a^{(1)} \mid b^{(2)}]a^{(3)}\big\} \\ & + [a^{(3)} \mid b^{(1)}]\big\{[a^{(1)} \mid b^{(2)}]a^{(2)} - [a^{(2)} \mid b^{(2)}]a^{(1)}\big\}\end{aligned}\right.$$

ou

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}[a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} \mid b^{(1)}b^{(2)}] = {} & [a^{(2)}a^{(3)} \mid b^{(1)}b^{(2)}]a^{(1)} \\ & + [a^{(3)}a^{(1)} \mid b^{(1)}b^{(2)}]a^{(2)} \\ & + [a^{(1)}a^{(2)} \mid b^{(1)}b^{(2)}]a^{(3)}.\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de la formule (31), on tire de la formule (33*)

$$(32_2)\quad [a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} \mid b^{(1)}b^{(2)}b^{(3)}] = \begin{vmatrix} [a^{(1)} \mid b^{(1)}] & [a^{(1)} \mid b^{(2)}] & [a^{(1)} \mid b^{(3)}] \\ [a^{(2)} \mid b^{(1)}] & [a^{(2)} \mid b^{(2)}] & [a^{(2)} \mid b^{(3)}] \\ [a^{(3)} \mid b^{(1)}] & [a^{(3)} \mid b^{(2)}] & [a^{(3)} \mid b^{(3)}] \end{vmatrix}.$$

D'une façon tout à fait analogue, on obtient la formule générale

$$[a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(r)} \mid b^{(1)}b^{(2)}\dots b^{(r)}] = \begin{vmatrix} [a^{(1)} \mid b^{(1)}] & [a^{(1)} \mid b^{(2)}] & \dots & [a^{(1)} \mid b^{(r)}] \\ [a^{(2)} \mid b^{(1)}] & [a^{(2)} \mid b^{(2)}] & \dots & [a^{(2)} \mid b^{(r)}] \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ [a^{(r)} \mid b^{(1)}] & [a^{(r)} \mid b^{(2)}] & \dots & [a^{(r)} \mid b^{(r)}] \end{vmatrix},$$

où r est plus petit ou égal à n. Même, si r est plus grand que n, la relation (32) existe encore, mais, dans ce cas, le premier membre s'évanouit.

31. La formule (32) représente, sous une forme très simple, le théorème le plus général relatif à la multiplication des déterminants.

J'ai déduit cette formule de la définition (IV'), tirée elle-même de la définition (VII), pour prouver qu'elles conduisent, d'une

part, à des relations connues. D'autre part, ces définitions ont fourni les formules (28), (29) et (33), qui représentent les généralisations des formules (6), (13) et (7). Pour montrer ce résultat, j'admets $n=4$, et je fais d'abord

$$e^{(1)}=E^{(1)}, \quad \ldots, \quad e^{(4)}=E^{(4)}.$$

Alors on peut poser

$$a^{(1)}=A, \quad a^{(2)}=P; \quad \mid b^{(1)}=\rho,$$

et l'on voit que la formule (28) se change en la formule (6).

Si l'on pose

$$a^{(1)}=P, \quad a^{(2)}=Q, \quad a^{(3)}=R; \quad \mid b^{(1)}=\alpha,$$

la formule (29) prend la forme

$$[PQR \quad \alpha]=[P\alpha][QR]+[Q\alpha][RP]+[R\alpha][PQ]$$

ou, en tenant compte des identités,

$$[PQR \quad \alpha]=-[\alpha \quad PQR], \quad [P\alpha]=-[\alpha P], \quad \ldots;$$

on obtient la formule (13)

$$[\alpha \quad PQR]=[\alpha P][QR]+[\alpha Q][RP]+[\alpha R][PQ].$$

Comme $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$ représentent, sous les conditions introduites, deux points, le produit extérieur $[b^{(1)}b^{(2)}]$ et son complément $\mid [b^{(1)}b^{(2)}]$ représentent des droites. Par conséquent, on peut poser

$$\mid [b^{(1)}b^{(2)}]=[AP]$$

et, en posant de plus

$$a^{(1)}=B, \quad a^{(2)}=C, \quad a^{(3)}=D,$$

la formule (33) devient

$$[BCD \quad AP]=[CDAP]B+[DBAP]C+[BCAP]D.$$

On en déduit, comme on a, d'après la formule (VII),

$$[BCD \quad AP]=[AP \quad BCD],$$

a formule (7)

$$[AP \quad BCD]=[APCD]B+[APDB]C+[APBC]D.$$

D'une façon analogue, en posant

$$e^{(1)}=\varepsilon^{(1)}, \quad \ldots, \quad e^{(4)}=\varepsilon^{(4)},$$

on tire des formules (28), (29) et (33) les formules (10), (9) et (11).

32. Les considérations précédentes conduisent à une des interprétations que l'on peut donner aux quantités $a^{(i)}$, à leurs produits extérieurs et aux unités $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$, savoir à l'interprétation attachée à la Géométrie à n dimensions.

En Géométrie de l'espace ordinaire ($n = 4$), j'ai appelé *éléments* de la première, de la deuxième et de la troisième dimension les points, les droites et les plans. Si l'on appelle, d'une façon analogue, *éléments* les êtres géométriques qui correspondent, dans l'espace à n dimensions, aux points, aux droites et aux plans de l'espace ordinaire, on reconnaît qu'il y a, dans l'espace à n dimensions, des éléments de la première, de la deuxième, ..., de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension.

En désignant par $a_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) les coordonnées homogènes des éléments de la première dimension $a^{(i)}$, les coordonnées homogènes des éléments de la deuxième, ..., de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension seront représentées par les mineurs de deuxième, ..., de $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, formés des termes $a_j^{(i)}$. Par conséquent, les éléments dans l'espace à n dimensions seront représentés par les expressions $a^{(i)}$, $[a^{(i_1)}a^{(i_2)}]$, ..., $[a^{(i_1)}a^{(i_2)}\ldots a^{(i_{n-1})}]$ en ce sens que les coefficients des $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ et de leurs produits extérieurs en fournissent les coordonnées homogènes. Si l'on égale les coefficients $a_j^{(j)}$ à $+1$ et les autres coefficients $a_j^{(j')}$ ($j, j' = 1, 2, \ldots, n; j \neq j'$) à zéro, on obtient

$$e^{(1)} = a^{(1)}, \qquad \ldots, \qquad e^{(n)} = a^{(n)}.$$

Conformément aux développements du n° 6, on en conclut que les unités $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ peuvent être envisagées comme des éléments particuliers de la première dimension qui forment, dans l'espace à n dimensions, *un n-ièdre*. En le choisissant comme *n-ièdre* de référence, les éléments se représentent comme fonctions linéaires des éléments correspondants, relatifs à ce *n-ièdre* de référence. Les coefficients qui entrent dans les expressions linéaires sont des coordonnées *n-iédriques*.

33. Quant aux éléments composés qui proviennent de la jonction ou de l'intersection d'autres éléments originaux, la dimension

d'un élément composé est égale à la somme des dimensions des éléments composants, cette somme prise suivant le module n. A l'aide des deux définitions

$$\text{(IX)}\quad [\,|\,e^{(1)}e^{(2)}\ldots e^{(h)}\,]\,e^{(h+1)}\ldots e^{(r)}\,] = [\,e^{(1)}e^{(2)}\ldots e^{(h)}e^{(h+1)}\ldots e^{(r)}\,]\;(r \leqq n),$$

$$\text{(VII)}\quad [\,\mathcal{E}\mathcal{E}^{\star}\quad \mathcal{E}\mathcal{E}^{\star\star}\,] = [\,\mathcal{E}\mathcal{E}^{\star}\mathcal{E}^{\star\star}\,]\,\mathcal{E},$$

étant $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{\star}$, $\mathcal{E}^{\star\star}$ des unités de telles dimensions que la somme de leurs dimensions est égale à n, un élément composé qui provient, soit de l'intersection, soit de la jonction d'autres éléments originaux, peut être représenté par les unités ayant la même dimension que l'élément composé. De plus, à l'aide des définitions (VII) et (IX), un élément composé de la dimension r s'exprime par d'autres éléments de la dimension r, eux-mêmes convenablement composés des éléments originaux.

Par exemple, l'élément de la première dimension

$$[\,a^{(1)}a^{(2)}\mid b^{(1)}\,],$$

qui provient de l'intersection de l'élément de la deuxième dimension $[a^{(1)}a^{(2)}]$ et de l'élément de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension $|\,b^{(1)}$ s'exprime, au moyen de la formule (28), par les deux éléments de la première dimension $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$.

De même, l'élément de la $(r-1)^{\text{ième}}$ dimension

$$[\,a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(r)}\mid b^{(1)}\,],$$

qui provient de l'intersection des deux éléments

$$[\,a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(r)}\,]\quad \text{et}\quad |\,b^{(1)},$$

ayant respectivement les dimensions r et $(n-1)$, s'exprime, au moyen de la formule (30), par les r éléments de la $(r-1)^{\text{ième}}$ dimension

$$[\,a^{(i_1)}a^{(i_2)}\ldots a^{(i_{r-1})}\,].$$

34. Les résultats précédents forment la généralisation de ceux que j'ai établis dans la première Partie de ce Mémoire. D'une façon analogue, on peut généraliser les résultats de la deuxième Partie.

On reconnaît d'abord que le produit extérieur de la dimension zéro

$$[\,a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(n)}\,] = 0.$$

dans lequel $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ sont dérivés d'un élément variable de la $r^{\text{ième}}$ dimension ($r = 1, 2, \ldots, n-1$), en Géométrie à n dimensions, fournit les êtres géométriques qui deviennent dans les cas $n = 4$, $r = 1$ ou 3 les surfaces et dans le cas $n = 4$, $r = 2$ les complexes de la Géométrie ordinaire. On en déduit ensuite que le produit extérieur de la dimension $n - 3$

$$[a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n-2)} \mid b^{(1)}] = 0,$$

dans lequel $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n-2)}; b^{(1)}$ sont dérivés d'un élément variable de la $r^{\text{ième}}$ dimension, fournit, en Géométrie à n dimensions, les êtres géométriques qui deviennent pour les mêmes suppositions, relatives aux nombres n et r, les courbes gauches, les surfaces développables et les congruences de droites de la Géométrie ordinaire. Afin de ne pas franchir les limites que je me suis fixées pour ce Mémoire, je me borne à indiquer les résultats établis. Dans une autre occasion, je reviendrai aux recherches relatives à la Géométrie à n dimensions.

35. En terminant ce Mémoire, je reprends les formules

$$\text{(VIII)} \quad [e^{(i)} \mid e^{(i)}] = 1, \qquad [e^{(i)} \mid e^{(k)}] = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq k).$$

Ces formules expriment que le produit extérieur de l'unité $e^{(i)}$ et de son complément $\mid e^{(i)}$ est égal à $+1$, et que le produit extérieur de $e^{(i)}$ et du complément d'une unité $e^{(k)}$, différente de $e^{(i)}$, s'évanouit.

On peut donner à ces résultats une forme plus simple, en disant que les formules (VII) *définissent* un nouveau calcul, nommé par M. Grassmann *multiplication intérieure*.

Ce calcul constitue les *produits intérieurs* qui forment la généralisation des *produits géométriques* (¹) dont se sont déjà servis MM. *Resal* et *Somoff* dans leurs recherches cinématiques. La multiplication intérieure fournit, en Géométrie ordinaire, la distance de deux points, la projection d'un vecteur sur une droite ou un plan, le cosinus d'angle, formé par deux droites, par deux plans ou par une droite et un plan, et enfin la condition de la

(¹) Sous le même nom M. *de Saint-Venant* a introduit dans une Note, insérée aux *Comptes rendus* (t. XXI, p. 620), un cas particulier des produits extérieurs.

perpendicularité; en Géométrie à n dimensions, la multiplication intérieure donne naissance à la généralisation de ces notions. Il résulte de là que, tandis que la multiplication extérieure s'adapte à la Géométrie de position, la multiplication intérieure est attachée à la Géométrie métrique.

36. Les combinaisons que la multiplication extérieure et la multiplication intérieure forment des coordonnées sont précisément celles dont on a besoin en Géométrie et en Mécanique. En adoptant ces deux espèces de multiplication, toutes les notions de la Géométrie et de la Mécanique obtiennent une représentation plus concise, les formules se simplifient et permettent une interprétation immédiate. La différence qui existe jusqu'à présent entre les méthodes de l'intuition et du calcul disparaît et l'on peut profiter des avantages qui résultent de l'une et de l'autre. Dès lors, il me semble que la multiplication extérieure et la multiplication intérieure méritent l'attention des géomètres et la réception définitive en Mathématiques.

Quant à l'interprétation des unités, elle varie suivant le domaine et le but des recherches auxquelles on applique les produits extérieurs et les produits intérieurs. Dans le présent Mémoire, j'ai établi une des interprétations que l'on peut attacher à la Géométrie; dans un prochain Mémoire j'établirai une deuxième interprétation des unités $e^{(1)}, \ldots, e^{(4)}$ qui se rattache aussi à la Géométrie et tout particulièrement à la Mécanique. On verra, je l'espère, que la notion de produit extérieur qui a établi, dans ce Mémoire, le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique forme de même le lien entre les deux branches correspondantes de la Mécanique.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. DARBOUX. — LEÇONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES, ET LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL. — Deuxième Partie. 1 volume gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889.

Le second Volume du Traité de M. Darboux est divisé en deux Livres, le IVe et le Ve de l'Ouvrage.

Le Livre IV a pour titre : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles;* le Livre V traite des *lignes tracées sur les surfaces.*

1. On trouvera dans le Livre IV le développement de plusieurs idées fécondes dont le premier Volume déjà laissait entrevoir le germe : l'application à la Géométrie des équations différentielles partielles du type de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

On doit, comme l'on sait, à Laplace, un mode de transformation de ces équations les unes dans les autres qui consiste à prendre pour nouvelle fonction, soit l'expression

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az$$

soit la suivante

$$z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz.$$

En réitérant l'une et l'autre de ces transformations, on engendre une suite d'équations illimitée dans les deux sens, dite *suite de Laplace,* dont fait partie l'équation proposée. L'intégration d'une seule équation de la suite entraîne celle de toutes les autres.

Dans un premier Chapitre, consacré à d'intéressantes généralités sur les congruences de lignes et, en particulier, de lignes droites, M. Darboux montre comment des considérations purement géométriques conduisent naturellement à la transformation de Laplace. Les attaches géométriques de cette remarquable transformation se trouvent dès lors nettement posées, et l'on peut déjà pressentir le rôle considérable auquel elle est appelée.

Les Chapitres suivants présentent une étude purement analytique des équations du type de Laplace et, en premier lieu, de la méthode due à ce grand géomètre, méthode qui repose sur l'emploi de la suite dont il a été déjà question. L'auteur introduit dans son analyse les invariants

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c,$$

qui servent à caractériser toutes les équations que l'on peut déduire les unes des autres, soit en multipliant la fonction inconnue par une arbitraire déterminée, soit en remplaçant les variables x, y par les nouvelles variables $x_1 = \varphi(x)$, $y_1 = \psi(y)$: ces invariants, qui paraissent avoir échappé à Laplace, sont indispensables dans une exposition complète de la question.

Un des cas les plus importants d'intégrabilité est celui où la suite de Laplace se termine, soit dans un sens, soit dans les deux. M. Darboux se propose le problème de trouver toutes les équations pour lesquelles cette circonstance se présente.

En 1870, dans un travail considérable présenté à l'Académie des Sciences, M. Moutard avait traité ce même problème. Malheureusement, ce Mémoire fut détruit en 1871 dans les incendies de la Commune, et il n'a été connu du public que par un extrait paru dans les *Comptes rendus,* et par une rédaction nouvelle de la partie relative aux équations à invariants égaux, publiée dans le *Journal de l'École Polytechnique*. M. Darboux résout ce problème par une première méthode directe, et le reprend ensuite par une méthode plus savante et plus complète, fondée sur la considération de l'équation adjointe d'une équation différentielle linéaire aux dérivées ordinaires.

Cette notion d'équation adjointe remonte à Lagrange : elle revient à maintes reprises dans l'Ouvrage de M. Darboux. Soit

$$f(u) = \lambda u + \lambda_1 u' + \ldots + \lambda_n u^{(n)},$$

où les λ sont des fonctions données de la variable x, et u, u', ... une fonction quelconque et ses n premières dérivées par rapport

à x; il existe une expression analogue

$$g(v) = \mu v + \mu_1 v' + \ldots + \mu_n v^{(n)},$$

telle que la différence

$$v f(u) - u g(v) = \frac{d\psi(u, v)}{dx}$$

soit, quelles que soient les fonctions u, v, la dérivée exacte d'une fonction de x contenant u, v, et des $(n-1)$ premières dérivées de ces deux fonctions. Cela étant, les équations

$$f(u) = 0, \qquad g(v) = 0$$

sont dites adjointes l'une de l'autre.

Un cas intéressant est celui où les deux équations ci-dessus sont équivalentes; mais il y a, à cet égard, une distinction capitale à faire, selon la parité de n. Le cas de n pair a été rencontré et étudié par Jacobi; on a dans cette hypothèse l'identité

$$f(u) = g(u);$$

mais, si n est impair, à cette identité se substitue la suivante :

$$f(u) = -g(u).$$

Une étude approfondie de ce dernier cas occupe le Chapitre V; on y trouve de nombreuses propriétés des équations d'ordre impair équivalentes à leur adjointe; ces équations rentrent toutes dans le type général

$$f(u) = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_3}\cdots\frac{1}{\alpha_{n-1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_n}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_{n-1}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{u}{\alpha_1} = 0.$$

2. Outre la méthode qui résulte de l'application de la transformation de Laplace, Riemann en a fait connaître une autre dans un travail sur la propagation du son, inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Göttingue* en 1860. Cette nouvelle méthode est fondée sur une extension de la notion d'équation adjointe au cas des équations différentielles partielles.

Soit $\mathcal{F}(z)$ une expression linéaire et homogène par rapport à la fonction z et à ses dérivées partielles en x et y, dont les coefficients soient des fonctions de x, y. On peut trouver une expression $\mathcal{G}(u)$ composée d'une manière analogue en u, telle que,

quelles que soient les fonctions z et u, on ait l'identité

$$u\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

où M, N sont des fonctions de x, y, de z, u et des dérivées partielles de z et de u.

Par exemple, dans le cas de

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

on a

$$\mathcal{G}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)y.$$

$$M = auz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad N = buz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Les équations

$$\mathcal{F}(z) = 0, \qquad \mathcal{G}(u) = 0$$

sont dites adjointes l'une de l'autre. Riemann était parvenu à cette conclusion que, pour obtenir l'intégrale générale de $\mathcal{F}(z) = 0$, il suffit de trouver une solution de l'équation $\mathcal{G}(u) = 0$ vérifiant certaines conditions simples faciles à remplir. M. Darboux a précisé le résultat de Riemann en montrant que, pour intégrer l'équation $\mathcal{F}(z) = 0$, il suffit de trouver une fonction parfaitement déterminée $u(x, y, x_0, y_0)$ qui, en tant que fonction de x, y vérifie l'équation $\mathcal{G}(u) = 0$, et, en tant que fonction de x_0, y_0, vérifie l'équation proposée elle-même. La fonction $u(x, y, x_0, y_0)$ joue un rôle en quelque sorte symétrique par rapport aux deux équations $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{G} = 0$, et fournit tout aussi bien l'intégrale générale de $\mathcal{G}(u) = 0$ que celle de $\mathcal{F}(z) = 0$; de la sorte, l'intégration de ces deux équations se trouve être un seul et même problème.

3. L'application la plus remarquable et la plus simple de ces diverses méthodes se rencontre dans l'équation d'Euler et de Poisson

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\beta'}{x - y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x - y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui se présente fréquemment dans diverses questions d'Analyse et de Géométrie, et dont les attaches avec la fonction hypergéométrique sont bien connues. M. Darboux consacre un Chapitre entier à cette équation, sur laquelle il revient d'ailleurs ensuite à diverses reprises.

4. Parmi les équations du type de Laplace, une des classes les plus étudiées, qui a été l'objet du travail déjà cité de M. Moutard, c'est celle des équations dont les invariants h et k sont égaux. Ces équations sont toutes réductibles au type

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda,$$

et λ est la valeur commune aux deux invariants.

Le premier problème que traite M. Darboux consiste dans la recherche des équations à invariants égaux, pour laquelle la suite de Laplace est limitée dans les deux sens; étant donné du reste que, dans ce cas, la suite ne peut se limiter dans un sens, sans être aussitôt limitée dans l'autre. Les équations d'ordre impair équivalentes à leur adjointe trouvent ici leur rôle, et leur intervention dans cet important problème explique l'étude approfondie que l'auteur en avait faite précédemment.

La méthode de M. Moutard repose sur des principes tout différents; elle est fondée sur une proposition simple et féconde qui consiste en ce que, si deux équations

$$\frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda, \qquad \frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda_1$$

admettent l'une la solution ω, l'autre la solution $\frac{1}{\omega}$, l'intégration de l'une entraîne celle de l'autre. De là résulte la possibilité de déduire d'une équation intégrable donnée une infinité d'autres équations complètement intégrables, et qui contiennent autant de fonctions ou de constantes arbitraires que l'on veut.

Parmi les équations à invariants égaux figurent celles que M. Darboux appelle *harmoniques* et qui sont réductibles au type

$$\frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x+y) - \varphi(x-y);$$

l'équation d'Euler et de Poisson, par exemple, est une équation harmonique. Ces équations présentent des particularités tout à fait spéciales, et la méthode de M. Moutard y trouve un champ bien propre à en faire ressortir la fécondité. Nous ne pouvons entrer dans le détail des propositions que M. Darboux en a déduites, mais nous ne saurions omettre de noter ici le lien fort original qui unit cette théorie à celle des surfaces découvertes par

Liouville, et dont le ds^2 est de la forme

$$ds^2 = [f(x+y) - \varphi(x-y)]\, dx\, dy.$$

L'auteur termine ce Chapitre en mentionnant une série de désidérata qui auront pour effet d'attirer l'attention des géomètres sur ces théories difficiles, qui sont comme des postes avancés du progrès scientifique.

5. Avant d'abandonner la partie exclusivement analytique du Livre IV, n'omettons pas de signaler un Chapitre fort curieux, qui a pour titre *La résolution des équations linéaires les unes par les autres*. Nous l'avons réservé pour la fin de l'analyse de cette Partie, car il en présente tout à la fois la généralisation et la synthèse.

La transformation de Laplace consiste à prendre pour nouvelle fonction l'expression

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + a z,$$

et la fonction z_1 vérifie une équation qui a la même forme que la proposée. Est-ce là le seul cas? Ne pourrait-on trouver une fonction z_1 composée linéairement avec la fonction z et ses dérivées partielles, qui vérifiât une équation de Laplace, en même temps que z? Telle est la question générale que se pose M. Darboux et dont il présente la solution complète.

On remarque d'abord que l'équation proposée permet de chasser de l'expression de z toutes ses dérivées prises à la fois par rapport à x et y, en sorte que z_1 est toujours réductible au type

$$z_1 = \mathrm{M} z + \mathrm{P}_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \ldots + \mathrm{P}_m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + \mathrm{Q}_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \ldots + \mathrm{Q}_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n};$$

l'auteur représente une telle expression par le symbole (m, n).

Cela posé, si l'on détermine les coefficients M, P_i, Q_i, ou plutôt leurs supports, de sorte que (m, n) s'annule pour $(m+n)$ solutions linéairement indépendantes de la proposée, on aura le type général des expressions (m, n) qui vérifient une équation du type de Laplace, sauf un cas exceptionnel, qui se ramène toutefois au précédent après application préalable de la transformation de Laplace. On a donc là un moyen général de rattacher à toute équation de Laplace que l'on sait intégrer une infinité d'équations du

même type immédiatement intégrables. Mais, fait remarquable, et qu'une interprétation géométrique ultérieure explique très bien, la transformation de Laplace ne figure pas parmi les nouvelles transformations ainsi définies, ou plutôt elle se présente comme une limite de certaines de ces transformations.

M. Darboux indique ensuite une seconde méthode de transformation, sur laquelle il insiste un peu moins, et qui conduit au même but que la précédente, au moyen de certaines quadratures.

6. Les Chapitres que nous venons de parcourir constituent la base analytique d'une série d'applications, par lesquelles se termine le IVe Livre, et qui se présentent ensuite dans diverses parties de l'Ouvrage. Comme premières applications, l'auteur résout plusieurs problèmes, dans lesquels figurent des congruences dont les développables découpent un réseau conjugué sur certaines surfaces; tantôt on suppose la congruence donnée et l'on cherche les surfaces correspondantes; tantôt on suppose connue l'une des surfaces, ainsi que le réseau découpé sur elle par les développables, et l'on demande la congruence, de même que les autres surfaces sur lesquelles les développables de cette congruence découpent un réseau conjugué. Ces divers problèmes se ramènent uniformément à l'intégration d'une équation de Laplace, et l'on y voit intervenir les deux espèces de transformations que nous avons signalées ci-dessus.

Comme application de ces problèmes, l'auteur étudie d'intéressantes propriétés des rayons réfractés ou réfléchis dont l'origine se trouve dans des travaux de Malus et de Dupin, et sur lesquelles il revient quelques pages plus loin, à propos des normales d'une surface.

L'extrême généralité de ces problèmes de Géométrie leur ouvre du reste accès aux théories les plus diverses. C'est ainsi, par exemple, que M. Darboux leur rattache l'étude des surfaces à lignes de courbure isothermes, qui occupent un Chapitre entier. Après avoir donné de diverses manières l'équation différentielle du quatrième ordre de ces surfaces, l'auteur démontre l'élégan théorème que voici, qui affirme une fois de plus l'utilité des coordonnées pentasphériques dans l'étude des questions métriques.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_5$ *les coordonnées pentasphériques d'un*

point d'une surface à lignes de courbure isothermes, exprimées en fonction des paramètres ρ, ρ_1 *des lignes de courbure; les cinq fonctions* x_i *sont les solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux; et réciproquement, si* $x_1, x_2, \ldots, x_5$ *sont cinq solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux, liées par l'équation*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 0,$$

ces cinq quantités sont les coordonnées pentasphériques d'un point d'une surface à lignes de courbure isothermes; les variables indépendantes sont les paramètres de ces lignes.

Les Chapitres suivants traitent des trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et en particulier des droites normales à une surface; ils présentent de curieux théorèmes sur les systèmes de rayons réfléchis ou réfractés. Citons, par exemple, le suivant, qui complète une proposition due à Dupin. *Si les développables d'un pinceau lumineux se conservent par réfraction ou réflexion, ce pinceau est formé des normales d'une surface.*

M. Darboux applique les divers résultats qu'il obtient à l'étude du problème suivant : *Trouver les surfaces dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une quadrique donnée.* Il suffit évidemment de connaître pour chaque surface le système de ses normales. Or, à ce point de vue, une première solution est fournie par le système des tangentes à une famille de géodésiques tracées sur une quadrique homofocale. Une seconde solution est due à Chasles, mais surtout à Liouville, qui en a donné la représentation complète : cette seconde solution est constituée par l'ensemble des tangentes communes à deux quadriques homofocales à la quadrique proposée.

Après avoir étudié et discuté avec beaucoup de détail cette solution célèbre, l'auteur fait voir que la variation des constantes suffit pour obtenir l'intégrale générale du problème; il suffit d'assujettir la variation des trois constantes de la surface de Liouville à une loi qui est fournie par l'équation bien connue

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha} - \frac{\partial z}{\partial\beta}\right).$$

Le Livre IV se termine par un Chapitre entièrement consacré

à l'étude des congruences de cercles et des systèmes orthogonaux appelés *cycliques* par M. Ribaucour.

En transformant d'après Lie les propositions obtenues par les sphères, M. Darboux obtient ce théorème élégant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale d'une congruence de droites, c'est que les six coordonnées de chaque droite de la congruence, lesquelles dépendent de deux paramètres, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre.

Par exemple, les surfaces dont la congruence des normales possède cette propriété sont celles dont les deux rayons principaux sont fonction l'un de l'autre.

7. Le Livre V a pour objet les lignes tracées sur une surface. Il offre dès son début une continuation et des applications des formules cinématiques établies dans le premier Volume. L'auteur adopte un trièdre de référence mobile Ox, Oy, Oz, dont l'axe Oz est normal à la surface; mais il n'introduit aucune restriction à l'égard des deux autres axes, qui conservent dans le plan tangent une orientation déterminée, mais arbitraire, par rapport aux tangentes principales, par exemple.

Le Chapitre Ier contient l'exposé des principales formules générales; l'équation différentielle des lignes remarquables, etc.

Le Chapitre II a trait aux formules de Codazzi; l'emploi des rotations du trièdre de référence mobile donne à ces formules une forme nouvelle plus élégante et plus symétrique. Ce Chapitre se termine par des Tableaux récapitulatifs des formules, qui épargneront aux chercheurs l'ennui de longs calculs préliminaires.

Dans le Chapitre III, M. Darboux donne la théorie de la courbure, le théorème d'Euler sur les sections normales, les théorèmes de M. Bertrand sur la distribution des normales; il donne l'expression du *moment* de deux normales voisines et fait connaître la formule de M. Bonnet, qui conduit naturellement à la *torsion géodésique;* ces questions donnent lieu à chaque instant à un grand nombre de remarques, destinées à prendre par la suite une plus grande importance.

L'équation des géodésiques occupe le Chapitre IV; l'auteur se propose de revenir plus longuement sur ces courbes dans son troisième Volume. Dans le Chapitre actuel, il présente d'abord diverses transformations de cette équation, et notamment celle qui n'y laisse subsister que les éléments du ds^2 de la surface.

L'auteur traite de divers problèmes concernant ces lignes, comme celui de la géodésique issue d'un point avec une tangente donnée; celui des géodésiques menées par deux points; dans cette étude, M. Darboux introduit les variables appelées *normales* par M. Lipschitz et dont l'emploi est si profitable dans quantité de questions concernant les géodésiques.

M. Darboux donne également le curieux théorème de Weingarten sur les ellipses et les hyperboles géodésiques.

8. La détermination des géodésiques d'une surface tombe sous l'application de la méthode générale de Jacobi; M. Darboux est donc naturellement amené à considérer sous un point de vue géométrique la méthode de ce grand géomètre, et les géomètres apprécieront à quel degré d'élégance et de clarté il l'a ainsi portée.

Quatre Chapitres sont consacrés à ces développements géométrico-mécaniques, car M. Darboux a étendu ses considérations du cas des géodésiques au cas d'un mouvement quelconque sur un plan, puis au cas d'un point dans l'espace, puis enfin au cas d'un système matériel quelconque.

Le ds^2 d'une surface étant de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

on sait que Jacobi fait dépendre la recherche des géodésiques de l'intégration de l'équation

$$\Delta(\theta) = \frac{\mathrm{G}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \mathrm{E}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} = 1.$$

M. Darboux remarque d'abord que les courbes

$$\theta = \text{const.}$$

constituent une famille de courbes parallèles, c'est-à-dire dont la famille orthogonale est formée de géodésiques, en sorte que la méthode de Jacobi revient à chercher des familles de courbes dont les trajectoires orthogonales soient des géodésiques.

Il remarque en outre que, si l'on prend la valeur de θ correspondant à deux courbes $\theta = \text{const.}$ différentes, par exemple α et β, la différence $(\alpha - \beta)$ représente la longueur commune de l'arc que ces deux courbes interceptent sur toutes les géodésiques de la famille orthogonale aux courbes θ.

Des considérations du même genre s'appliquent au cas d'un mouvement quelconque, pourvu que l'on convienne de réunir tous les mouvements qui correspondent à une même valeur de la constante de l'intégrale des forces vives, supposée existante. La fonction θ représente dans ce cas l'intégrale

$$\int \sqrt{2(U+h)}\, ds,$$

où U est la fonction des forces, ou, s'il s'agit d'un système matériel quelconque, l'intégrale

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma\Sigma a_{ik}\, dq_i\, dq_k},$$

$\frac{\Sigma\Sigma a_{ik}\, dq_i\, dq_k}{dt^2}$ représentant la force vive du système.

M. Darboux donne à cette intégrale θ le nom d'*action*. Si l'on pose, pour abréger,

$$ds^2 = \Sigma\Sigma a_{ik}\, dq_i\, dq_k,$$

il existe un système de variables dont θ fait partie, θ, θ_1, ..., θ_{n-1}, pour lequel la forme ds^2 prend la forme

$$ds^2 = \frac{1}{2(U+h)} [d\theta^2 + f(d\theta_1, d\theta_2, \ldots, d\theta_{n-1})],$$

où f désigne une forme quadratique définie positive des $(n-1)$ différentielles $d\theta_1$, ..., $d\theta_{n-1}$. On reconnaît là une généralisation de la forme à laquelle Gauss ramena pour la première fois le ds^2 d'une surface rapportée à une famille de géodésiques et à une famille orthogonale. M. Darboux tire le plus grand parti de cette formule, due à M. Beltrami, et y puise une démonstration singulièrement claire et élégante du principe général de la moindre action, et du principe d'Hamilton.

Dans cette analyse rapide, longue quoique incomplète, nous n'avons pu tracer que les grandes lignes de l'Ouvrage; sur elles viennent se ramifier quantités de remarques et d'applications ingénieuses, qui montrent que les soins de l'auteur ont pénétré jus-

qu'aux moindres détails : beaucoup de ces remarques, jetées comme en passant, seront certainement recueillies par les géomètres, et deviendront l'origine de nouvelles découvertes.

G. K.

P. DUHEM. — Théorie nouvelle de l'aimantation par influence fondée sur la Thermodynamique. xl-140 p., in-4°. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888.

Cet important travail a été présenté comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris. Il a été publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. L'auteur débute par une intéressante étude historique des travaux faits sur la théorie de l'aimantation par influence. Cette étude est accompagnée d'une liste de plus de soixante Mémoires publiés entre 1824 et 1886. Elle amène M. Duhem aux conclusions suivantes.

Poisson avait cherché à déduire les équations de l'équilibre magnétique d'hypothèses simples sur la nature des corps aimantés. Mais cette déduction a rencontré trois sortes d'objections :

1° Les hypothèses sur lesquelles elle reposait, acceptées volontiers par les contemporains de Poisson, semblent peu compatibles avec les idées actuellement en faveur auprès des physiciens.

2° La rigueur des démonstrations mathématiques données par Poisson laisse beaucoup à désirer.

3° Certaines conséquences de la théorie, telles que la constance du coefficient d'aimantation, ne sont pas conformes à l'expérience.

Ces objections, les théoriciens qui, après Poisson, se sont occupés de l'aimantation par influence ont cherché à les éliminer; mais ils n'y sont parvenus qu'en admettant d'emblée les équations de l'équilibre magnétique sans chercher à les relier à des hypothèses plus simples ou à une théorie plus générale.

M. Duhem a cherché à réaliser un progrès dans cette théorie, progrès consistant à déduire la théorie de l'aimantation par influence d'un petit nombre de faits d'expérience simples au moyen des principes de la Thermodynamique.

Son point de départ est le suivant.

Les actions mécaniques internes d'un système d'aimants admet-

tent pour potentiel la quantité

$$\Upsilon = \frac{h}{2}\int\left(A\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + C\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv.$$

A, B, C étant les composantes de l'aimantation, V la fonction potentielle magnétique et h une constante.

Ce point de départ lui permet de calculer le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté; ce potentiel a la forme suivante

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \Upsilon + \int F(M)\,dv,$$

$\mathfrak{F}_0$ étant le potentiel thermodynamique interne du système non aimanté, et F(M) une certaine fonction de l'intensité d'aimantation M.

On déduit aisément de là les équations de l'équilibre magnétique sur une masse de fer doux. Ces équations sont

$$A = f(M)\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad B = f(M)\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad C = f(M)\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Elles ont déjà été données par G. Kirchhoff.

M. Duhem montre, en développant les idées de G. Kirchhoff, comment on peut en déduire l'équation aux dérivées partielles et la condition aux limites qui déterminent le problème.

L'étude de la variation seconde du potentiel thermodynamique permet à M. Duhem de démontrer que, pour les corps magnétiques, il existe une et une seule solution au problème de l'aimantation par influence et que cette solution correspond à un état d'équilibre stable. La démonstration ne s'applique pas aux corps diamagnétiques. L'étude directe de ceux-ci conduit M. Duhem à cette conclusion : s'il existe sur un corps diamagnétique un état d'équilibre magnétique, c'est-à-dire un minimum du potentiel thermodynamique, ou bien le potentiel thermodynamique présentera une infinité d'autres minima, ou bien il existera un nombre fini ou infini de séries illimitées et continues de distributions magnétiques, telles que le long de chacune d'elles le potentiel thermodynamique décroisse sans cesse. Ce résultat paradoxal semble conforme aux récentes expériences de M. P. Joubin.

L'équilibre d'une masse magnétique ou diamagnétique, soumise à l'action d'aimants permanents et d'une force constante en gran-

deur et en direction telle que la pesanteur, est toujours un état d'équilibre instable. Cette proposition, démontrée par M. Duhem, contredit en partie une proposition énoncée par Sir W. Thomson. La proposition de Sir W. Thomson découle de cette loi de Faraday : un corps magnétique infiniment petit, placé sans vitesse initiale dans un champ magnétique, se déplace dans un sens tel que la valeur absolue de la force du champ soit plus grande au point où il se rend qu'au point où il se trouvait; l'inverse a lieu pour un corps diamagnétique. M. Duhem montre que cette loi doit être rejetée. Les calculs effectués dans ce but prouvent aussi que l'on doit rejeter la méthode proposée par Jamin sous le nom de *Méthode de l'arrachement* pour étudier la distribution du magnétisme.

La loi de Faraday étant repoussée, on doit chercher ailleurs une caractéristique qui sépare les corps magnétiques des corps diamagnétiques. M. Duhem montre qu'on peut adopter la suivante :

Deux corps, l'un très peu magnétique, l'autre très peu diamagnétique, ayant même forme et des fonctions magnétisantes égales en valeur absolue, soumis aux mêmes liaisons, dans le même champ magnétique, ont les mêmes positions d'équilibre; mais les positions d'équilibre stable de l'un sont les positions d'équilibre instable de l'autre.

Après avoir exposé deux méthodes, dues à Kirchhoff, pour déterminer la fonction magnétisante, M. Duhem aborde l'étude des phénomènes thermiques produits dans un système magnétique. Il montre que les équations données auparavant par d'autres auteurs sont fort incomplètes. L'étude de l'influence exercée par l'aimantation sur la chaleur de dissolution du fer dans un acide lui montre qu'il y a lieu de distinguer entièrement le cas d'un aimant permanent du cas d'un morceau de fer doux, ce qui permet de débrouiller les idées contradictoires émises par plusieurs auteurs sur cette question.

Il traite ensuite de l'influence de l'aimantation sur la possibilité d'une réaction chimique. Complétant certaines idées émises par M. P. Janet, il donne la théorie des expériences de M. Ira Remsen et prouve que, dans ces expériences, les lignes suivant lesquelles le dépôt de cuivre a une épaisseur constante sont les lignes d'égale intensité d'aimantation et non les lignes équipotentielles.

L'étude des phénomènes électriques au sein d'un système aimanté lui permet de déterminer l'influence de l'aimantation sur la force électromotrice d'une pile.

Enfin, en terminant, il montre comment sa théorie s'étend aux corps cristallisés. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE DE CONIQUES;

Par M. Blutel.

L'étude des trajectoires orthogonales des génératrices coniques d'une surface, qui est en même temps touchée suivant ces coniques par des cônes du second degré, conduit à l'examen du cas simple où le sommet du cône se projette orthogonalement en un foyer de la conique.

On démontre alors que le plan de la conique doit rester normal à la courbe C décrite par le foyer en question; mais cette condition n'est pas suffisante pour qu'il existe un cône circonscrit à la surface le long de chaque conique.

Si l'on appelle ε l'angle que fait l'axe focal de la conique avec la normale principale à C, p le paramètre de cette conique et e son excentricité, ω et ϖ la courbure et la torsion de C, s son arc, on doit avoir de plus

$$(1) \qquad \frac{dp}{ds} = \frac{e\left(\varpi - \frac{d\varepsilon}{ds}\right)}{\omega \sin \varepsilon} = \frac{\frac{de}{ds}}{\omega \cos \varepsilon} = -\frac{p}{\delta},$$

δ désignant la distance du sommet du cône au plan de la conique. Ces conditions déterminent p et e, la courbe C étant choisie arbitrairement, ainsi que l'angle ε.

En particulier, si la surface réglée S, décrite par l'axe focal de la conique, est une développable, la conique est de grandeur constante, et le cône circonscrit devient un cylindre admettant cette courbe comme section droite.

Laissant de côté les conditions nécessaires à l'existence d'un

cône circonscrit, *étudions les trajectoires orthogonales d'une famille de coniques dépendant d'un paramètre, leur plan restant normal à la trajectoire C d'un foyer.*

Conservons les notations précédentes : appelons de plus λ et r les coordonnées polaires d'un point de la conique dans son plan, l'axe polaire étant l'axe focal même de la conique.

Ces deux quantités sont liées par la relation

$$r(1 + e\cos\lambda) = p. \tag{2}$$

On démontre alors que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces coniques est

$$[(e^2-1)r + 2p]\,dr + p\left(\frac{p-r}{e}\,de - dp\right) + rpe\sin\lambda(d\varepsilon - \varpi\,ds) = 0. \tag{3}$$

Cette équation présente différentes particularités remarquables : d'abord elle ne dépend pas de la courbure ω de C. De plus, si l'on appelle Σ les surfaces réglées engendrées par des normales à C et découpant sur la surface proposée les trajectoires orthogonales de ses coniques, on voit que l'angle λ des génératrices de ces surfaces avec les génératrices de S ne change pas, si l'on augmente ε d'une quantité constante, attendu que l'équation (3) ne change pas. Par conséquent, si l'on fait tourner les génératrices de S d'un angle constant, il suffira de faire tourner les génératrices des surfaces Σ du même angle pour obtenir les trajectoires orthogonales dans la nouvelle surface.

L'équation (3) prend une forme simple si l'on suppose la surface S développable, et devient

$$e[(e^2-1)r + 2p]\,dr + p[(p-r)\,de - e\,dp] = 0. \tag{4}$$

Elle s'intègre immédiatement si e est constant, c'est-à-dire si la surface est engendrée par une conique qui reste semblable à elle-même.

Son intégrale est

$$[p + r(e-1)]^{e-1}[p - r(e+1)]^{e+1} = \text{const.}$$

En particulier, si l'on y fait $e = 1$, c'est-à-dire si la conique génératrice est une parabole, l'intégrale se réduit à

$$r = \frac{p}{2} + \text{const.}$$

Il en est encore de même si les deux polynômes du premier degré en r qui figurent dans l'équation (4) sont divisibles l'un par l'autre, c'est-à-dire si p et e sont liés par une relation de la forme

$$pe = l(e^2 - 1),$$

où l est une constante quelconque. Elle se réduit alors à

$$dr = \frac{l\,de}{e^2},$$

dont l'intégrale est

$$r = -\frac{l}{e} + \text{const.}$$

Pour ces coniques, la distance focale est constante.

Enfin, si l'on suppose que la conique génératrice soit un cercle, l'équation (3), où l'on a préalablement remplacé r par sa valeur et où l'on fait $e = 0$, se réduit à

$$d(\lambda + \varepsilon) - \varpi\,ds = 0,$$

ce qui montre que les surfaces Σ sont les développables engendrées par les normales à la courbe C.

SUR LES COURBES SYNCHRONES;

Par M. A. de Saint-Germain.

Les propriétés de la lemniscate qui ont été découvertes par Saladini et par M. Bonnet amènent naturellement à se poser la question suivante :

Étant données dans un plan deux familles de lignes (A) *et* (C) *qui toutes passent par un point* O, *peut-on trouver une force* F, *dérivant d'un potentiel* U *et telle que, sous son action, un mobile partant du point* O *avec une vitesse déterminée et suivant l'une quelconque des lignes* (C) *arrive en un point quelconque* M *de cette ligne dans le même temps que s'il avait suivi celle des lignes* (A) *qui passe en* M?

Je désignerai les lignes (A) sous le nom de *trajectoires* et les

lignes (C) sous celui de *lignes synodales;* il est d'ailleurs évident que leurs rôles peuvent être intervertis.

Le problème peut toujours être résolu d'une infinité de manières. M. Fouret a indiqué la solution dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, décembre 1886, et il l'a développée dans un élégant Mémoire qui fait partie du LVIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour le cas où les trajectoires sont rectilignes et les lignes synodales homothétiques par rapport au point O. L'habile géomètre cherche quelles doivent être les lignes synchrones conjuguées aux trajectoires données et, de la forme qu'il a trouvée pour leur équation, il déduit, à l'aide du théorème des forces vives, l'expression de U, puis les composantes X et Y de F suivant deux axes rectangulaires. Je voudrais montrer qu'on peut, d'une manière directe et presque intuitive, trouver le potentiel U dont doit dépendre le mouvement sur des trajectoires passant par un même point pour que les courbes synchrones soient d'espèce donnée; il n'est d'ailleurs pas avantageux, en général, de chercher X et Y pour déterminer F. Je ferai tous les calculs dans deux cas très simples qui ne rentrent pas dans le cadre du Mémoire précité, puis j'examinerai le cas où les lignes synchrones sont orthogonales aux trajectoires : celles-ci se confondent alors avec les lignes synodales et deviennent des brachistochrones pour la force considérée. Pour plus de généralité, j'admettrai que la vitesse v_0 des mobiles au point O puisse dépendre, suivant une loi connue, de sa direction.

La relation qui existe entre les trajectoires, les lignes synchrones et les synodales est fort simple : soient MA, MB, MC les tangentes respectives, menées dans le sens du mouvement, à celles de ces lignes qui se coupent en M. On a

$$(1) \qquad 2\,\mathrm{AMB} = \pi + \mathrm{AMC},$$

le sens des angles positifs étant arbitraire. AMB étant égal à AMC + CMB, on a aussi

$$2\,\mathrm{CMB} = \pi + \mathrm{CMA};$$

les deux égalités montrent la réciprocité qui existe entre les trajectoires et les synodales : la première permet de déterminer l'une des trois familles de courbes considérées quand on connaît les deux

autres. Mais je veux surtout chercher les forces qui répondent à un ensemble donné de trajectoires et de synchrones.

Chacune des trajectoires peut être définie au moyen d'un paramètre μ : si l'on considère en même temps un faisceau quelconque de lignes déterminées par un paramètre λ, λ et μ pourront former un système de coordonnées curvilignes; un élément ds de trajectoire est égal à $H\,d\lambda$, H étant une fonction connue de λ et de μ. D'autre part, si un mobile, soumis à la force F qui dépend du potentiel U, part du point O avec une vitesse donnée, sa vitesse v en un point M sera une fonction déterminée des coordonnées λ et μ de ce point, et le temps nécessaire pour parcourir l'arc de trajectoire OM sera

$$t = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{H}{v}\,d\lambda, \tag{2}$$

l'intégration étant faite en regardant μ comme constant. Pour une valeur déterminée de t, l'équation (2) constitue l'équation en λ et μ d'une quelconque des synchrones, et il s'agit de voir comment doit varier v pour que ces courbes soient d'espèce donnée. Déplaçons-nous sur une de ces courbes : le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$ pourra s'exprimer par une fonction connue ω de λ et de μ; différentions donc l'équation (2) en regardant t comme constant et divisons par $d\mu$: nous aurons

$$\omega \frac{H}{v} + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial\mu} \frac{H}{v}\,d\lambda = 0;$$

une nouvelle différentiation relative à λ donne l'équation

$$\omega \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{H}{v} + \frac{\partial}{\partial\mu} \frac{H}{v} + \frac{H}{v} \frac{\partial\omega}{\partial\lambda} = 0,$$

d'où l'on déduit pour $\frac{H}{v}$ et, par suite, pour v une valeur qui contient une fonction arbitraire assujettie à l'unique condition de donner pour l'intégrale (2) une valeur finie. Dans le cas assez étendu où l'équation des synchrones serait de la forme

$$f(\lambda) f_1(\mu) = \rho,$$

ρ étant un paramètre arbitraire, on trouve

$$v = H \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)} \varphi[f(\lambda) f_1(\mu)],$$

φ désignant une fonction arbitraire.

Le plus souvent, on pourra prendre les synchrones elles-mêmes pour les lignes coordonnées de paramètre λ; l'intégrale (2) devra être indépendante de μ quand on donne à sa limite supérieure une valeur fixe quelconque et, pour cela, il faut et il suffit que $\frac{H}{v}$ soit une simple fonction de λ; on en déduit pour v une valeur de la forme

$$v = H\varphi(\lambda).$$

Dans tous les cas, la valeur de v fait connaître immédiatement celle de U qui est égale à $\frac{1}{2}v^2$ en faisant la masse des mobiles considérés égale à l'unité; lorsque v sera représenté par la dernière formule, nous poserons

$$(3) \qquad U = \frac{1}{2}H^2\varphi^2(\lambda) = H^2\psi(\lambda).$$

Pour déterminer F, on pourra d'abord, dans l'expression de U, substituer aux variables λ et μ d'autres variables α, β qui semblent plus avantageuses; U devient une fonction de α et de β. Si l'on donne à ces variables des accroissements infiniment petits $d\alpha$, $d\beta$, on a pour le point M un déplacement qu'on peut regarder comme résultant de deux déplacements $a\,d\alpha$, $b\,d\beta$ suivant les tangentes aux courbes $\beta = \text{const.}$, $\alpha = \text{const.}$; le travail correspondant de F est $Aa\,d\alpha + Bb\,d\beta$, A et B étant les projections de la force sur les tangentes considérées; ce travail étant égal à dU, on aura

$$(4) \qquad A = \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \qquad B = \frac{1}{b}\frac{\partial U}{\partial \beta};$$

F est déterminée par ses deux projections. Si α et β sont les coordonnées polaires r et θ, les projections de F, ou, dans ce cas, ses composantes sont

$$(4\ bis) \qquad R = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad \Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Supposons d'abord les trajectoires rectilignes : on peut prendre pour le paramètre μ qui les détermine l'angle θ qu'elles font avec un axe polaire OX; soit, d'autre part,

$$(5) \qquad \lambda = f(r, \theta)$$

l'équation donnée d'une synchrone quelconque : on aura

$$H = \frac{1}{f'_r}, \qquad v = \frac{\varphi(\lambda)}{f'_r}, \qquad U = \frac{\psi(\lambda)}{f'^2_r}.$$

Si $f(r, \theta)$ est de la forme $\frac{r}{\varpi(\theta)}$, les synchrones et, par suite, les lignes synodales sont homothétiques, et l'on retrouve les formules de M. Fouret : U est une fonction homogène du second degré de r et de $\varpi(\theta)$. En faisant

$$\varpi(\theta) = \cos\theta, \qquad U = ar^2 + 2br\cos\theta + c\cos^2\theta,$$

v_0, égale à $\sqrt{2c\cos\theta}$, dépend de la direction suivant laquelle part le mobile, mais on peut dire qu'elle est bien déterminée : les lignes synodales sont des lemniscates, et l'on pourra vérifier, au moyen d'intégrations assez intéressantes, qu'un arc OM de l'une de ces courbes est décrit dans le même temps que la corde OM.

Les trajectoires étant toujours rectilignes, soit

$$(6) \qquad \lambda = r - a\theta$$

l'équation des synchrones : ces courbes sont alors des spirales d'Archimède superposables;

U est de la forme $\psi(r - a\theta)$ et l'on a, pour les composantes de F suivant le rayon vecteur et sa perpendiculaire,

$$R = \psi'(r - a\theta) \qquad \Theta = -\frac{a}{r} R.$$

Si l'on veut connaître les lignes synodales, quand l'équation (5) représente les synchrones, on recourra à l'équation (1), qui nous donne

$$\cot AMC = \frac{1}{2}(\cot AMB - \tang AMB).$$

ou, comme MA est ici le prolongement du rayon vecteur OM,

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{1}{2}\left(r\frac{f'_r}{f'_\theta} - \frac{1}{r}\frac{f'_\theta}{f'_r}\right).$$

Cette équation linéaire, qui détermine les synodales cherchées, n'est pas de celles qu'on sait intégrer quelle que soit la forme de f; mais, quand λ prend la valeur simple (6), les variables se sé-

parent et l'on trouve

$$d\theta = \frac{2a\,dr}{a^2 - r^2}, \qquad r = a\,\frac{e^\theta - c}{e^\theta + c};$$

il en résulte que les lignes synodales sont des espèces de spirales comprises à l'intérieur du cercle $r = a$, auquel elles sont asymptotes; elles passent par son centre.

Considérons un cas où les trajectoires sont des lignes courbes, par exemple des cercles définis par une équation de la forme

$$(7) \qquad r = \mu \sin\theta;$$

cherchons à déterminer U de telle sorte que les synchrones soient des lemniscates

$$(8) \qquad r^2 = \lambda^2 \cos 2\theta.$$

L'élément ds de trajectoire est égal à $\mu \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\,d\lambda$; mais des équations (7) et (8) on tire

$$\cos 2\theta = \frac{\mu^2}{2\lambda^2 + \mu^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \frac{\mu^2}{(2\lambda^2 + \mu^2)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}};$$

on aura donc, en se servant encore de la formule (3)

$$\mathrm{H} = \frac{\mu^3}{(2\lambda^2 + \mu^2)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \qquad \mathrm{U} = \frac{\mu^6\,\psi(\lambda)}{(\lambda^2 + \mu^2)(2\lambda^2 + \mu^2)^2};$$

en remplaçant λ et μ par leurs valeurs tirées des équations (7) et (8), on aura, sous une forme plus commode, U et les composantes de F :

$$\mathrm{U} = \frac{\cos^3 2\theta}{\cos^2\theta}\,\psi\left(\frac{r}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right), \qquad \mathrm{R} = \frac{\cos^{\frac{5}{2}} 2\theta}{\cos^2\theta}\,\psi'\left(\frac{r}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right),$$

$$\Theta = -\frac{2\cos^2 2\theta \sin\theta}{\cos^3\theta}\left[(1 + 4\cos^2\theta)\psi - \frac{r\cos^2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\psi'\right];$$

les lignes synodales sont définies par une équation de la forme

$$r^3 = \alpha^3 \sin 3\theta.$$

Supposons maintenant que les trajectoires soient orthogonales aux courbes synchrones : elles seront alors des brachistochrones et nos formules montreront avec quelles forces elles jouissent de

cette propriété. Soit d'abord

$$r^m = \mu^m \sin m\theta \tag{9}$$

l'équation des trajectoires ; si les synchrones doivent les couper à angle droit, elles auront pour équation

$$r^m = \lambda^m \cos m\theta.$$

Un élément de trajectoire (9) est de la forme

$$ds = \frac{\mu}{\sin^{\frac{m-1}{m}} m\theta} \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} d\lambda = \frac{\mu^{m+1}\,d\lambda}{(\lambda^{2m}+\mu^{2m})^{\frac{m+1}{2m}}};$$

l'équation (3) nous donnera encore la valeur du potentiel

$$U = \frac{\mu^{2m+2}\psi(\lambda)}{(\lambda^{2m}+\mu^{2m})^{\frac{m+1}{m}}} = \cos^{\frac{2m+2}{m}} m\theta\,\psi\left(\frac{r}{\sqrt[m]{\cos m\theta}}\right).$$

Prenons pour $\psi(u)$ la forme simple $2au - u^2$: nous aurons la vitesse initiale égale à zéro, puis

$$U = \cos^2 m\theta\left[2ar\sqrt[m]{\cos m\theta} - r^2\right],$$
$$R = 2\cos^2 m\theta\left[a\sqrt[m]{\cos m\theta} - r\right];$$
$$\Theta = -\sin 2m\theta\left[(2m+1)a\sqrt[m]{\cos m\theta} - mr\right];$$

on peut vérifier que, pour la force dont nous venons de donner les composantes, les courbes (9) satisfont aux conditions qui déterminent les brachistochrones.

Cherchons enfin l'expression générale des forces, dérivant d'un potentiel, pour lesquelles la cycloïde est brachistochrone. Désignons par x et y des coordonnées rectangulaires et posons

$$x = \mu^2\left(\frac{\lambda}{\mu} - \sin\frac{\lambda}{\mu}\right), \qquad y = \mu^2\left(1 - \cos\frac{\lambda}{\mu}\right); \tag{10}$$

quand on attribue à μ une valeur fixe et à λ une valeur variable, les équations (10) déterminent la position d'un point dont le lieu est une cycloïde dépendant de la valeur de μ; si, au contraire, on suppose λ fixe et μ variable, les mêmes équations définissent des courbes orthogonales aux cycloïdes précédentes et qui doivent être des lignes synchrones. On a, pour les éléments d'arc comptés sur

une courbe de l'une ou de l'autre famille,

$$ds = 2\mu \sin\frac{\lambda}{2\mu}\,d\lambda, \qquad ds_1 = 2\left(\lambda\cos\frac{\lambda}{2\mu} - 2\mu\sin\frac{\lambda}{2\mu}\right)d\mu.$$

L'équation (3) va encore nous fournir l'expression générale du potentiel qui doit régler le mouvement sur les cycloïdes pour que le système des synchrones leur soit orthogonal : soit

$$U = \mu^2\left(1 - \cos\frac{\lambda}{\mu}\right)\psi(\lambda) = y\,\psi(\lambda).$$

En prenant pour $\psi(\lambda)$ une constante, la force motrice F aura une grandeur fixe et sera toujours parallèle à l'axe des y : c'est le cas bien connu pour lequel la cycloïde est brachistochrone ; mais elle l'est encore quand on prend pour ψ une fonction quelconque. Comme nous ne pouvons pas tirer des équations (10) une valeur explicite de λ, nous devons déterminer F par ses projections sur la tangente et sur la normale à la cycloïde et, pour cela, nous appliquerons les équations (4) en faisant jouer à λ et μ le rôle de α et de β : les expressions de ds et de ds_1 nous font connaître les quantités représentées par a et b, et nous aurons, pour les composantes de F,

$$A = \cos\frac{\lambda}{2\mu}\,\psi(\lambda) + \mu\sin\frac{\lambda}{2\mu}\,\psi'(\lambda), \qquad B = -\sin\frac{\lambda}{2\mu}\,\psi(\lambda).$$

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. RESAL. — Traité de Physique mathématique. 2e édition, t. I, 1887, t. II; 1888.

M. Resal avait publié, il y a quelques années, sous le titre de *Traité de Physique mathématique,* un Ouvrage qui était plutôt la réunion de Mémoires personnels sur la Physique mathématique qu'un exposé didactique de cette partie de la Science. Dans une seconde édition, le savant professeur de l'École Polytechnique vient de reprendre son œuvre de fond en comble : il a ajouté à son premier Ouvrage l'étude de certaines parties de la Physique, telles que la Thermodynamique et l'Optique, qui n'y étaient point contenues; il a comblé un certain nombre de lacunes, et il nous offre aujourd'hui, en deux Volumes de cette lumineuse impression à laquelle nous habituent MM. Gauthier-Villars, l'exposé théorique de toutes les questions les plus achevées de la Physique. Par sa concision, par ses proportions ni trop restreintes ni trop étendues, ce Traité se recommande aux professeurs ou aux étudiants qui n'ont pas les moyens de se procurer ou le temps de lire les livres spéciaux à chacun des domaines qu'embrasse l'Ouvrage de M. Resal, ou les Traités généraux plus étendus, celui, par exemple, dont M. É. Mathieu poursuit la publication.

Le tome I de l'Ouvrage de M. Resal débute, selon le mot de M. Resal lui-même, par une innovation; disons par une innovation heureuse, surtout pour la catégorie de lecteurs à laquelle nous faisions allusion à l'instant. Dans une *Introduction* d'une soixantaine de pages, l'auteur condense l'exposé d'un certain nombre de questions d'Analyse qui sont, en Physique mathématique, d'un continuel usage.

Cette introduction renferme le calcul d'un certain nombre d'intégrales définies usuelles; l'étude des principales propriétés des équations de Bessel et de Heine, le développement d'une fonction d'une variable par la série de Fourier; la formule de Green; le développement d'une fonction de deux angles en série de fonctions de Laplace. A propos de cette dernière question, M. Resal reproduit l'élégante démonstration par laquelle M. G. Darboux prouve

que le développement obtenu représente bien la fonction donnée. Il n'a pas cru devoir démontrer la proposition analogue relative au développement d'une fonction en série trigonométrique, bien que la démonstration de l'une de ces propositions fût aussi nécessaire que la démonstration de l'autre. La démonstration de cette proposition relative à la série de Fourier eût donné occasion à M. Resal de faire connaître au lecteur, à côté de l'élégante méthode imaginée par M. Darboux, la méthode puissante de Lejeune-Dirichlet.

La méthode de M. Darboux, prise dans les propriétés mêmes de la sphère, et dans laquelle toute opération analytique prend une signification géométrique évidente, doit à ces caractères son extrême élégance; mais elle leur doit aussi de ne pouvoir s'étendre aux autres questions du même genre; au contraire, la méthode de Lejeune-Dirichlet, prise dans ces propriétés élémentaires des intégrales définies qu'expriment les deux théorèmes de la moyenne, s'applique également bien aux développements en séries de fonctions trigonométriques, de fonctions de Laplace, de fonctions de Bessel et de fonctions de Lamé. Nous pensons que le rapprochement des deux méthodes eût heureusement complété l'Introduction du Traité de M. Resal.

Le tome I du Traité de M. Resal renferme l'étude de la *Capillarité,* de l'*Élasticité* et de l'*Optique*.

Dans la première édition de son Traité, M. Resal avait traité la *Capillarité* par une méthode semi-analytique et semi-géométrique dont il a, dit-il, reconnu l'insuffisance. Aussi, dans cette nouvelle édition, adopte-t-il franchement la méthode de Gauss. Sans discuter l'hypothèse de l'attraction moléculaire qu'il adopte d'emblée, M. Resal forme, comme Gauss, l'équation que donne l'application au liquide du principe des vitesses virtuelles; comme Gauss, il réduit les intégrales sextuples qui figurent dans cette équation d'abord en intégrales quadruples, puis, par l'hypothèse de l'attraction moléculaire, en une somme de termes proportionnels aux aires des surfaces qui limitent le fluide; abandonnant alors la marche suivie par Gauss et qui exige l'emploi du calcul des variations, il établit l'équation aux dérivées partielles de la surface du fluide et la condition relative au contour par la voie si élégante que M. J. Bertrand a tracée en 1848.

Ces lois fondamentales sont ensuite appliquées à quelques-uns des plus beaux problèmes de la théorie de la Capillarité.

La forme de la surface d'un liquide au contact d'une lame verticale ou entre deux lames parallèles et verticales est déterminée complètement par la méthode de Poisson. L'expression approchée, donnée par Poisson, pour la hauteur du liquide soulevé dans un tube cylindrique de faible diamètre est ensuite établie. Puis, par la méthode de M. Bertrand, est démontré le beau théorème de Laplace sur le volume du liquide soulevé par un tube cylindrique quelconque.

Étudiant le problème des liquides superposés dans un tube cylindrique, M. Resal démontre ce théorème de Laplace, que le poids total des liquides soulevés ne dépend que de la nature du liquide inférieur. Il examine ensuite la forme d'une goutte de mercure posée sur un plan de verre.

M. Resal traite complètement un problème dont il avait entamé la solution dans la première édition de son Traité; il s'agit du mouvement d'une bulle d'air, presque sphérique dans sa position initiale, qui est abandonnée dans un fluide pesant et s'élève au travers de ce fluide.

La figure prise par une masse liquide au sein d'un autre liquide de même densité avec lequel elle ne se mélange pas est ensuite traitée avec des développements suffisants; puis vient le problème des lames de liquide glycérique. Ce problème, un des plus beaux de toute la théorie des phénomènes capillaires, nous paraît un peu sommairement traité. M. Resal indique que la lame liquide doit prendre la forme d'une surface à courbure moyenne nulle; puis il indique, sans les démontrer, les formules qui fournissent l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces; il présente cette intégrale sous la forme que lui a donnée M. Ossian Bonnet, sans indiquer qu'elle est due à Monge, et sans présenter les formes plus commodes sous lesquelles elle a été mise par M. Weierstrass; il montre enfin que, parmi ces surfaces, se trouvent l'alysséide et l'hélicoïde gauche à plan directeur. Mais il ne dit rien des efforts puissants par lesquels Riemann, M. Weierstrass et M. Schwarz ont cherché les surfaces à courbure moyenne nulle passant par un contour donné, ni de la méthode par laquelle M. Schwarz distingue entre ces surfaces les véritables surfaces

minima et marque les limites de stabilité des lames liquides, ni des propositions générales de Plateau et de M. Lamarle sur les intersections de lames liquides.

Il est une autre lacune que nous nous permettrons de signaler dans l'étude consacrée par M. Resal à la théorie des phénomènes capillaires. Il n'a rien dit de l'influence des forces capillaires sur les solides immergés : le beau problème des actions apparentes entre lames parallèles et surtout la loi relative à la poussée verticale, que Laplace a énoncée, que Poisson a démontrée pour les solides de révolution et dont M. É. Mathieu a fourni la preuve complète, ont une importance assez grande pour que nous regrettions de les voir passer sous silence.

L'*Élasticité* est un des Chapitres que M. Resal a composés avec le plus de soin. Dans la première édition de son Traité, et dans son *Traité de Mécanique,* M. Resal avait adopté en partie la théorie de Poisson. Cette théorie, reposant sur une définition erronée de la pression, ne se retrouve plus dans l'édition actuelle de la *Physique mathématique* de M. Resal. L'auteur adopte complètement les idées de Lamé. Après avoir exposé la théorie générale de l'équilibre intérieur des corps, l'auteur étudie, au point de vue géométrique, les très petites déformations d'un corps; il en déduit l'expression des N_i, T_i, par la méthode de Lamé. Les trente-six coefficients des formules donnant les N_i, T_i, sont, dans le cas des corps isotropes, réduits aux deux coefficients λ et μ de Lamé par la méthode de de Saint-Venant. L'auteur donne ensuite les équations des petits mouvements dans les solides isotropes, et la relation des coefficients λ et μ avec les vitesses de propagation des vibrations longitudinales et des vibrations transversales.

M. Resal étudie sommairement ensuite : la traction, la compression, la flexion et la torsion des prismes et des cylindres, les vibrations des prismes et des cylindres, les propriétés des membranes élastiques, les tubes cylindriques et les enveloppes sphériques.

La *lumière,* dont l'étude occupe le Chapitre III du tome I, forme l'une des parties introduites, pour la première fois, dans la deuxième édition. L'auteur y débute par la théorie de la double réfraction, qu'il expose suivant la belle méthode de Lamé. On doit le féliciter de ce choix, trop rarement fait par les auteurs qui s'occupent de l'Optique. Les théories de la double réfraction sont

innombrables, et l'on a une grande tendance aujourd'hui à les regarder toutes comme équivalentes, parce que les équations auxquelles elles conduisent cadrent toutes également bien avec l'expérience. Mais la valeur d'une théorie ne dépend pas seulement de l'exactitude de ses conclusions; elle dépend aussi, dans une large mesure, de la méthode qui conduit à ces conclusions. Or, parmi toutes les théories de la double réfraction, celle de Lamé est celle qui emploie le moins grand nombre d'hypothèses; celle dont les hypothèses sont susceptibles d'être énoncées avec la plus grande netteté et d'être comparées le plus immédiatement à l'expérience; enfin, elle est la seule qui soit absolument compatible avec les saines idées introduites par son auteur dans la théorie de l'élasticité, idées trop peu comprises encore aujourd'hui. Le Livre de M. Resal contribuera certainement à répandre davantage ces idées, et ce ne sera pas le moindre des services qu'il rendra.

Rien de particulier à signaler dans l'exposé, donné par M. Resal, de la théorie des interférences et des principes généraux de la théorie de la diffraction. Cet exposé s'éloigne peu de celui qui est adopté dans la plupart des Traités de Physique. Nous eussions préféré voir M. Resal exposer, avec les élégantes simplifications géométriques qui lui sont familières, les puissantes idées introduites en 1882 par Kirchhoff dans cette partie de la Science.

Les intégrales de Fresnel, qui servent à la résolution numérique du problème de la diffraction, sont étudiées avec de grands détails. Les méthodes de Knochenhauer, de Cauchy, et surtout la méthode générale de M. Ph. Gilbert, font l'objet d'une étude approfondie.

La théorie mécanique de la réflexion et la théorie des anneaux colorés sont exposées par la méthode ordinaire. Enfin, le tome I de l'Ouvrage se termine par une Note où M. Resal fait connaître la méthode de M. Senf pour l'établissement de l'équation de la surface de l'onde.

Le tome II renferme les Chapitres suivants :

Chaleur. Thermodynamique. Électrostatique. Courants électriques. Électrodynamique. Magnétisme statique. Mouvement des aimants et des courants.

Dans l'étude de la *Théorie de la chaleur*, M. Resal se borne à l'examen des corps isotropes; il ne dit rien de la conductibilité

dans les cristaux. L'équation aux dérivées partielles du mouvement calorifique étant établie, l'auteur étudie le mouvement de la chaleur dans un solide limité par une surface canal à section très petite, dans une sphère, dans un cylindre circulaire indéfini, dans un cube, dans un milieu indéfini en tout sens. La théorie du refroidissement d'une sphère dans le cas le plus général est appliquée à l'étude du refroidissement de la Terre.

« J'espère, dit M. Resal, avoir mis la *Thermodynamique* au niveau des connaissances actuelles. »

Sans doute, M. Resal n'a pas fait attention que cette phrase, prise à la lettre, constituerait une appréciation bien sévère des travaux dont il n'a pas cru devoir parler. A coup sûr, il n'a pas pu entrer dans l'esprit de l'éminent géomètre de condamner ainsi les travaux de MM. Moutier, Hortsmann et Gibbs sur la Mécanique chimique, ni le beau Mémoire où Kirchhoff, en 1858, a abordé cette étude des dissolutions qui donne lieu aujourd'hui à d'innombrables recherches, ni l'introduction de la fonction caractéristique pour laquelle il se borne à de brèves indications.

Dans l'étude de l'*Électrostatique,* l'auteur suppose connue la théorie du potentiel, dont il se borne à énoncer les propositions fondamentales. Un exposé succinct de cette théorie eût sans doute été utile à beaucoup de ceux auxquels s'adresse l'Ouvrage de M. Resal et les eût dispensés de chercher cette théorie dans un autre livre. Dans le domaine même de l'Électrostatique, nous regrettons que la distribution sur une surface conductrice qui enveloppe les corps électrisés n'ait pas été plus complètement étudiée; c'est en effet l'objet d'un problème des plus intéressants à la fois pour le mathématicien et pour le physicien, et qui est trop souvent omis dans les Traités de Physique; les *Leçons* de Lejeune-Dirichlet sont, à notre connaissance, le seul Ouvrage où il soit exposé d'une manière suffisante.

Le Chapitre relatif aux *courants électriques* se compose seulement de quelques pages; il traite de la loi d'Ohm, des courants thermo-électriques, de la théorie de la pile; la proportionnalité entre l'effet Peltier et la différence de niveau potentiel au contact de deux métaux, la non-existence de l'effet Thomson, la proportionnalité de la force électromotrice d'un couple thermo-électrique à la différence de température des deux soudures, l'égalité entre

la chaleur chimique et la chaleur voltaïque sont exposées dans ce Chapitre. L'intérêt historique de cette exposition est incontestable; mais on voudrait quelques indications relatives aux travaux qui ont conduit à rejeter de ces lois, tant au point de vue expérimental qu'au point de vue théorique, et à leur substituer des propositions plus exactes.

Le Chapitre consacré à l'*Électrodynamique* débute par un exposé très simple et très soigné de la formule d'Ampère et de ses conséquences; puis l'auteur aborde la théorie de l'induction électrique : il fait découler cette théorie de la formule de Weber qu'il adopte sans discussion.

Nous regrettons que l'auteur ne nous ait pas laissé entrevoir les critiques qui ont été adressées à cette formule, et ne nous ait rien dit de ce débat qui a provoqué des centaines de Mémoires et auquel ont pris part tous les grands électriciens de notre époque.

Dans la théorie du *Magnétisme statique,* M. Resal signale le défaut de rigueur de l'analyse de Poisson. Il traite ensuite de l'aimantation d'une enveloppe sphérique, de l'aimantation d'un ellipsoïde plein et de l'action de plusieurs sphères aimantées par la terre sur un point extérieur.

Le dernier Chapitre de l'Ouvrage est consacré au *Mouvement des aimants et des courants*. M. Resal y développe, en partant de la loi de Biot et Savart, la loi de Laplace sur l'action d'un pôle d'aimant sur un élément de courant.

Signalons enfin deux Notes. L'une, rédigée d'après les idées de M. Maurice Lévy, sur le transport du travail par l'électricité; l'autre, due à M. Ph. Gilbert, ayant pour but de démontrer l'existence d'un et d'un seul état d'équilibre sur les conducteurs électrisés. Celle-ci emploie les mêmes principes que la méthode par laquelle Riemann démontre le principe de Dirichlet. Elle est, comme elle, soumise aux objections de M. Weierstrass.

En résumé, l'Ouvrage de M. Resal embrasse, dans un cadre relativement restreint, la plupart des grandes questions de Physique mathématique; elles y sont traitées avec une élégante concision qui fait regretter plus vivement les sujets qui ne sont pas abordés.

Nous ne pouvons nous empêcher de regretter aussi que M. Resal n'ait pas réagi, avec l'autorité qui lui appartient, contre une ten

dance fâcheuse qui va en s'accentuant dans les Traités de Physique mathématique. Elle consiste à s'occuper surtout des cas particuliers où peuvent s'intégrer les équations aux dérivées partielles de la Physique sans s'occuper de l'établissement de ces équations, de leurs propriétés générales, de leurs conséquences vérifiables par l'expérience. Il arrive parfois que ces intégrations, prises ainsi en elles-mêmes, présentent un intérêt analytique qui justifie la peine que l'on a prise pour y parvenir; c'est ce qui arrive, par exemple, dans le problème, résolu par Lamé, de l'équilibre des températures sur un ellipsoïde; mais, outre que cette circonstance est assez rare, elle ne saurait en tous cas faire admettre cette conception de la Physique mathématique; pour que cette science mérite son nom, elle doit avant tout servir au physicien. Or le physicien a besoin de se rendre un compte exact des hypothèses sur lesquelles repose la mise en équation des problèmes qui l'occupent, et des lois générales qui découlent de ces hypothèses. Rarement il a besoin d'intégrations toujours trop particulières pour s'appliquer aux corps de forme compliquée qu'il a à manipuler. Ces intégrations n'ont d'intérêt pour lui que lorsqu'elles permettent une vérification expérimentale des hypothèses faites, ou lorsqu'elles fournissent des méthodes de mesure des coefficients introduits par la théorie. Les grands physiciens qui, comme Laplace et Poisson, ont fondé la Physique mathématique, avaient bien compris ce caractère de la Science; mais depuis il a été méconnu, et les Traités de Physique mathématique, devenus des collections de problèmes sur les équations aux dérivées partielles, ont cessé d'être lus par les physiciens, au grand détriment de la Science.

P. Duhem.

George Johnston ALLMAN. — Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin, Hodges, Figgis and C°, Grafton Street. London, Longmans, Green and C°, Paternoster Row, 1889, xii-237 p. in-8°.

Cet Ouvrage, formé par la réunion d'articles publiés dans l'*Hermathena* de Dublin de 1878 à 1887 et complétés maintenant par diverses Notes et par l'addition d'un index, constitue

une histoire complète de la Géométrie grecque avant Euclide. L'auteur, professeur de Mathématiques au Queen's College, à Galway, a suivi la méthode inaugurée par Bretschneider dans son Ouvrage similaire; c'est-à-dire qu'il commence par réunir, sur chaque mathématicien, les témoignages de l'antiquité, puis qu'il commente ces témoignages et en conclut les connaissances qu'ils supposent.

Les lecteurs du *Bulletin* savent que j'ai moi-même étudié la même époque dans une série d'articles publiés ici de 1885 à 1887 et également réunis en volume (¹). Ils savent aussi que j'ai adopté un plan essentiellement différent et que je me suis proposé moins d'exposer l'histoire des débuts de la Géométrie que d'examiner le degré de confiance que méritent les documents sur lesquels repose cette histoire. Je me plais à remarquer que, quand même je n'aurais pas été devancé par M. Allman pour l'histoire proprement dite, je n'aurais pas essayé de refaire, ainsi qu'il y a réussi, l'œuvre de Bretschneider; car je n'aurais vraiment pas cru qu'il fût possible de réaliser, comparativement à cette dernière, un progrès aussi sérieux que celui que l'on peut constater dans le volume du professeur anglais. Je ne crois pas pouvoir en faire un meilleur éloge.

De même que j'ai souvent eu l'occasion de citer M. Allman, il m'a, à son tour, fréquemment mentionné, soit pour s'appuyer sur mon opinion, soit pour la contredire sur quelque point de détail. Mais j'ai d'autant moins l'intention d'ouvrir une discussion sur les questions où nous pouvons ne pas être d'accord que je lui dois rendre cette justice, qu'en tous cas il expose très clairement et très loyalement les arguments opposés aux siens et qu'il met toujours le lecteur à même de se prononcer en pleine connaissance de cause.

Je préfère donc, après avoir donné un rapide aperçu de l'Ouvrage, relever seulement quelques points que je n'ai pas encore eu l'occasion de traiter.

Après une courte introduction, M. Allman traite en neuf Chapitres séparés : Thalès, Pythagore et son école, Hippocrate de

(¹) *La Géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Chios et Démocrite, Archytas, Eudoxe, Ménechme, Dinostrate, Aristée, Théétète. Il rompt ainsi, et à bon droit, avec la tradition qui ne montre, dans les géomètres du IVe siècle avant notre ère, que Platon et l'Académie ; il fait ressortir qu'au contraire les travaux importants de cette période sont dus soit à Eudoxe, soit à des mathématiciens qui se rattachent directement à l'école particulière qu'il avait fondée.

C'est en tout cas à cette école qu'appartient la découverte des sections coniques, attribuée à Ménechme sur le témoignage, peut-être insuffisant, d'un vers d'Eratosthène, car il est bien établi que, avant Ménechme, Eudoxe et même son maître Archytas avaient considéré des intersections de surfaces, et si l'on ne peut certainement prouver qu'Eudoxe ait étudié, par exemple, la section oblique du cylindre, il est incontestable que la découverte des propriétés de cette courbe ne pouvait lui présenter aucune difficulté sérieuse.

Au sujet de l'emploi des courbes en général et en particulier de celui des sections coniques pour la solution de problèmes comme la duplication du cube, il y a une importante question qui reste en suspens. Les courbes étaient-elles supposées construites par points ou autrement?

En faveur de la construction par points, j'ai fait observer ici qu'on ne peut guère supposer un autre tracé pour la quadratrice (en dehors de l'emploi de patrons taillés sur une quadratrice déjà construite). M. Allman penche pour la même solution en ce qui concerne les coniques et il met en avant divers arguments dont la valeur est incontestable.

On a objecté qu'une telle construction est contraire à toutes les habitudes de la Géométrie grecque ; c'est là une assertion plus facile à émettre qu'à développer. Nous voyons de fait les géomètres grecs essayer de résoudre les problèmes par la règle et le compas, mais pour les questions solides, quand interviennent les coniques, nous n'avons aucun indice d'un tracé continu, avant celui de la parabole, dont il n'est parlé qu'à une époque très postérieure (au VIe siècle de notre ère). Bien plus, il semble, à la façon dont Nicomède exalte sa découverte, que la conchoïde ait été la première courbe dont le tracé continu ait été réalisé, grâce à l'emploi d'un instrument spécial.

L'objection est donc loin d'être décisive; cependant la manière dont Eratosthène parle de la solution du problème de Délos par Ménechme ne me paraît guère, tout compte fait, conciliable avec l'hypothèse de la construction par points pas plus qu'avec celle d'un tracé continu. Il ne reste donc qu'une supposition à faire, c'est qu'on ait admis, chez les géomètres grecs de cette époque, le tracé des coniques comme pouvant être obtenu au moyen de la section effective d'un cône par un plan.

Si invraisemblable que puisse paraître, au premier abord, une supposition de ce genre, elle mériterait peut-être d'être examinée à fond. Remarquons tout d'abord qu'il ne s'agit pas là, à mon sens, de la question pratique (la construction par points, avec la règle et le compas, aurait encore été plus simple), mais d'une conception théorique susceptible, à la rigueur, d'une réalisation pratique.

Cette conception aurait reposé sur l'idée qu'après les constructions manuelles réalisables avec la règle et le compas il faut passer aux constructions manuelles susceptibles d'un égal degré de précision. Or les anciens connaissaient le tour, et ils se rendaient parfaitement compte qu'avec cet instrument on peut obtenir des surfaces de révolution à méridienne simple au moins aussi parfaites que tout plan dressé à la main.

A propos de la solution d'Archytas pour le problème de Délos, solution obtenue au moyen des intersections réciproques d'un cylindre, d'un tore et d'un cône, j'ai écrit, comme le rappelle M. Allman (p. 122), que la recherche des projections de ces intersections était si naturelle que l'on ne pouvait s'étonner que d'une chose, à savoir qu'Archytas eût conservé à sa solution une forme purement théorique.

Mais, si l'on se place au point de vue que j'ai indiqué, on pourra moins s'étonner. Rien ne nous serait en somme plus facile, si la chose en valait la peine, que de disposer un engin pouvant réaliser la solution d'Archytas avec la précision de la règle et du compas. Nul doute qu'Archytas en ait pu faire autant, ce qui ne veut nullement dire qu'il l'ait fait ou qu'il ait proposé de le faire pratiquement; mais il pouvait suffire, dans l'ordre d'idées de l'époque, que la chose fût simplement possible.

L'absurdité pratique de la réalisation effective de sections de

solides pour le tracé des courbes diminue sensiblement si l'on passe de la solution d'Archytas à celle de Ménechme, la première par exemple, qui emploie deux paraboles de paramètres différents. Avec des engins relativement simples, ce ne serait qu'un jeu, à la vérité un peu long, que de construire matériellement un cône orthogone et de le couper perpendiculairement à une génératrice, à des distances déterminées du sommet, de façon à obtenir les patrons de deux courbes à reporter sur un plan. A un tel procédé, le langage d'Ératosthène s'appliquerait parfaitement.

Il est un autre point de l'histoire des coniques qui n'est pas encore suffisamment élucidé, même depuis les travaux de Zeuthen. Je veux parler de l'œuvre d'Aristée.

Je crois, avec Heiberg, et contrairement aux conclusions de M. Allman, qu'Aristée n'a composé sur les coniques que ses cinq Livres des *Lieux solides,* qui formaient une suite aux travaux de Ménechme; qu'au contraire il n'a pas rédigé d'*Éléments de coniques.* Ce fut Euclide qui, le premier, composa de tels *Éléments* et fit ainsi oublier les écrits du premier inventeur.

Les *Coniques* d'Euclide disparurent à leur tour devant celles d'Apollonius [1], mais le travail d'Aristée continua au contraire à faire partie du Recueil classique des Ouvrages d'Analyse géométrique et il était encore étudié au temps de Pappus, comme suite aux *Coniques* d'Apollonius.

C'est à peu près tout ce qu'on en sait et aucune divination sérieuse n'a été tentée sur son contenu. Il me semble cependant qu'une étude approfondie de Pappus et en même temps la recherche des lacunes incontestables qu'offre l'œuvre d'Apollonius pourraient jeter quelque lumière sur ce sujet.

Pappus nous dit expressément qu'Euclide, écrivant après Aristée, évita d'aller sur ses brisées, c'est-à-dire sans doute qu'il ne reprit pas les théories complètement traitées par l'auteur des *Lieux solides,* qu'il développa au contraire celles sur lesquelles s'appuyait celui-ci, comme ayant déjà été traitées par Ménechme.

---

[1] Ou plutôt devant les quatre premiers Livres d'Apollonius qui développaient le même sujet, les quatre derniers d'Apollonius abordant au contraire des théories tout à fait nouvelles.

Apollonius, suivant l'ordre adopté par Euclide, laissa probablement subsister les lacunes volontairement laissées par son précurseur et ce fut évidemment la raison qui fit maintenir l'étude des *Lieux solides* d'Aristée, certaines choses essentielles à connaître ne se trouvant que là.

La lacune la plus saillante des *Coniques* d'Apollonius est sans contredit l'absence de toute mention du foyer de la parabole, tandis que les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole sont l'objet d'une théorie étendue. Le foyer de la parabole ne se trouve indiqué d'une façon précise dans aucun texte grec antérieur à Anthemius (VIe siècle de notre ère), et l'on a voulu faire à ce dernier mathématicien l'honneur de cette découverte capitale.

Je crois, tout au contraire, que, si Apollonius n'a pas parlé du foyer de la parabole, c'est qu'il n'avait rien à en dire de plus que ce qu'en avait déjà dit Aristée. En considérant, en effet, les lieux solides qu'emploie Pappus dans sa proposition IV, 44, dont le texte est malheureusement corrompu, il me semble impossible, d'une part, d'y méconnaître des énoncés tirés d'Aristée, et de supposer, d'un autre côté, que le géomètre qui avait recherché ces lieux n'eût pas de même cherché, par exemple, celui des points également distants d'une droite et d'un point.

Les *Lieux solides* d'Aristée devaient sans doute être un Recueil de problèmes, les uns plus simples, les autres plus compliqués, conduisant à des équations de sections coniques. S'il avait procédé avec une certaine méthode, il avait dû sans doute reconnaître par cette voie bon nombre de propriétés intéressantes que nous ne rencontrons pas dans les *Coniques* d'Apollonius et dont nous pouvons, dès lors, attribuer la découverte aux modernes, quand ils les ont simplement retrouvées.

J'estime également que le problème du lieu à trois ou quatre lignes avait été déjà posé par Aristée et qu'il l'avait même traité d'une façon suffisante pour que sa solution n'eût besoin que d'être complétée par l'application immédiate d'un certain nombre de théorèmes successivement découverts par Euclide et par Apollonius. C'est ainsi seulement que je puis m'expliquer que ce dernier n'ait pas, pour son compte, traité ce célèbre problème.

Je me borne à ces brèves indications qui ont pour but principal de faire ressortir que la théorie des coniques a dû se développer

beaucoup plus tôt et beaucoup plus complètement qu'on n'est généralement porté à le croire; que d'ailleurs ces développements ont eu lieu dans une voie beaucoup plus voisine des méthodes analytiques modernes que les théories d'Apollonius, et cela à l'occasion de problèmes de lieux posés sur le plan et conduisant à des relations tout à fait analogues à nos équations entre coordonnées.

PAUL TANNERY.

GRAINDORGE (J.). — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE. 1 vol. in-8°; 290 p. Liège, Desoer; Bruxelles, Hayez; 1889.

Sous ce titre, M. Graindorge publie une exposition d'ensemble des recherches les plus importantes concernant ce chapitre essentiel de l'Analyse et de la Mécanique. Il établit d'abord les équations de Lagrange et il en déduit celles d'Hamilton. Ces dernières sont obtenues aussi directement, en suivant une voie qu'a indiquée M. É. Mathieu.

L'étude de ces équations se relie à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, comme l'ont montré Hamilton et Jacobi. L'auteur traite, en suivant cette voie, les problèmes classiques développés par Jacobi dans les *Vorlesungen über Dynamik* et complète sur quelques points les résultats généraux obtenus par ce dernier au moyen des recherches de M. Mayer et de M. Darboux. Il développe ensuite les conséquences du théorème fondamental de Poisson-Jacobi, ainsi que les remarques essentielles de M. Bertrand sur la valeur de ce théorème. Enfin, après avoir analysé les travaux de Bour sur la matière, il consacre à la théorie de la variation des constantes arbitraires et des perturbations les dernières pages de son Livre. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

HATTENDORF (K.). — *Einleitung in die analytische Geometrie*. 3e édition. Hannover, Schmorl et v. Seefeld.

HATTENDORF (K.). — *Einleitung in die Lehre von den Determinanten*. 2e édition. Ibid.

HEIS (E.). — *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra*. 71e édition. Cologne, Du Mont-Schaumberg.

KADIK (Peter). — *Theorie der sechsstelligen Characteristiken*. Inauguraldissertation. Dorpat.

KAISER (H.). — *Einführung in die neuere analytische und synthetische Geometrie*. Wiesbaden, Bergmann.

KRIEG V. HOCHFELDEN (F.). — *Ueber die durch den Integralausdruck* $\Phi(t) = \int \frac{R_1(z, \omega)\,dz}{R_2(z, \omega) - t}$ *dargestellten Functionen, wobei* $R_1(z, \omega)$ *und* $R_2(z, \omega)$ *algebraische Functionen einer und derselben Riemann'schen Fläche sind*. Wien, Gerold's Sohn.

MOLIEN (Th.). — *Ueber die lineare Transformation der elliptischen Functionen*. Inauguraldissertation. Dorpat.

MÜLLER (F.-A.). — *Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik*. Marbourg, Elwert.

REIFF (R.). — *Zur Kinematik der Potentialbewegung*. Tubingen, Fues.

REUSCHLE (C.). — *Praxis der Kurvendiscussion*. Stuttgart, Metzler.

SCHIRDEWAHN (G.). — *Ueber das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale dritter Gattung und erster Ordnung*. Oels, Grüneberger et Cie.

SCHWARZ (A.). — *Ueber eine ein- und zweideutige Verwandschaft zwischen Grundgebilden zweiter Stufe*. Wien, Gerold's Sohn.

STERNBERG (M.). — *Geometrische Untersuchungen über die Drehung der Polarisationsebene in magnetischem Felde*. Ibid.

STOLZ (O.). — *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik der complexen Zahlen*. Leipsig, Teubner.

BURMESTER (L.). — *Lehrbuch der Kinematik*. Leipsig, Felix.

DESCARTES. — *La Géométrie de René Descartes*. Nouvelle édition, Paris, Hermann.

GEGENBAUER (L.). — *Zahlentheoretische Notiz*. Wien, Gerold's Sohn.

KUPPER (C.). — *Ueber geometrische Netze*. Prag, Calve.

KUPPER (C.). — *Hyperelliptische* C_p^{3n}.

LICHTENFELS (O.-V.). — *Notiz über eine transcendente Minimalfläche*. Wien, Gerold's Sohn.

Marie (Max.). — *Histoire des Sciences mathématiques et physiques.* t. X : *De Laplace à Fourier.* Paris, Gauthier-Villars.

Pick (G.). — *Zur Theorie der an einer allgemeinen Curve dritter Ordnung hinerstreckten Integrale und der von ihnen abhängigen elliptischen Functionen.*

Pick (G.). — *Zur Theorie der binomischen Integrale.* Ibid.

Pick (G.). — *Ueber die Abel'schen Integrale dritter Gattung, welche zu Singularitäten freien ebenen algebraischen Curven gehören.* Ibid.

Reinbeck (K.). — *Ueber diejenigen Flächen, auf welchen die Flächen zweiten Grades durch parallele Normal conform abgebildet werden.*

Rémond (A.). — *Exercices élémentaires de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution.* Paris, Gauthier-Villars.

Schlegel (V.). — *Ueber Entwickelung und Stand der m-dimensionalen Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Vierdimensionalen.* Leipsig, Engelmann.

Leydler (A.). — *Ausdehnung der Lagrange'schen Behandlung des Dreikörper-Problem auf das Vierkörper-Problems.* Prag, Calve.

Tesar (J.). — *Die Contourevolute axialer Schraubenflächen.* Wien, Gerold's Sohn.

Werner (W.). — *Beiträge zur Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen mit specieller Anwendung auf das Rotationsparaboloid.* Leipsig, Lorentz.

Wirtinger (W.). — *Ueber die Brennpunktscurve der räumlichen Parabel.* Wien, Gerold's Sohn.

Graham (R.-H.). — *Graphic and analitic Statics.* London, Lockwood.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. VOGT. — Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre.

Ce travail, présenté à la Faculté des Sciences de Paris, a pour objet l'étude des relations qui existent entre une équation différentielle du second ordre et le groupe correspondant.

M. Poincaré (*Acta*, IV) montre que le groupe dépend de certaines fonctions des coefficients de l'équation, qu'il appelle *invariants fondamentaux;* ils sont en nombre $3n-3$, si n est le nombre des points singuliers non apparents, à distance finie.

M. Vogt considère d'abord, indépendamment de toute équation différentielle, $3n-3$ invariants fondamentaux particuliers et en déduit, d'une part, les n substitutions fondamentales du groupe, d'autre part l'invariant d'une substitution quelconque. Le problème ainsi posé dépend de la résolution de $n-2$ équations du second degré et a 2^{n-2} solutions; l'invariant d'une substitution quelconque est fonction entière des $3n-3$ invariants primitifs et de $n-2$ autres qui leur sont liés par $n-2$ équations du second degré à coefficients entiers; cela signifie qu'il y a 2^{n-2} équations différentielles ayant un système donné de $3n-3$ invariants fondamentaux; à chacune d'elles correspond un groupe différent.

Il y a exception lorsque les invariants satisfont à $2n-3$ relations rationnelles et entières; ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle soit réductible.

Dans le § 5, on forme tous les systèmes d'invariants fondamentaux; on résout d'abord, par rapport à $S_1, S_2, \ldots, S_n$, un système d'équations en substitutions de la forme

$$S_1^{\alpha_k} S_2^{\beta_k} \ldots = T_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ soient un produit de substitutions T, il est nécessaire, dans le cas où les substitutions sont indépendantes, que les substitutions T s'expriment au moyen des S par application et répétition de trois opérations simples; ces conditions sont du reste suffisantes dans tous les cas; elles conduisent à des transformations entières et réversibles des systèmes d'invariants fondamentaux. Ces transformations, analogues aux transformations

Cremona, laissent invariable le système des $2n-3$ relations de réductibilité.

On résout ensuite ce problème important : *Reconnaître sur les invariants d'un groupe si ce groupe est fuchsien;* les relations qui existent entre les invariants et le polygone fuchsien fournissent non seulement la solution de la question, mais encore la traduction géométrique des résultats qui précèdent.

Dans la deuxième Partie, l'auteur détermine les invariants en fonction des paramètres de l'équation différentielle; la nature de ces fonctions s'explique par la présence, dans leur développement en série, de fonctions désignées par Λ et analogues au logarithme.

Dans la dernière Partie, on cherche à étudier les fonctions inverses, c'est-à-dire les paramètres de l'équation différentielle considérés comme fonctions des invariants fondamentaux. Lorsque l'on connaît, par la théorie des fonctions zêta-fuchsiennes par exemple, une équation ayant n points singuliers donnés à l'avance, $n-2$ points apparents, et un groupe donné, toutes les autres satisfaisant aux mêmes conditions se déduisent de la première par l'application de transformations analogues aux transformations Cremona; les racines des équations déterminantes sont altérées de nombres entiers, les points apparents sont remplacés par $n-2$ autres et les paramètres se changent en des fonctions rationnelles de ces paramètres et des racines des équations déterminantes.

Il existe de plus, pour les paramètres considérés comme fonctions des invariants, des points et des surfaces de singularité analogues à des points critiques algébriques.

JUEL. — Bidrag til den imaginäre linies og den imaginäre Plans Geometri [1]. 1 vol. in-8°, VIII-101 p. Copenhague, 1885.

Cette thèse commence par un résumé des définitions de v. Staudt des éléments imaginaires, auquel l'auteur joint une simplification de la théorie des correspondances projectives de ces éléments, en considérant, à côté de la projectivité propre, une espèce

---

[1] Contributions à la géométrie de la droite et du plan imaginaires.

de correspondances qu'il appelle *symétrales,* et qui font correspondre les éléments d'une figure aux éléments conjugués aux éléments imaginaires d'une figure projective à la première figure. L'introduction de la symétralité devient nécessaire lorsqu'on veut étendre aux éléments imaginaires la définition suivante de la projectivité des éléments réels de deux figures : deux figures planes sont projectives si, à la fois, les points et les droites de l'une correspondent d'une manière univoque aux points et aux droites de l'autre.

La discussion de ces correspondances est en partie géométrique, en partie analytique. Dans la partie géométrique, l'auteur s'occupe, par exemple, de la question s'il est possible de composer une transformation symétrale quelconque d'une série d'involutions. Dans la partie analytique, il prend un point de départ assez abstrait pour l'étude des *Würfe* de v. Staudt, en cherchant les transformations projectives dont la composition est soumise aux principes associatif, commutatif et distributif. Du reste, il s'occupe en particulier des invariants d'une ou de plusieurs expressions de la forme $ax\bar{y} - bx - c\bar{y} + d$, le symbole $\bar{y}$ désignant la quantité conjuguée à la quantité imaginaire y.

Les points réels d'un plan réel formant un groupe bien distingué aussi au point de vue projectif, les groupes qu'on en forme par une transformation projective méritent une étude particulière. En étendant la terminologie de v. Staudt, l'auteur les appelle des *chaînes à deux dimensions*. Après avoir trouvé leurs propriétés principales, l'auteur montre l'application de cette théorie à des problèmes où il s'agit de critères de la réalité de points d'une figure.

Un plan imaginaire contient une seule droite réelle. Ses autres points sont imaginaires et correspondent univoquement aux droites réelles qui les contiennent. Les courbes du plan imaginaire sont donc représentées par des congruences de droites. L'auteur se sert de cette représentation pour étudier les propriétés des courbes du second et du troisième ordre et certaines propriétés d'une courbe algébrique générale dans un plan imaginaire. Le cas où le plan est réel n'étant qu'un cas particulier, il parvient aussi de cette façon à des propriétés d'une courbe algébrique dans un plan réel, par exemple à la relation, trouvée

par M. Klein, qui a lieu entre les nombres des tangentes et des points réels d'une courbe algébrique imaginaire dans un plan réel. H. Z.

GRUEY, Professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Besançon, directeur de l'Observatoire. — EXERCICES ASTRONOMIQUES A L'USAGE DES ÉLÈVES DES FACULTÉS ET DES OBSERVATOIRES. 1 vol. in-8°, 346 p., 22 pl. gr. A. Hermann; Paris, 1889.

Le nouvel Ouvrage de M. Gruey vient compléter d'une manière heureuse ses *Leçons d'Astronomie,* publiées dernièrement [1]. Après le cours, voici la conférence. Les compléments du cours, les 149 problèmes résolus qui sont réunis dans les *Exercices astronomiques* en font une œuvre bien propre à éclairer et à fixer la théorie dans l'esprit de l'étudiant, en lui permettant un essai fécond de ses premières connaissances en Astronomie. Ce Recueil rendra ainsi les mêmes services que rendent journellement, pour l'Analyse et la Mécanique, les Recueils si répandus de MM. Frenet, Tisserand, Jullien, de Saint-Germain.

L'Ouvrage est divisé en cinq Livres, et les questions se succèdent dans l'ordre même du cours lithographié, auquel le lecteur est renvoyé à chaque instant.

Les Livres I et II, comme les Livres correspondants du cours, ont pour titres respectifs : *Méthodes générales de calcul, Méthodes générales d'observation.*

Le Livre I comprend ainsi trois Chapitres : 1° Trigonométrie sphérique ; 2° Développements en séries ; 3° Erreurs accidentelles. Dans le premier, qui renferme une dizaine d'exercices, on remarquera le théorème de Legendre, si utile en Géodésie, et des résolutions numériques de triangles qui montrent bien l'usage et l'importance des formules différentielles, et qui familiariseront le lecteur avec les logarithmes de Gauss, souvent si avantageux. Quatre exercices sur la démonstration, l'extension ou l'application de certains développements en séries forment le Chapitre deuxième. Quant au troisième (*Ex.* 15 à 27), il débute par de

---

[1] GRUEY, *Leçons d'Astronomie redigées conformément au programme de la Licence.* 1 vol. in-4°, lithogr. A. Hermann; Paris, 1885.

nouvelles vérifications de la loi de répétition des erreurs. Cette loi a été établie dans le cours suivant la méthode empirique, basée uniquement sur l'expérience et les faits. L'expérience ici consiste en pointés, sur un trait de cercle divisé, et l'auteur en donne trois séries, obtenues à l'observatoire de Besançon, qui permettent donc de vérifier à nouveau la loi et de calculer l'erreur probable d'un pointé pour les trois observateurs. Viennent ensuite quelques exercices purement analytiques, puis une Table donnant la probabilité pour que l'erreur d'une observation, de précision connue, tombe entre $-x$ et $+x$, Table qui est utilisée pour résoudre diverses questions. Le Chapitre se termine par une application de la méthode des moindres carrés et du procédé plus expéditif de Cauchy.

Le Livre II s'ouvre par un Chapitre relatif aux cercles divisés, contenant des détails sur la construction et l'usage de la machine à diviser les cercles de M. Secrétan. Suit un Chapitre sur les nivellements, traitant du niveau des maçons, de la construction du niveau à bulle d'air, de remarques pratiques sur le nivellement d'un axe, et se terminant par cinq problèmes, avec application à la lunette méridienne. Quatre exercices sur la mesure des angles constituent le Chapitre suivant. Enfin, un dernier Chapitre (*Ex.* 37-39) renferme l'étude très détaillée du dipléidoscope, du mouvement des différentes pièces du sidérostat de Foucault et de l'héliostat de Silbermann.

Avec le Livre III, *La Terre et le mouvement diurne,* nous entrons dans le champ de l'Astronomie mathématique proprement dite. Ce Livre, le plus étendu de l'Ouvrage, ne contient pas moins de soixante-deux exercices, sans parler de parties théoriques considérables. Il est divisé en cinq Chapitres. Le premier se rapporte au *mouvement diurne d'une seule étoile.* Les problèmes 40-49 concernent successivement les circonstances principales de ce mouvement, les variations des coordonnées zénithales de l'étoile, de l'angle parallactique, les développements de ces angles en séries et certaines de leurs dérivées partielles, puis la détermination de l'heure sidérale et la réfraction. Les vingt-deux pages qui suivent sont consacrées à un Mémoire important *Sur une forme géométrique des effets de la réfraction dans le mouvement diurne.* En un jour sidéral, la position apparente d'une étoile dé-

crit une conique autour de sa position vraie. Les éléments de la conique, la loi du mouvement sur cette courbe sont calculés, et l'auteur en déduit le mouvement composé, résultant du mouvement de l'étoile sur la conique et du mouvement d'entraînement de la sphère céleste. Des remarques sur l'influence de la réfraction dans l'orientation du fil polaire des lunettes équatoriales, des Tables et des applications numériques complètent ce travail. Enfin, les questions 50-58 appartiennent à cette classe de problèmes qui, sous une forme plus ou moins déguisée, reviennent au fond à résoudre un certain triangle sphérique dont on connaît trois éléments. Le Chapitre II renferme une vingtaine d'exercices sur le *mouvement diurne de deux étoiles :* l'un d'eux, qui conduit à une équation du quatrième degré, est suivi d'une application numérique; l'exercice 79 est relatif au micromètre circulaire. Une demi-douzaine de questions, dont plusieurs d'une grande portée, composent le Chapitre III, *Sur le mouvement diurne de trois étoiles au moins.* Quant au Chapitre IV (*Ex.* 87-94), intitulé : *Lieux terrestres définis par des conditions astronomiques,* il se signale par des problèmes curieux, dont les solutions et les discussions présentent le plus haut intérêt. Nous nous bornerons à citer en particulier les exercices 91 et 92 :

Trouver les lieux de la Terre $(\mathcal{L}, \varphi)$ *qui voient ou ont, sous l'azimut donné a, une étoile désignée* $E(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, *à l'époque sidérale* θ *du premier méridien;*

Étudier la forme de la courbe Σ *d'égal azimut en projection orthographique sur une carte,*

et l'exercice 93 :

Quelle est la route terrestre d'un voyageur fictif A, *qui marcherait toujours dans l'azimut d'une étoile donnée* $E'(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$, *en maintenant invariable la distance zénithale* z *d'une autre étoile aussi donnée* $E(\mathcal{A}, \mathcal{D})$?

Le cas où l'étoile E′ se confond avec l'étoile E, c'est-à-dire où le voyageur poursuit directement E sous une hauteur constante, est spécialement intéressant. Le Chapitre V, qui termine le Livre III, comprend six exercices *sur la parallaxe et l'aberration diurnes,*

dont les formules sont démontrées géométriquement et d'un seul coup au n° 101.

Le Livre IV, comme le Livre pareil du cours, a pour titre : *Le Soleil.* Il est divisé en quatre Chapitres et suivi de quelques exercices proposés non résolus. Le Chapitre I : *Mouvement diurne du Soleil,* est formé de dix exercices, accompagnés de remarques pratiques. On y étudie, entre autres choses, le passage du Soleil à travers le réticule d'une lunette pointée sous une direction connue, la détermination du rayon d'un micromètre circulaire, l'observation du Soleil au cercle méridien et sa réduction, le moyen de tenir compte de la réfraction. Dans le Chapitre II : *Mouvement elliptique du Soleil* (*Ex.* 112-132), on remarquera une vérification numérique des lois de ce mouvement, une démonstration, due à M. Bonnet, de la variabilité du jour solaire vrai, puis des problèmes sur les anomalies, sur les équations du centre et du temps, la réduction à l'équateur, et enfin une série de questions usuelles qui familiariseront le lecteur avec la *Connaissance des Temps*. Le Chapitre III (*Ex.* 133-134) traite des articles *précession et nutation*, *changement de coordonnées des étoiles, translation du Soleil,* et le Chapitre IV donne cinq exercices *sur les taches solaires*.

On arrive ainsi au Livre cinquième et dernier, qui s'intitule : *Lune, Planètes, Phénomènes,* et qui vise les Livres V, VI et VII du cours. Ce livre débute par huit problèmes sur la Lune : calculer l'heure du lever ou du coucher, calculer la phase, décrire l'observation d'un passage de la Lune et sa réduction au méridien ; puis quelques questions usuelles, résolues à l'aide de la *Connaissance des Temps*. L'exercice 148 concerne les planètes. Vient ensuite une importante addition à la théorie des *éclipses de Soleil* expliquée dans le cours, d'où l'on déduit, dans les pages suivantes, les formules d'*occultation d'une étoile par la Lune*. Enfin, l'exercice 149 : *Calculer l'effet d'un petit déplacement de l'observateur sur les époques d'immersion ou d'émersion d'une étoile occultée par la Lune*, termine l'Ouvrage.

Outre les quelques figures qui sont intercalées dans le texte, 103 figures bien gravées sont réunies en 22 planches à la fin du Volume.

Nous avons essayé d'esquisser, dans leurs traits saillants, les *Exercices astronomiques* de M. Gruey, qui viennent combler une

lacune anormale dans l'outillage de l'enseignement. Mais on ne résume pas en quelques lignes un volume de 346 pages, surtout un Recueil d'exercices, et ce que nous ne saurions montrer ici, c'est la netteté et l'élégance des solutions, c'est le soin avec lequel les discussions sont détaillées, c'est la méthode qui préside aux développements théoriques ou pratiques. On retrouve là toutes les qualités qui ont assuré le succès du cours, et l'on ne peut que remercier l'auteur de faire ainsi bénéficier le public de l'enseignement si élevé qu'il donne à Besançon. G. F.

SANGUET (J.-L.), Ingénieur-Géomètre, Président de la Société de Topographie parcellaire de France. — TABLES TRIGONOMÉTRIQUES CENTÉSIMALES, précédées des *Logarithmes des nombres de* 1 *à* 10000, suivies d'un grand nombre de *Tables* relatives à la *transformation des coordonnées topographiques en coordonnées géographiques* et vice versa; aux *nivellements trigonométriques et barométriques;* au *calcul de l'azimut du Soleil et de l'étoile polaire, du temps et de la latitude;* au *tracé des courbes avec le tachéomètre;* etc., etc. A l'usage des topographes, des géomètres du Cadastre et des agents des Ponts et Chaussées et des Mines. Petit in-8; 1889.

Extrait de la Préface.

Il me paraît inutile de démontrer ici les avantages de la division décimale du quadrant; l'expérience a parlé depuis longtemps : cette division réduit le temps de trois à deux et les chances d'erreur de quatre à une, aussi bien dans les observations que dans les calculs. Delambre, après en avoir fait usage dans la mesure de la méridienne, assurait qu'aucun de ceux qui ont pratiqué les deux modes de division ne veut retourner à l'ancien.

Proposée par Lagrange et inscrite au nombre des nouvelles mesures par les auteurs du système métrique, la division centésimale fut bientôt introduite dans les Mathématiques pures et dans la pratique de l'Astronomie et de la Géodésie par Legendre, Lacroix, Carnot, Prony, Monge, Borda, Laplace, Méchain, Delambre, Biot, Puissant, etc.; parmi nos contemporains, on trouve au nombre de ses partisans des savants tels que MM. Le Verrier, Airy et Förster, directeurs des observatoires de Paris, Greenwich

et Berlin; MM. le général Perrier, d'Abbadie, Hoüel, de Chancourtois, etc.

Malgré des efforts rétrogrades inexplicables, son emploi fut maintenu par notre Dépôt de la Guerre, puis introduit dans l'enseignement donné à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie; il vient d'être adopté par l'administration du Cadastre. La Tachéométrie a, de son côté, imposé l'usage de la nouvelle division dans la Topographie appliquée aux travaux publics....

Enfin l'application de la méthode des coordonnées rectangulaires à la description et à la localisation des immeubles ne devient réellement pratique qu'à l'aide de la division décimale des angles. Ma qualité de président de la Société qui a précisément pour but de faciliter et d'étendre cette application me faisait en quelque sorte un devoir de combler la lacune que j'étais, d'ailleurs, le premier à regretter.

Les Tables que je publie aujourd'hui ayant pour but principal de faciliter et abréger les opérations de détail, je devais chercher avant tout à les rendre portatives et, pour cela, à réduire leur étendue, tout en leur conservant une précision suffisante pour le calcul des triangulations du troisième ordre et au-dessous. J'ai réduit de 100 à 50 le nombre de pages de la Table trigonométrique, en prenant pour argument le double centigrade, qui correspond, à moins de $\frac{1}{12}$ près, à la minute sexagésimale. Je pouvais, il est vrai, arriver au même résultat en ne donnant, comme Callet, que trois lignes trigonométriques sur six; mais j'ai préféré la facilité et la certitude des calculs à une précision, trop souvent illusoire, que ne comportent ni les instruments ni les méthodes d'observation employés en Topographie. D'ailleurs, les différences logarithmiques pour 1 centigrade et la disposition particulière de la Table des parties proportionnelles permettent de tenir compte des centigrades impairs, soit d'interpoler pour les milligrades aussi promptement que si la Table avait une étendue double.

La Table trigonométrique contient donc les logarithmes des sinus, tangentes, sécantes, cosinus, cotangentes et cosécantes de 2 en 2 centigrades de 0^G à 100^G. Sans insister sur la grande simplification apportée dans les calculs par l'usage des logarithmes sécantes et cosécantes, je ferai seulement remarquer que ces logarithmes, combinés par voie de soustraction avec le logarithme

rayon, fourniront un contrôle sérieux des coordonnées calculées avec les logarithmes sinus et cosinus.

Les azimuts et les orientations se comptant de 0^G à 400^G, j'ai ajouté à chaque page des chiffraisons complémentaires rendant inutile le calcul de l'*angle avec la méridienne,* qui est une source d'erreurs dans l'emploi de l'ancienne division, et j'ai placé à la suite de chaque nombre de grades le signe du sinus et du cosinus de l'arc qu'il exprime. On verra dans l'Instruction (p. 31 et 32) combien ces signes sont encore utiles dans le calcul inverse des coordonnées.

J'ai limité à cinq le nombre des décimales des logarithmes contenus dans mes Tables, parce que les décimales négligées ne représentent guère qu'une erreur de $\frac{1}{43400}$. Or, si l'on considère qu'une incertitude de 1 centigrade sur un angle correspond à une erreur de $\frac{1}{6366}$, c'est-à-dire sept fois plus grande que la précédente, on conviendra qu'une décimale de plus serait plus nuisible qu'utile dans les calculs topographiques. Quant à la caractéristique, je l'ai augmentée de 10 unités dans tous les logarithmes correspondant à des valeurs plus petites que l'unité. Les caractéristiques négatives sont une source d'erreurs très fréquentes dans les calculs; leur emploi est généralement condamné par les calculateurs. Enfin j'ai donné aux Tables une disposition qui facilite singulièrement les recherches et repose la vue du calculateur.

Je n'ai pas cru ma tâche limitée à la publication des seules Tables des logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques; j'ai pensé, au contraire, qu'il était de toute nécessité de donner en même temps aux praticiens les moyens de rattacher les opérations topographiques anx grands travaux géodésiques, et de faire avec facilité et exactitude les calculs et les vérifications qu'exige l'emploi des méthodes modernes. Dans ce but, j'ai réuni dans la seconde Partie de ce Recueil diverses Tables, inédites pour la plupart, précédées d'exemples d'applications propres à vulgariser des méthodes, des observations et des moyens de contrôle employés couramment en Géodésie, mais considérés comme « trop scientifiques » par la grande majorité des opérateurs dont j'ai parlé plus haut. Telle était, d'ailleurs, l'appréciation du savant et regretté général Perrier, qui m'a constamment encouragé dans ma tâche.

Les Tables géodésiques placées en tête de la seconde Partie faciliteront les rattachements aux points trigonométriques établis par l'État-Major, aussi bien en altitude qu'en planimétrie.

Les deux Tables suivantes se rapportent aux nivellements barométriques, si utiles pour les avant-projets et les levers de reconnaissances.

J'ai réuni dans une seule page les formules les plus élémentaires de la théorie des erreurs, et, dans la page en regard, les résultats tout calculés de plusieurs de ces formules et les principaux facteurs des autres. Dans une troisième page, j'ai placé les valeurs de quelques différentielles trigonométriques, servant à évaluer très promptement l'erreur linéaire correspondant à une erreur angulaire donnée.

Dans maintes circonstances, l'opérateur, privé des ressources de la Géodésie, doit recourir à l'observation d'un astre pour s'orienter avec une certaine précision. L'étoile polaire passe au méridien à toute heure du jour ou de la nuit, suivant la saison : si c'est pendant le jour, elle est invisible avec les faibles lunettes des instruments topographiques; et si c'est pendant la nuit, il faudra revenir sur le terrain à une heure déterminée, ordinairement très importune, pour assister le plus souvent à l'éclipse de l'astre directeur par un nuage. Quant aux observations solaires, elles ne sont guère pratiquées, en Topographie, qu'avec la méthode des hauteurs correspondantes, laquelle est également assujettie aux chances du ciel et n'est susceptible de précision qu'aux environs des solstices. J'ai donc pensé qu'il était important de donner au topographe le moyen de s'orienter instantanément, non à une heure déterminée d'avance par les phénomènes astronomiques, mais au moment où il lui plaît de pointer sa lunette sur un astre visible et connu de lui : tel est l'objet principal de mes *Tables astronomiques centésimales*.

Il y a toujours un très grand avantage à utiliser les propriétés de l'aiguille aimantée, pour donner à l'instrument une orientation approchée, grâce à laquelle bien des problèmes compliqués peuvent être résolus par la méthode des approximations successives, employée avec succès dans les Sciences d'observation. Les Tables de la page XIX permettent d'atteindre ce but avec une précision qui suffira même souvent à une orientation définitive.

Les plans cotés pour études de voies de communication, etc., sont généralement levés à l'aide de la méthode tachéométrique; or tous les tachéomètres sont divisés en grades, et les Tables destinées à faciliter le tracé des courbes de raccordement sont toutes calculées pour l'ancienne division. J'ai comblé cette lacune en donnant (p. XX) les formules logarithmiques qui permettront de calculer tous les éléments d'une courbe avec les Tables de la première Partie, sans s'encombrer d'une volumineuse Table spéciale qui ne compte jamais moins de 200 à 250 pages, selon le format, laquelle n'offre aucun avantage au point de vue de la célérité, ni aucune garantie quant à l'exactitude des calculs. Et pour compléter cette partie de mon Recueil, je donne (p. XXII à XXXIV) la Table des *coordonnées polaires* et des *coordonnées rectangulaires* de points équidistants sur une courbe circulaire, Table que j'ai calculée en 1872 pour 42 rayons différents. A l'aide de cette Table, il sera facile de tracer les courbes avec le tachéomètre, chaque fois que le terrain opposera des difficultés au chaînage.

Enfin, pour que rien ne fasse regretter l'ancienne division, j'ai réuni à la fin du volume un *Recueil de Tables à quatre décimales*. On y trouvera : 1° la valeur naturelle des sinus verses (de 0^G à 25^G), des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, sécantes et cosécantes de 0^G à 400^G, et des cordes de 0^G à 100^G, en procédant par décigrades; 2° les carrés des nombres depuis 0,1 jusqu'à 199,9; 3° les logarithmes des nombres de 1 à 2000; 4° une Table d'antilogarithmes, et 5° les logarithmes sinus et cosinus de 0^G à 400^G, de 5 en 5 centigrades. Ces trois dernières Tables sont très commodes pour le calcul des coordonnées des points de détail.

Le texte explicatif qui précède les Tables de la seconde Partie, par ses nombreux exemples et types de calcul, peut être considéré comme le résumé et, à certains égards, comme le complément d'un Traité de Topographie.

Il me reste à dire deux mots de la correction des épreuves : je n'ai reculé devant aucune peine ni aucun sacrifice pour assurer à mes Tables une exactitude digne des meilleurs travaux sur l'ancienne division. J'ai fait usage de moyens beaucoup plus nombreux et surtout plus efficaces que ceux employés par Delambre dans la revision des Tables de Borda. Mais je dois exprimer ici toute ma reconnaissance envers mon ami M. Tranchart, trésorier de la So-

ciété de Topographie parcellaire de France, géomètre topographe à Saint-Wit (Doubs), qui a bien voulu se charger de la revision d'un duplicata de la troisième épreuve de chaque Tableau. Les corrections signalées par ce dévoué collaborateur étaient toujours conformes à celles que j'avais inscrites sur mon exemplaire. Enfin, j'ai fait après le clichage une nouvelle lecture aussi minutieuse que les précédentes. C'est donc avec confiance que je livre mon travail aux topographes et aux calculateurs.

Table des Matières.

points équidistants, par coordonnées polaires et par coordonnées rectangulaires, calculées par 42 rayons différents. — TABLE A QUATRE DÉCIMALES. — *Lignes trigonométriques en parties du rayon.* Sinus verses de 0 à 25 grades. Sinus. Tangentes. Sécantes. Cordes. — *Carrés des nombres de dixième en dixième de* 0,1 *à* 199,9. — *Logarithmes.* Logarithmes des nombres de 1 à 2000. Antilogarithmes. Logarithmes des sinus et cosinus.

J.-L. S.

MÉLANGES.

NOTE SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ, SOUS L'ACTION D'UNE FORCE DONT LA DIRECTION PASSE CONSTAMMENT PAR LE CENTRE DE LA SURFACE ET DONT L'INTENSITÉ NE DÉPEND QUE DE LA DISTANCE DU POINT AU CENTRE;

PAR M. ASTOR.

Jacobi a trouvé, par l'application de son beau théorème sur les équations canoniques, l'équation en termes finis de la trajectoire d'un point mobile sur une surface du second degré et attiré ou repoussé par le centre proportionnellement à la distance. Cette équation peut être retrouvée par les méthodes ordinaires, en introduisant dans les équations du mouvement la réaction de la surface. Le calcul montre que cette réaction varie proportionnellement au cube de la distance du centre au plan tangent mené à la surface par le point mobile, de sorte que, si l'on choisit convenablement la vitesse initiale, la réaction peut être nulle, et alors l'équation différentielle du mouvement définit une conique ayant pour centre le centre de la surface. Il arrive justement que cette équation a la forme de l'équation d'Euler :

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} = 0,$$

λ et μ étant les cordonnées elliptiques du point et F un polynôme du quatrième degré. La forme de l'intégrale se trouve connue *a priori* par la remarque qui vient d'être faite, et l'on arrive aux conclusions suivantes :

L'intégrale de l'équation

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(d-\lambda)}} + \frac{d\mu}{\sqrt{(a-\mu)(b-\mu)(c-\mu)(d-\mu)}} = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\sqrt{A(a-\lambda)(a-\mu)}+\sqrt{B(b-\lambda)(b-\mu)}+\sqrt{C(c-\lambda)(c-\mu)}=0,$$

A, B et C étant trois constantes liées par la relation

$$A(a-b)(a-c)(a-d)+B(b-a)(b-c)(b-d) \\ +C(c-a)(c-b)(c-d)=0.$$

Si $F(\lambda)=\sqrt{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}$ n'est que du troisième degré, la forme de l'intégrale générale demeure la même, la relation entre A, B et C devenant

$$A(a-b)(a-c)+B(b-a)(b-c)+C(c-a)(c-b)=0;$$

et l'intégration algébrique de l'équation d'Euler se trouve déduite de considérations mécaniques.

La méthode suivie conduit à l'expression d'une force, dépendant seulement de la distance r du point au centre de la surface, sous l'influence de laquelle le point décrira la polhodie de son point de départ, à condition que sa vitesse, de grandeur arbitraire, soit dirigée suivant la tangente à la polhodie. a, b, c, et l' étant les carrés des demi-axes de la surface et l'inverse de la distance constante du centre au plan tangent, k étant une constante déterminée par la vitesse initiale, l'expression de la force est

$$R=kr\left\{1-\frac{abcl'^2(al'^2-1)(bl'^2-1)(cl'^2-1)}{\left[r^2-\frac{1}{l'^2}-\frac{(al'^2-1)(bl'^2-1)(cl'^2-1)}{l'^2}\right]^2}\right\}.$$

On trouve et l'on discute aisément l'expression de la réaction de la surface, et l'on déduit, de l'expression de la force, l'équation en coordonnées elliptiques du lieu des points de la surface pour lesquels la polhodie et la ligne géodésique qui lui est tangente ont même rayon de courbure, points que l'on peut comparer, pour les polhodies, aux points d'inflexion des courbes planes.

Si l'on considère l'herpolhodie correspondant à la polhodie décrite par le point, l'application de la théorie des mouvements relatifs permet d'obtenir deux équations différentielles qui définissent en coordonnées polaires le mouvement du point sur l'herpolhodie, le pôle étant le pied de la perpendiculaire menée du centre au plan tangent. Ces équations diffèrent dans la forme de celles qu'a données M. Darboux; elles correspondent à un autre mode de description de la courbe; on pourrait en déduire les mêmes

résultats. Mais on peut, en continuant à se placer au point de vue dynamique, utiliser la forme des équations pour calculer l'expression d'une force centrale dirigée vers le pôle choisi, dépendant seulement de la distance à ce pôle, et sous l'influence de laquelle le point, placé dans des conditions initiales convenables, décrirait l'herpolhodie. L'expression de cette force, rapportée à l'unité de masse est de la forme,

$$R = \frac{N\rho}{(\rho^2+n)^2} + \frac{2P\rho}{(\rho^2+n)^3},$$

ρ étant le rayon vecteur, n, N et P trois constantes.

Réciproquement, si un point est sollicité par une force centrale de cette forme, sa trajectoire pourra, dans des conditions particulières, être une herpolhodie. Il faudra d'abord que la constante des forces vives soit négative. Ceci étant et conservant les mêmes notations que ci-dessus, on pourra former deux équations du troisième degré ayant pour racines, la première al'^2, bl'^2, cl'^2, la seconde $al'^2 - 1$, $bl'^2 - 1$, $cl'^2 - 1$, et si a, b, c et l' déterminent une herpolhodie, la trajectoire coïncidera avec cette courbe. Dans le cas particulier où n est négatif et P positif, on a toujours une herpolhodie tracée, sur une hyperboloïde à une nappe, autour du sommet du grand axe de l'ellipse de gorge. C'est le cas singulier, indiqué par M. Darboux, où le rayon vecteur, après avoir tourné dans un sens, rétrograde à partir d'une certaine position.

Si la force a la forme connue $\frac{N}{\rho^3}$, et si la vitesse initiale satisfait à l'inégalité $v_0^2 - \frac{N}{\rho_0^2} < 0$, ce qui exige que la force soit attractive, on peut trouver une infinité d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à une nappe admettant la même polhodie plane et donnant, par l'herpolhodie correspondante, la trajectoire du point matériel.

Enfin, si la force a pour expression $\frac{N\rho}{(\rho^2+n)^2}$, où n a une valeur négative, et si l'on a $v_0^2 - \frac{N}{\rho_0^2+n} < 0$, la trajectoire pourra être engendrée par le roulement d'une ellipse, si la force est attractive, par celui d'une hyperbole, si elle est répulsive.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.



TOME XIII; 1889. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XIII.

14959 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, A. HARNACK, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XIII. — ANNÉE 1889.
(TOME XXIII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNUAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, Hayez, in-18 [1].

Tome LI; 1885.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Joseph-Antoine-Ferdinand Plateau. (389-486).

Joseph Plateau, né à Bruxelles le 14 octobre 1801, mort à Gand le 15 septembre 1883, a été professeur de Physique à l'Université de Gand, de 1835 à 1883, mais il n'y a plus fait de cours depuis 1843, époque où il devint aveugle. En Physique, il a écrit un grand nombre de Mémoires et de Notes sur les phénomènes subjectifs de la vision, sur l'équilibre des liquides soustraits à l'action de la pesanteur, sur la mesure des sensations, etc. Il a résumé une partie de ses recherches dans un grand Ouvrage intitulé : *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Gand et Paris, 2 vol.; 1873), où l'on trouve maints développements relatifs à la théorie des surfaces minima ou élassoïdes; à ce point de vue, ce livre intéresse les mathématiciens. Plateau a aussi écrit quelques Notes purement mathématiques : c'est lui qui a découvert les points singuliers des courbes transcendantes, appelés *points de dédoublement.* Une liste complète des travaux de Plateau termine la Notice de M. Van der Mensbrugghe.

---

[1] Voir *Bulletin*, X_2, p. 226.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE; 55e année, 3e série. Bruxelles, Hayez, 1885 ([1]).

Tome IX (janvier à juin 1885).

Mansion (*P.*). — Note sur la méthode des moindres carrés. (9-14).

Si l'on applique aux équations

$$(1) \qquad a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n = h_i,$$

où $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, m étant plus grand que n, la méthode des moindres carrés, on trouve n équations normales

$$(2) \qquad a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 + \ldots + a_{nj}X_n = H_j,$$

où $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Au lieu des n équations (2), on peut prendre les $m + n$ équations

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{1i}X_1 + a_{2i}X_2 + \ldots + a_{ni}X_n = h_i + \xi_i, \\ a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + \ldots + a_{jm}\xi_m = 0. \end{cases}$$

Au moyen de ce système auxiliaire (3), équivalent à (2), on démontre aisément le théorème suivant :

« Si l'on élimine, par la théorie des déterminants, de toutes les manières possibles, p inconnues entre les équations (1), le système normal déduit des équations nouvelles, par la méthode des moindres carrés, conduit, pour les $n - p$ inconnues conservées, aux mêmes valeurs que le système normal (2) des équations primitives. »

Ce théorème est, à la fois, la généralisation de celui par lequel Jacobi termine sa théorie des déterminants et de celui que M. Catalan démontre dans le premier paragraphe de ses *Remarques sur la théorie des moindres carrés.*

Folie (*F.*) et *Melsens*. — Rapports sur le Mémoire de M. Hirn intitulé : « Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température ». (40-71).

Le second rapporteur analyse le Mémoire de M. Hirn; le premier le critique sur un point essentiel. M. Hirn démontre expérimentalement que la force vive d'un courant de gaz, lancé contre une plaque, est indépendante de la température du gaz. Il croit pouvoir en déduire que la théorie cinétique des gaz de

---

([1]) Voir *Bulletin*, XI_2, p. 221. L'Académie n'a publié aucun Volume de Mémoires, ni in-8°, ni in-4° en 1885.

Clausius est fausse et, par suite aussi, la doctrine matérialiste, qui, selon lui, a son sort lié à celui de la théorie cinétique.

M. Folie fait observer : 1° que cette relation entre la théorie cinétique et le matérialisme n'existe pas; 2° que les expériences de Hirn peuvent s'interpréter en faveur de la théorie cinétique (Clausius a répondu aux arguments de M. Hirn, dans les *Bulletins de l'Académie de* 1886, t. XI, p. 173-193).

Lagrange (*Ch.*). — Formule nouvelle pour le développement des fonctions, en particulier des intégrales. (114-117).

Si $x = a + h$, $0 < \theta < 1$,

$$\begin{aligned}
Fx = Fa &+ \frac{1}{2}h(F'x + F'a) - \frac{1}{2}\frac{h^2}{1.2}(F''x - F''a)\frac{n-1}{2n-1} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{h^3}{1.2.3}(F'''x + F'''a)\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-2)} - \dots \\
&+ (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{h^n}{1.2\dots n}[F^n x - (-1)^n F^n a]\frac{1.2\dots(n-1)}{(n+1)\dots(2n-1)} \\
&+ (-1)^n\frac{1}{2}F^{2n+1}(a+\theta h)\frac{\theta^n}{n(n+1)}\frac{h^{2n+1}}{1.2\dots(2n-1)}.
\end{aligned}$$

La formule de M. Ch. Lagrange n'est pas nouvelle; elle a été trouvée en 1875, par M. Darboux, dans le *Journal de Liouville*, par une méthode différente.

De Tilly (*J.-M.*). — Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation. (216-235). (Publié aussi dans *Mathesis*, t. V, Supplément, III, p. 1-20.)

I. La transformation de Legendre, où $p = \frac{dy}{dx}$, $P = \frac{dY}{dX}$, $\pi = \frac{d\eta}{d\xi}$, $q = \frac{dp}{dx}$,

$$x = P, \qquad y = PX - Y, \qquad p = X,$$

et les transformations

$$x = \eta, \qquad y = \xi, \qquad p = \frac{1}{\pi},$$

étant appliquée, successivement, plusieurs fois à une équation différentielle $f(x, y, p, q) = 0$, permettent d'en déduire neuf autres équations différentielles distinctes. Si l'équation $f = 0$ est d'une forme intégrable, il en est de même des équations que l'on en déduit. L'auteur applique cette remarque à l'équation de Riccati transformée $q = yx^m$, et à cette équation généralisée $q = y\,Fx$, et trouve ainsi de nouveaux résultats relatifs à cette équation, ainsi que des théorèmes connus.

II. L'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = yx^m$ peut s'intégrer, non seulement quand m est entier positif (Kummer), ou négatif et inférieur à $(-2n)$, mais aussi si m est quelconque; au moins on peut en trouver une solution. Le procédé consiste en une substitution fondée sur une remarque de Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIV, p. 33; 1882) et une méthode

due à Kummer; on réduit l'exposant n à $\frac{1}{2}n$ ou à $\frac{1}{2}(n+1)$. La substitution appliquée à $q = y\,\mathrm{F}x$ ne conduit à rien.

III. L'auteur énonce sans démonstration le théorème suivant :

« On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre si l'on pouvait déduire l'intégrale de

$$q - p^2 + \mathrm{F}(x, k) = 0$$

de celle de

$$q - p^2 + k\,\mathrm{F}(x, k) = 0$$

ou de celle de

$$q - p^2 + \mathrm{F}(x, k) + k = 0. \text{ »}$$

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Essai sur la théorie mécanique de la tension superficielle, de l'évaporation et de l'ébullition des liquides. (346-362).

Esquisse d'une théorie reprise sous une forme plus approfondie, dans le tome XI.

Catalan (*E.*) et *Mansion* (*P.*). — Rapports sur le Mémoire intitulé : « Sur certains développements en séries; par M. *J. Deruyts* ». (522-528).

Soient

$$\varphi(x) = \mathrm{A}_0\mathrm{T}_0(x) + \mathrm{A}_1\mathrm{T}_1(x) + \mathrm{A}_2\mathrm{T}_2(x) + \ldots,$$
$$f(x) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \ldots$$

deux séries convergentes et susceptibles d'être intégrées terme à terme après multiplication par certaines fonctions. S'il existe des fonctions $\psi(x)$, telles que

$$\int_c^d \psi_n(x)\,\mathrm{T}_n(x)\,dx = 1, \qquad \int_c^d \psi_n(x)\,\mathrm{T}_{n+k}(x)\,dx = 0,$$

on aura

$$\mathrm{A}_n = \int_c^d \varphi(x)\,\psi_n(x)\,dx, \qquad f(z) = \int_c^d \varphi(x)\,\Psi(z, x)\,dx,$$

si l'on pose

$$\Psi(z, x) = \psi_0(x) + z\,\psi_1(x) + z^2\,\psi_2(x) + \ldots.$$

De même, on aura la formule inverse de la précédente

$$\varphi(x) = \int_a^b \lambda(x, u)\,f[\theta(x, u)]\,du,$$

si

$$\mathrm{T}_n(x) = \int_a^b \lambda(x, u)\,[\theta(x, u)]^n\,du.$$

Leman. — Sur la recherche des moments fléchissants et des

efforts tranchants qui se produisent dans une poutre appuyée à ses extrémités et fléchie sous l'action d'une surcharge mobile. (574-586).

De Tilly. — Rapport. (528-530).

Solution par la Statique graphique, en considérant un solide dont les sections sont les diagrammes correspondant à chacune des positions de la surcharge.

Catalan (*E*.). — Questions d'analyse indéterminée. (531-534). Une récréation arithmétique. (534-536).

Sur les équations $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, ...

Tome X (juillet à décembre 1885).

Martins da Silva. — Sur une question de la théorie des fonctions. (79-84).

Mansion (*P*.). — Rapport (t. IX, p. 324-326).

Gudermann a fait connaître (*Journal de Crelle*, t. 18, p. 164 et suivantes) diverses formules sur les fonctions elliptiques de trois et même de quatre arguments quelconques. Parmi ces formules, on peut citer la suivante

$$-k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2},$$

où l'on suppose $u + v + r + s = 0$.

Cayley a fait connaître une formule plus générale où les quatre arguments sont quelconques. M. Martins da Silva prouve que la formule de Cayley est contenue dans une formule de Jacobi publiée par Rosenhain (*Mémoires des savants étrangers de l'Académie de Paris*, t. XI, p. 375), lui donne diverses formes et montre qu'elle peut conduire à divers résultats intéressants trouvés par H.-J.-S. Smith et d'autres.

De Tilly et *Mansion* (*P*.). — Rapports sur le Mémoire intitulé : « Solution du problème universel de Wronski et d'un autre problème relatif à l'intégration des équations différentielles; par M. *Ch. Lagrange* ». (536-549, 550-558).

I. Le problème universel de Wronski est le suivant :

« Étant donnée une relation

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \ldots + x_n f_n x,$$

développer une fonction Fx de x suivant les puissances et les produits des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. »

Il est facile de ramener ce problème à celui de Lagrange. Posons $b - z = fx$ et introduisons partout la variable z au lieu de x. La question sera transformée en la suivante :

« Étant donnée une relation

$$z = b + x_1 \varphi_1 z + x_2 \varphi_2 z + \ldots + x_n \varphi_n z,$$

développer une fonction ψz suivant les puissances et les produits de x_1, x_2, ..., x_n. »

On en fait dépendre immédiatement la solution de la série de Lagrange, en supposant d'abord

$$z = b + t x_1 \varphi_1 z + t x_2 \varphi_2 z + \ldots + t x_n \varphi_n z,$$

développant ψz suivant les puissances de t et faisant $t = -1$.

L'auteur du Mémoire fait la réduction que nous venons d'indiquer, calcule les coefficients du développement, détermine le reste de la série d'après la *Loi suprême* (démontrée par M. Ch. Lagrange, pour la première fois). Il donne ensuite diverses généralisations du problème universel; puis des applications, entre autres celle-ci : Développer une fonction d'une racine d'une équation $\varphi x = 0$ suivant les puissances de φa, a étant une valeur approchée de la racine. Il suffit, pour cela, de faire ce développement suivant les puissances de $\varphi x - \varphi a$, puis d'observer que $\varphi x = 0$.

Çà et là, dans cette partie de son Mémoire, M. Ch. Lagrange n'est pas assez précis sur les conditions d'existence des théorèmes qu'il énonce, parce qu'il n'utilise pas les travaux les plus récents sur la série de Lagrange.

II. La seconde Partie du Mémoire contient un essai d'intégration des équations différentielles par la méthode de la variation des constantes arbitraires et par développement en série de l'intégrale suivant les puissances d'un paramètre.

Suivant M. de Tilly, qui a tenté l'application de ce procédé de développement au problème de l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre (sous la forme que M. de Tilly lui a donnée), cette méthode semble ouvrir de nouvelles perspectives à ceux qui s'occupent de cette question difficile, qu'à cette occasion il transforme de diverses manières.

Suivant M. Mansion, les formules de M. Lagrange relatives à la variation des constantes arbitraires ne sont pas démontrées dans son Mémoire, mais elles sont vraies moyennant certaines conditions et le Rapport en contient une démonstration; quant au développement de l'intégrale suivant les puissances d'un paramètre, il semble presque impossible de dire d'une manière générale dans quel cas il est légitime.

Voici le théorème de M. Ch. Lagrange relatif à la variation des constantes arbitraires :

« Si l'intégrale générale de l'équation $x'' = f(t, x, x', 0)$ peut se mettre sous la forme

$$c = \varphi(t, x, x'), \qquad g = \psi(t, x, x'),$$

l'intégration de l'équation $y'' = f(t, y, y', a)$ se réduira à celle du système

$$u' = \chi(t, u, v, a), \qquad v' = \pi(t, u, v, a),$$

où u, v sont deux nouvelles fonctions; χ, π des fonctions connues se déduisant de φ et ψ. »

Mansion (P.). — Sur une forme du reste dans la formule de Taylor et dans celle de M. Ch. Lagrange. (846-849).

I. En général, la partie réelle de $(a+b\sqrt{-1})$, plus la partie imaginaire de $(c+g\sqrt{-1})$, est égale à $\lambda\sqrt{2}e^{m\sqrt{-1}}$ multiplié par le plus grand des deux modules $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{c^2+d^2}$; λ, quantité positive, est au plus égale à l'unité. Donc le reste de la formule de Taylor, pour les fonctions d'une variable imaginaire, savoir :

$$\Re\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n}\frac{n}{p_1}(1-\theta_1)^{n-p_1}F^n z_1 + \Im\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n}\frac{n}{p_2}(1-\theta_2)^{n-p_2}F z_2,$$

$$z_1 = z_0+\theta_1(Z-z_0),\qquad z_2 = z_0+\theta_2(Z-z_0),\qquad 0<\theta_1<1 \text{ et } 0<\theta_2<1,$$

peut se mettre sous la forme

$$\lambda\sqrt{2}e^{m\sqrt{-1}}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n}\frac{n}{p}(1-\theta)^{n-p}F^n[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

II. Supposons FZ, F'Z, ..., $F^n Z$ développés par le théorème de Taylor jusqu'aux termes en $(Z-z_0)^{2n}$, avec le reste

$$\int_{z_0}^{Z}\frac{(Z-t)^{2n}F^{2n+1}t\,dt}{1.2.3\ldots 2n},$$

pour la première fonction et de même pour les autres. Éliminons entre les $(n+1)$ développements $F^{n+1}z_0$, $F^{n+2}z_0$, ..., $F^{2n}z_0$; nous obtiendrons la formule de M. Ch. Lagrange (*Bulletins*, t. IX, 114-117) avec le reste donné par M. Darboux

$$\int_{z_0}^{Z}\frac{(Z-t)^n(z_0-t)^n}{1.2.3\ldots 2n}F^{2n+1}t\,dt,$$

d'où l'on peut déduire celui de M. Ch. Lagrange.

Tome XI (janvier-juin 1886).

De Heen (P.). — Détermination des variations que le coefficient de frottement intérieur éprouve avec la température. Considérations théoriques qui découlent de l'observation de ces grandeurs. (29-44).

L'auteur établit la relation suivante

$$F^{\frac{n-1}{n}} = A\left(F - \frac{dF}{d\pi}\right),$$

entre le coefficient de frottement F à une température quelconque et la variation $\frac{dF}{d\pi}$ de ce coefficient pour une variation de température de 10° C.

Le Paige (*C.*). — Sur le nombre des groupes communs à des involutions supérieures marquées sur un même support. (121-127).

Le nombre $F(m, k, m', k')$ des groupes de $(k + k')$ points communs à des involutions $I(m, k)$, $I(m', k')$ est

$$C_{m-k}^{k'} C_{m'-k'}^{k}.$$

L'auteur donne la démonstration dans le cas où $k = 2$, puis fait remarquer que la formule générale se déduit de la loi de récurrence

$$(k + k') F(m, k, m', k') = (m' - k - k' + 1) F(m - 1, k - 1, m', k') + (m - k' - k + 1) F(m, k, m' - 1, k' - 1).$$

La formule trouvée permet d'établir de nombreuses propriétés géométriques dont M. Le Paige donne quelques exemples.

Hirn (*G.-A.*). — Lettre à M. Liagre. (131-135).

Rectification à la page 182 d'un Mémoire publié par M. Hirn dans le tome XLVI des *Mémoires de l'Academie.* La vitesse du son ne peut être fonction de son intensité; s'il en était autrement, la musique d'ensemble serait impossible.

Catalan (*E.*). — Rapport sur un Mémoire intitulé : « Sur l'étude des événements arithmétiques », par M. *E. Cesaro.* (139-145).

Analyse d'un travail d'arithmétique asymptotique, contenant la solution du problème suivant : « Soit $X = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ une quantité quelconque engendrée, au moyen d'opérations données, par des nombres x_1, x_2, ..., x_m. Évaluer la probabilité que le nombre X soit doué d'une propriété Ω ». Les Notes du Rapport contiennent une esquisse de la solution.

Clausius (*R.*). — Examen des objections faites par M. Hirn à la théorie cinématique des gaz. (173-193).

Les expériences de M. Hirn sont décrites dans deux Mémoires publiés dans les tomes XLIII, XLIV des *Mémoires de l'Académie royale de Belgique.* Ces expériences sont bien conçues et probablement très bien exécutées, mais les conclusions qu'il en tire ne sont pas exactes, comme on peut le montrer.

Parmi ces conclusions, celle qui se rapporte au choc des gaz a été surtout exprimée d'une manière précise. D'un gazomètre contenant de l'air sous pression, M. Hirn fait sortir un courant d'air s'échappant d'un conduit recourbé à son extrémité, à angle droit, vers le bas et garni à cette extrémité d'un ajutage d'écoulement. A quelque distance de cet ajutage se trouvait, horizontalement placée, sur l'un des plateaux d'une balance, une plaque circulaire qui recevait normalement le choc du courant d'air. Pour contrebalancer la pression exercée sur la plaque, le second plateau était chargé de poids, qui servaient à mesurer la grandeur de la pression exercée. M. Hirn a constaté que cette pression était la même quand l'air était à la température ordinaire et quand il

était porté à la température de 200°. Il croit ce résultat en contradiction avec la théorie cinétique des gaz. Mais on peut faire des objections graves aux raisonnements sur lesquels il appuie cette manière de voir.

En premier lieu, il fait un usage si étendu d'hypothèses de simplification qu'il est difficile de savoir si ces raisonnements ont aucune force. Ainsi il remplace les mouvements dans *toutes* les directions que l'on admet pour les molécules gazeuses dans la théorie cinétique des gaz par des mouvements de ces molécules complètement indépendants suivant trois directions rectangulaires entre elles. Ces mouvements persisteraient jusqu'à rencontre d'une paroi solide. (Dans la théorie cinétique, on admet au contraire qu'il y a très souvent entre les molécules des chocs excentriques.)

En second lieu, en admettant cette hypothèse des mouvements dans trois directions rectangulaires, les calculs de M. Hirn contiennent une erreur. Si une fraction α du nombre total des molécules se meut dans une direction perpendiculaire à la plaque, M. Hirn admet que leur vitesse propre U *s'ajoute* toujours à la vitesse V d'écoulement, de sorte que leur pression sur la plaque est proportionnelle à $\alpha(U+V)^2$. Celle des autres molécules est proportionnelle à $(1-\alpha)V^2$. D'après lui, la pression totale d'un côté de la plaque est donc proportionnelle à $\alpha(U+V)^2+(1-\alpha)V^2=\alpha U^2+2\alpha UV+V^2$.

La pression de l'air en repos de l'autre côté de la plaque est proportionnelle à αU^2. Donc la différence $2\alpha UV+V^2$ est une quantité proportionnelle à la pression réelle causée par l'écoulement du gaz sur le plateau de la balance. Puisque le terme $2\alpha UV$ dépend de la température, la pression devrait donc (d'après la théorie cinétique *interprétée par M. Hirn*) être différente quand on expérimente à 200° ou à la température ordinaire, ce qui est contraire aux faits. Mais cette manière de calculer est fautive.

Il est évident qu'on doit admettre que $\frac{1}{2}\alpha$ des molécules doit frapper la plaque avec une vitesse $U+V$ et $\frac{1}{2}\alpha$ avec une vitesse $V-U$. Alors on trouve, pour quantité proportionnelle à la pression,

$$\frac{\alpha}{2}[(U+V)^2+(V-U)^2]+(1-\alpha)V^2-\alpha U^2=V^2,$$

quantité indépendante de U et de la température. Les expériences de M. Hirn confirment donc la théorie cinétique des gaz, si son hypothèse simplificatrice des trois groupes de mouvements indépendants des molécules est admissible.

Les objections à la théorie cinétique déduites de l'action de l'air en repos sur un corps en mouvement sont de la même nature que la précédente et contiennent, dans leur développement, la même erreur de raisonnement.

Voici une autre objection de M. Hirn. D'après la théorie cinétique, les mouvements moléculaires des gaz ne peuvent avoir dans l'air à la température considérée par M. Hirn dans une de ses expériences qu'une vitesse moyenne de 500^m environ. Or, il déduit de cette expérience que la vitesse d'écoulement était de plus de 4000^m, ce qui est « un argument mortel contre la théorie cinétique telle qu'elle a été établie jusqu'ici ». Mais il n'en est rien. La vitesse de 4000^m n'a pas été observée, mais déduite de certaines formules, qui, dans le cas des expériences invoquées par M. Hirn, ne sont évidemment pas applicables. Cette objection est donc aussi sans valeur.

En terminant, M. Clausius fait la remarque suivante relative à la théorie

purement cinématique de l'Univers. « Jamais, dans mes travaux sur la théorie cinétique des gaz, je n'ai soutenu cette opinion que toutes les forces peuvent s'expliquer par des mouvements; j'ai, au contraire, établi un théorème qui démontre l'opposé, je veux parler du théorème du viriel. Ce théorème dit que tout mouvement stationnaire a besoin, pour persister, de certaines forces qui lui font dynamiquement équilibre, et il exprime la condition de cet équilibre dynamique par une équation dont un des membres est la force vive du mouvement, tandis que l'autre est une expression qui est formée des coordonnées des masses en mouvement et de composantes de forces. Cette équation permet de conclure avec certitude que, sans forces attractives, aucun état de stabilité ne serait possible dans la nature.

(*Voir* un exposé détaillé des objections de M. Hirn à la théorie cinétique et des réponses que l'on peut y faire, par M. J. Delsaux, dans la *Revue des questions scientifiques de Bruxelles*, p. 270-292, juillet 1887.)

Mansion (*P.*). — Détermination du reste, dans la formule de quadrature de Gauss. (293-307).

Catalan (*E.*). — Rapport. (270-273).

I. La formule générale d'interpolation de Newton peut s'écrire

$$\mathrm{F}x = \mathrm{G}x + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\,\mathrm{P}(x),$$

$\mathrm{G}x$ étant le polynôme entier

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}(x - x_1) + \mathrm{C}(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \mathrm{L}(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

tel que $\mathrm{F}x_1 = \mathrm{G}x_1, \ldots, \mathrm{F}x_n = \mathrm{G}x_n$. Évidemment

$$\int_{-1}^{+1} (\mathrm{F}x - \mathrm{G}x)\,dx = \int_{-1}^{+1} (x - x_1)\ldots(x - x_n)\,\mathrm{P}(x)\,dx.$$

Posons $\varphi x = (x^2 - 1)^n$ et prenons pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines réelles et distinctes de $\varphi^n x = 0$. On aura

$$\int_{-1}^{+1} (\mathrm{F}x - \mathrm{G}x)\,dx = \frac{1}{(n+1)\ldots 2n} \int_{-1}^{+1} \varphi^n x\,\mathrm{P}(x)\,dx.$$

et, en intégrant n fois par parties, dans le second membre

$$\int_{-1}^{+1} (\mathrm{F}x - \mathrm{G}x)\,dx = \frac{1}{(n+1)\ldots 2n} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n\,\mathrm{P}^n(x)\,dx,$$

ou encore, x_μ étant une valeur intermédiaire entre $+1$ et -1,

$$\int_{-1}^{+1} (\mathrm{F}x - \mathrm{G}x)\,dx = \frac{\mathrm{P}^n(x_\mu)}{(n+1)\ldots 2n} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n\,dx.$$

L'auteur prouve que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la *fonction interpolaire* $\mathrm{P}(x)$ peut s'exprimer au moyen de la dérivée $\mathrm{F}^{2n}x$ de la fonction $\mathrm{F}x$, de sorte que

$$(1)\qquad \mathrm{P}^n(x_\mu) = \frac{\mathrm{F}^{2n}\xi}{(n+1)(n+2)\ldots 2n},$$

ξ étant compris entre -1 et $+1$. Par suite, on trouve aisément

$$\int_{-1}^{+1} (\mathrm{F}x - \mathrm{G}x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{\mathrm{F}^{2n}\xi}{1.2.3\ldots 2n},$$

ce qui est, à la forme près, la formule de Gauss, *avec une forme finie du reste*.

II. Pour établir la formule fondamentale (1), voici comment procède l'auteur. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction

$$\psi x = \frac{\mathrm{F}\mathrm{X} - \mathrm{F}x}{\mathrm{X} - x}$$

est obtenue sous la forme

$$\psi^n(x) = \int_0^1 (1-t)^n\, \mathrm{F}^{n+1}[x + t(\mathrm{X} - x)]\, dx,$$

sans recourir à la dérivation des intégrales définies sous le signe.

Cela fait, on en déduit la valeur de $\mathrm{P}^n x$ en observant que, d'après une formule d'Ampère, la fonction interpolaire $\mathrm{P}(x)$ est égale à

$$\frac{\dfrac{\mathrm{F}x_1 - \mathrm{F}x}{x_1 - x}}{(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots + \frac{\dfrac{\mathrm{F}x_n - \mathrm{F}x}{x_n - x}}{(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

Enfin la dérivée $\mathrm{P}^n(x)$ obtenue ainsi conduit à la formule (1), par l'intermédiaire d'un théorème de Cauchy donnant la valeur du reste dans la formule d'interpolation de Newton, ou celle d'une fonction interpolaire au moyen d'une dérivée.

Deruyts (J.). — Sur le calcul approché de certaines intégrales définies. (307-311).

Le Paige (C.). — Rapport. (279-280).

On a

$$\int_a^b fx\,\varphi x\, dx = \mathrm{A}_1 \varphi \alpha_1 + \mathrm{A}_2 \varphi \alpha_2 + \ldots + \mathrm{A}_n \varphi \alpha_n$$

comme valeur approchée de l'intégrale qui figure dans le premier membre, en ne négligeant que les puissances de x dont le degré est $2n$ au moins, si fx est une fonction qui ne change pas de signe entre a et b, φx un polynôme entier, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de $\mathrm{P}_n = 0$, P_n étant polynôme entier de degré n en x, tel que

$$\int_a^b fx\, \mathrm{P}_m \mathrm{P}_n\, dx = 0,$$

si m est différent de n. L'auteur donne la valeur explicite des coefficients A, dans trois cas assez généraux, savoir ceux où il s'agit des intégrales

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^m (1+x)^n \varphi x\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \varphi x\, dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \varphi x\, dx.$$

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur l'instabilité de l'équilibre de la couche superficielle d'un liquide. (Première partie, 341-355).

Une masse liquide libre et à surface fraîchement développée doit être regardée comme un ensemble de molécules qui exécutent des mouvements vibratoires, et dont les distances moyennes vont en diminuant depuis la surface extrême jusqu'à une profondeur égale au rayon d'activité de l'attraction moléculaire.

La température va en croissant depuis la surface jusqu'à cette profondeur.

De Heen (*P.*). — Note touchant la loi qui régit la dilatabilité des liquides. (545-554).

Complément des recherches antérieures de l'auteur.

Tome XII (juillet à décembre 1886).

Folie. — Rapport sur le Mémoire intitulé : « La Cinématique moderne et le dynamisme de l'avenir », par *G.-A. Hirn.* (5-9).

Analyse d'un Mémoire en réponse à la Note de M. Clausius (*Bulletin,* t. XI, p. 173-193). Les expériences de Hirn démontrent que la résistance opposée par un gaz au mouvement d'une plaque, ou inversement, est indépendante de la température de ce gaz. La théorie cinétique des gaz, telle que l'entend M. Hirn, conduit à un résultat contraire; mais, entendue comme M. Clausius, elle conduit au même résultat que l'expérience.

Le Paige (*C.*). — Rapport sur un Mémoire intitulé : « Sur une suite de polynômes conjugués », par M. *Duruyts.* (12-15).

Généralisation ingénieuse de divers résultats de Heine et de Didon sur la détermination approchée des intégrales définies $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ sous la forme $\Sigma A\,\varphi(a)$ et sur les polynômes qu'on rencontre dans la question.

Catalan (*E.*). — Sur une classe d'équations différentielles. (17-25).

L'équation $y''(1-x^2)x + (1-x^2)y' + xy = 0$ a pour intégrale générale

$$y = \left\{\lambda \int \frac{dx}{x[E(x)]^2} + \mu\right\} E(x); \qquad E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}.$$

En posant $y\sqrt{x} = z$, $\sqrt{x}\,\mathrm{E}(x) = \mathrm{X}$, elle devient

$$\frac{z''}{z} = \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}},$$

dont $z = \mathrm{X}$ est une intégrale immédiate. On peut donc aisément intégrer celle-ci. Il en est de même de l'équation plus générale

$$\mathrm{X}^2 z'' + k\mathrm{X}\mathrm{X}' z' - (\mathrm{X}\mathrm{X}'' + k\mathrm{X}'^2)z = 0.$$

Folie (*F.*) et *Catalan* (*E.*). — Rapports sur le Mémoire de M. Ch. Lagrange intitulé : « Théorèmes de Mécanique céleste, indépendants de la loi de l'attraction. » (231-238).

De Tilly et *Folie* (*F.*). — Rapports sur une réponse de M. Lagrange aux critiques d'un Rapport de M. Catalan. (489-493).

Lagrange (*Ch.*). — Réponse aux critiques du Rapport de M. Catalan. (527-539).

Catalan (*E.*). — Extrait d'une lettre à M. de Tilly. (t. XIII, p. 4).

Soient MT la tangente à une orbite à double courbure, P un point fixe. Dans le plan mobile PMT, M décrira une courbe plane. La position du plan mobile est déterminée à chaque instant par l'angle α qu'il fait avec un plan fixe et l'angle β de son intersection avec ce plan fixe avec une droite fixe dans ce plan fixe. L'auteur applique ce mode de représentation du mouvement d'un point M au problème des trois corps, en supposant l'attraction quelconque : P coïncide successivement avec chacun des trois corps. Il arrive ainsi à un grand nombre de résultats particuliers, parmi lesquels M. de Tilly cite les suivants : I. Le mouvement, soit dans le plan fixe, soit dans le plan mobile, de l'intersection de ces deux plans, se poursuit toujours dans le même sens (autrement dit β croît ou décroît toujours); α, au contraire, subit des augmentations et des diminutions alternatives. En supposant que l'attraction s'exerce suivant la loi newtonienne, appliquant ses formules à la question du mouvement des nœuds de la Lune, l'auteur retrouve des résultats connus. — II. Parmi toutes les lois d'attraction en raison inverse d'une puissance entière de la distance, la loi newtonienne est la seule qui puisse rendre sensible pour nous la révolution des nœuds de notre satellite.

De Heen (*P.*). — Note sur un travail de M. Robert Schiff sur la chaleur spécifique des liquides. (416-422).

Les expériences de M. Schiff confirment une loi de M. P. de Heen.

Le Paige (*C.*). — Sur les homographies dans le plan. (422-439).

Étude, par la théorie des formes algébriques plurilinéaires, des homographies d'ordre supérieur.

Catalan (*E.*). — Sur le dernier théorème de Fermat. (498-500).

Énoncé de seize théorèmes relatifs aux nombres a, b, c, tels que $a^n + b^n = c^n$.

Van der Mensbrugghe. — Sur l'instabilité de l'équilibre de la couche superficielle d'un liquide. (2e Partie, 623-643).

Suite d'un travail indiqué plus haut. A. Existence d'une tension superficielle propre à chaque liquide pour une température intérieure donnée. — B. Existence d'une force contractile ou d'une force d'extension à la surface de contact d'un liquide et d'un solide. — C. Tension superficielle à la surface commune de deux liquides qui ne se mêlent pas.

Mailly (*E.*). — Les Sociétés savantes et littéraires établies à Bruxelles sous la domination française. (786-794).

Un seul mathématicien en faisait partie : de Nieuport.

Houzeau. — Coup d'œil sur l'évolution scientifique. (795-813).

Suivant l'auteur, l'ordre d'évolution est le suivant : les sciences subjectives, qui prennent leur point de départ dans l'homme même et procèdent par déduction (Mathématiques, Philosophie), puis les objectives fondées sur l'observation et procèdent par induction. L'histoire de l'Astronomie ancienne paraît contraire à cette manière de voir; l'auteur nous semble attribuer aussi aux Arabes et aux Hindous des connaissances que les Grecs avaient déjà.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Neuvième année, 1884-1885, Bruxelles, Hayez; 1885 (A, première Partie; B, seconde Partie) (1).

D'Ocagne (*M.*). — Sur les courbes isométriques. (A, 56-58).

Résumé d'une Communication publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France.* Des courbes (K) sont dites *les tangentes isométriques de courbes* (C), si les arcs découpés sur les courbes (K) par deux courbes (C) sont égaux. Le système (C) étant donné et l'une des courbes (K), les autres courbes (K) sont dites *isométriques de la première.*

Mansion (*P.*). — Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. (B, 1-40).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 48-51).

(1) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 230-234.

Développement de deux articles antérieurs déjà analysés dans le *Bulletin*. 1. Préliminaires : Méthode de Cauchy et d'Abel pour obtenir le développement de $(1+z)^m$, $\log(1+z)$. 2. Conditions nécessaires et suffisantes pour que $Fz = F(x+yi) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ait une dérivée unique. 3. Théorème fondamental $F(Z) - Fz_0 = \mathfrak{R}(Z - z_0)Fz_1 + \mathfrak{I}(Z - z_0)Fz_2$ ($\mathfrak{R}$ = partie réelle, $\mathfrak{I}$ = partie imaginaire), z_1 et z_2 étant intermédiaires entre z_0, Z. 4. Théorème de Taylor, avec la forme du reste indiquée dans les *Bulletins de l'Académie de Bruxelles*, t. X, p. 846; 1885. Vraies valeurs des expressions indéterminées. 5. Développements en série de e^z, $\mathrm{Ch}\, z$, $\mathrm{Sh}\, z$, $\cos z$, $\sin z$. 6. Développement de $\log(1+z)$, même si le module de z est l'unité (z étant différent de -1). On le déduit, dans ce dernier cas, de celui de $(1+z)\log(1+z)$. 7. Binôme, dans tous les cas où la formule subsiste, l'exposant étant réel ou imaginaire. 8. Théorème de Taylor avec une forme du reste exprimée en intégrale définie. 9. Démonstration directe du théorème de M. Darboux, sur la forme du reste dans le théorème de Taylor. 10. Historique. Cauchy (*Calcul différentiel*, Leçon XIII; 1829), Falk (*Sur les fonctions imaginaires*, Upsal; 1877) ont au fond démontré le théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire à peu près comme M. Mansion; M. Darboux, par une méthode différente, est arrivé à des résultats équivalents (*Journal de Liouville*, 1875). *Voir* aussi une Note de M. Mansion, *Bulletin de Belgique*, 3e série, t. X, p. 846-849.

Gilbert (Ph.). — Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. (B, 41-48).

Soit $u = \alpha$, $v = \beta$ le système intégral des équations différentielles

$$dx : X = dy : Y = dz : Z,$$

formant le système auxiliaire servant à résoudre l'équation aux dérivées partielles $X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$. On aura identiquement

$$X : \frac{\delta(u, v)}{\delta(y, z)} = Y : \frac{\delta(u, v)}{\delta(z, x)} = Z : \frac{\delta(u, v)}{\delta(x, y)},$$

les seconds termes de ces rapports désignant des déterminants fonctionnels contenant des dérivées partielles par rapport aux lettres x, y, z qui entrent dans u, v, comme si x, y, z étaient indépendantes. En désignant par R l'expression commune des trois rapports, on trouve sans peine que

$$Xp + Yq - Z = R\frac{d(u, v)}{d(x, y)}.$$

Le déterminant fonctionnel du second membre contient maintenant les dérivées totales

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + p\frac{\delta u}{\delta z}, \qquad \frac{du}{dy} = \frac{\delta u}{\delta y} + q\frac{\delta u}{\delta z}$$

de u et v. Il résulte de là que toutes les solutions de l'équation

$$Xp + Yq - Z = 0$$

sont données par $v = \varphi(u)$ et $R = 0$.

De Sparre. — Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe et sur le pendule conique. (B, 49-94).

Exposé, au moyen des fonctions elliptiques, des principaux résultats auxquels on est arrivé sur ces questions. Dans la première, l'auteur s'inspire des beaux travaux de M. Hermite sur cette question, mais en rendant son exposition indépendante de l'étude de l'équation de Lamé. L'auteur démontre, entre autres choses, que l'herpolhodie de Poinsot n'a pas de points d'inflexion et, par suite, n'a pas la forme qu'on lui assigne habituellement. Dans la seconde question, M. de Sparre donne un exposé plus simple de la méthode employée dans sa Dissertation inaugurale.

De Tilly. — Sur une lacune qui semble exister au début de l'enseignement de la Géométrie descriptive. (B, 95-104). (Publié aussi dans *Mathesis,* t. V, Supplément II, p. 21-30.)

Développement d'une Note antérieure analysée dans le *Bulletin.* On peut transporter les données d'un objet à trois dimensions sur le plan d'une épure, au moyen des principes suivants : 1° un point quelconque O d'une figure se projette sur un plan déterminé par trois points A, B, C de cette figure au point d'intersection des cordes communes de trois cercles ayant respectivement pour centres A, B, C, pour rayons AO, BO, CO. On pourra projeter O sur un second plan ABD, D étant sur la figure solide; projeter D sur ABC, et, au moyen du triangle formé par D et ses projections sur ABC et sur AB, trouver l'angle dièdre CABD ; 2° on peut trouver sur une figure autant de points que l'on veut appartenant à un même plan, en décrivant, de deux points comme centres, deux courbes sphériques de même rayon, plusieurs fois.

L'auteur résout diverses questions par la règle et le compas, dans l'espace. Exemples : 1° sur une surface cylindrique ou conique du second degré, mener une génératrice par un point donné; 2° trouver les axes et les sommets d'un ellipsoïde de révolution solide. En employant, de plus, le calcul, on peut trouver les axes d'un ellipsoïde quelconque et ses sommets.

Haton de la Goupillière. — Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre de plusieurs variables indépendantes. (B, 151-186).

Désignons par δ l'opération

$$\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

Le calcul de $\delta^n f[\varphi(x,y,z)]$ sera simple, si φ est tel que $\delta f(\varphi)=F(\varphi)$, quel que soit f. L'auteur prouve que cela ne peut arriver que si $\varphi=$ const. est l'équation de sphères concentriques ou de cylindres de révolution de même axe. Il cherche ensuite dans quel cas

$$\delta f(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=F(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n).$$

Il applique les résultats trouvés à la recherche de $\delta^n f$ dans divers cas; en-

2nd Part

suite, il généralise encore les formules obtenues en supposant l'opération δ définie par la relation

$$\delta = P_1 \frac{d^2}{dx_1^2} + P_2 \frac{d^2}{dx_2^2} + \dots + P_p \frac{d^2}{dx_p^2},$$

dans le cas où $P_1, P_2, \dots, P_p$ sont des constantes, $p = 2, 3$, ou un nombre plus grand.

De Sparre. — Sur la réduction aux fonctions elliptiques de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F}}$. (B, 205-230).

Complément du travail analogue publié dans le tome précédent des *Annales*, t. VIII, B, 97-120, où l'auteur avait traité d'une manière simple le cas où la quantité sous le radical a toutes ses racines réelles. Il examine ici successivement le problème de la réduction : 1° quand le radical est du quatrième degré et a des racines imaginaires; 2° quand ce radical est du troisième degré et a des racines imaginaires; 3° quand le radical est du troisième degré et a des racines réelles. Ce dernier cas est exposé plus simplement que lorsqu'on le regarde comme la limite de celui où le radical est du quatrième degré. Comme application, M. de Sparre résout le problème du mouvement du pendule circulaire.

D'Ocagne (M.). — Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent. (B, 231-238).

Détermination simple des coordonnées successives des sommets. Les sommets des différents polygones ont même centre de gravité. Ce centre de gravité est la limite vers laquelle tendent les polygones.

De Sparre. — Sur l'herpolhodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. (B, 249-258).

Extension de la méthode exposée dans le Mémoire précédent (p. 49-94) au cas du mouvement d'une quadrique quelconque. L'auteur arrive d'une manière simple à la condition pour que l'herpolhodie ait ou n'ait pas de point d'inflexion.

Baule (A.). — La théorie du navire. (B, 259-285).

Étude de quelques questions relatives à la stabilité du navire, insuffisamment élucidées jusqu'à présent.

Dixième année, 1885-1886.

Mansion (P.). — Sur Euclide. (A, 46).

« Des treize Livres des *Éléments* d'Euclide, celui qui est le plus son œuvre personnelle, c'est le Livre X, traitant des incommensurables. »

Mansion (*P.*). — Sur le principe de substitution des infiniment petits. (A, 47).

Dans une limite de somme arithmétique ou de rapport d'infiniment petits, on peut remplacer un infiniment petit α par un autre β, tel que la limite du rapport $r = (\beta : \alpha)$ soit l'unité, *même si l'on fait varier simultanément toutes les variables dont ce rapport dépend, d'une manière indépendante ou non.* Plus d'un auteur a oublié de tenir compte de la condition soulignée ici.

Lagasse (*Ch.*). — Note sur les jaugeages des cours d'eau par pertuis et par voie directe. (48-52, 52-53).

Nécessité de contrôler les deux méthodes l'une par l'autre.

Delsaux (*J.*). — Sur la tension superficielle dans la théorie de la capillarité. (B, 43-74).

Gilbert (*Ph.*). — Analyse. (A, 53).

La théorie de Laplace et de Gauss, laquelle ne considère que des actions mécaniques à distance, suffit à rendre compte de tous les phénomènes capillaires; de plus, cette théorie amène à considérer des forces équivalentes aux forces fictives considérées dans l'hypothèse de la tension superficielle. En pratique, surtout dans les questions d'équilibre, l'emploi de ces forces fictives peut néanmoins être très utile.

D'Ocagne (*M.*). — Sur les sous-invariants des formes binaires. (B, 75-78).

Carnoy (*J.*). — Rapport. (A, 54-55).

Le numérateur de la dérivée d'ordre quelconque du logarithme de a_0 est un sous-invariant de la forme

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1} a_2 x^{n-2} y + \ldots,$$

où $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les dérivées successives de a_0.

D'Ocagne (*M.*). — Sur certaines suites de fractions irréductibles. (90-108).

Extension des propriétés des suites de Farey à des suites plus générales où les fractions considérées peuvent surpasser l'unité.

De Sparre. — Cours sur les fonctions elliptiques. 1re Partie. (B, 129-200).

1. Quelques propriétés des fonctions doublement périodiques (extrait de Ouvrage de Briot et Bouquet). 2. Démonstration de l'identité des fonctions

elliptiques définies au moyen de l'inversion des intégrales et de celles qui sont définies par les fonctions Θ et H. 3. Rappel de quelques formules supposées connues sur les fonctions elliptiques. 4. Les fonctions doublement périodiques de deuxième espèce peuvent s'exprimer au moyen de Θ et de H. Démonstration de MM. Hermite et Mittag-Leffler. 5. Formule de M. Halphen sur certains développements en série. 6. Application. 7. Développement en séries trigonométriques des fonctions

$$\frac{H'(0)\,\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\,\Theta(x)},\quad \frac{H'(0)\,H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)},\quad \frac{H'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(x)},\quad \frac{H'(0)\,H_1(\omega+x)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)}.$$

8. De la fonction $Z(u)$; théorème d'addition, etc. 9. Les fonctions Al de Weierstrass. Développement en série suivant les puissances de la variable. 10. Des fonctions p et σ de Weierstrass. 11. Théorème de l'addition des fonctions p.

Gilbert (*Ph.*). — Sur les produits composés d'un grand nombre de facteurs et sur le reste de la série de Binet. (B, 191-200).

De Tilly. — Rapport. (A, 55-57).

Si l'on pose

$$\Gamma\mu = \sqrt{2\pi\mu}\,\mu^{\mu-1}e^{-\mu+\varpi(\mu)},$$

on a, par la formule de Binet,

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + \frac{1}{2\mu(\mu+1)}\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}\int_0^1 x(1-x)\ldots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + R_n.$$

L'auteur prouve que la valeur absolue de R_n est inférieure à diverses expressions plus ou moins faciles à calculer, parmi lesquelles nous citerons

$$\frac{1}{64\mu}B(\mu, n),\quad \frac{1}{64\mu^2}\,\frac{1}{1+\mu C+\mu\log(n-1)},$$
$$\frac{1}{64(\mu-1)(n+1)[1+(\mu-1)C+(\mu-1)\log n]},\quad \frac{\Gamma(\mu)}{64\mu n^{\mu}}\,e^{\frac{1}{2n}\left(\mu+\frac{1}{6}\right)}.$$

C étant la constante d'Euler ou de Mascheroni, $B(\mu, n)$ la première intégrale eulérienne, μ une constante positive (plus grande que l'unité dans la troisième valeur approchée du reste).

De Salvert. — Mémoire sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans les problèmes de Mécanique et sur les lignes géodésiques des surfaces isothermes. (B, 293-408).

Première et deuxième Partie d'un Mémoire dont la troisième Partie sera publiée dans le tome suivant.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE. — 2e série, t. XII. Bruxelles, Hayez; mai 1885 (1).

Mansion (*P.*). — Discours sur les travaux mathématiques de M. Eugène-Charles Catalan. (1-38). (Aussi *Mathesis,* t. V, Supplément, II, p. 1-38).

Discours prononcé à l'occasion de la promotion à l'éméritat de M. E. Catalan. I. *Introduction :* M. Catalan, né à Bruges en 1814, est sorti de l'École Polytechnique en 1835, et devint répétiteur adjoint à cette École en 1838. II. Calcul des probabilités; théorie des combinaisons. III. Déterminants; intégrales multiples. IV. Recherches diverses d'Analyse. V. Recherches sur les élassoïdes; autres Mémoires géométriques. VI. M. Catalan et le coup d'État de 1851 : il quitte l'École Polytechnique et entre dans l'enseignement privé. VII. Ouvrages didactiques de M. Catalan : Géométrie, Traité des séries. VIII. Recherches diverses : théorie des polyèdres semi-réguliers. IX. Nomination de M. Catalan comme professeur à l'Université de Liège (1865). X. Travaux de M. Catalan depuis 1865 : théorie des nombres, fonctions X_n, fonctions elliptiques (*Recherches sur quelques produits infinis*), théorie des surfaces réglées, étude sur la surface des ondes.

Catalan (*E.*). — Mélanges mathématiques, t. I. (1-407).

Sera analysé en 1886, avec le tome II, qui constitue le tome XIII des *Mémoires de la Société royale de Liège.*

T. XI, décembre 1885 (a paru après le tome XII).

Le Paige (*C.*). — Sur les involutions cubiques. (1-19).

Complément des *Essais de Géométrie du troisième ordre* de l'auteur; théorèmes divers sur les involutions *sibi-conjuguées;* détermination des points de ramification de deux involutions cubiques dont on connaît les points doubles.

Vanecek (*J.-S.*). — Sur la transformation des figures polaires réciproques. (1-21).

Développements de Notes publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* en 1882 et 1883. La transformation s'effectue au moyen d'un tétraèdre polaire par rapport à une surface du second ordre. Une courbe ou une surface L, d'ordre l, se transforme par rapport à une autre courbe M, d'ordre m, et à une surface auxiliaire P, d'ordre p, en une autre

(1) Voir *Bulletin*, IX_2, p. 298.

courbe ou surface d'ordre $4lmp$. Cet ordre s'abaisse dans certains cas. Dans la présente Note, l'auteur examine les cas où l'une des figures données est polaire réciproque de l'autre ou passe par son pôle.

Vanecek (*M.-N.*). — Sur les surfaces du troisième ordre. (1-5).

Construction linéaire d'une surface du troisième ordre définie par dix-neuf points, au moyen des principes exposés dans une Note du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Mittag-Leffler (*G.*). — Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. (1-11).

Démonstration directe sans recourir au théorème de Cauchy sur les intégrales définies imaginaires, mais s'appuyant sur un principe contenu implicitement dans le célèbre Mémoire de Weierstrass : *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.*

Neuberg (*J.*). — Sur une suite de moyennes. (1-12).

Analysé comme Supplément de *Mathesis,* t. IV; 1884.

Schönflies (*A.*). — Sur la courbure des lignes décrites par les points d'un solide invariable en mouvement. (1-9).

Le Paige. — Rapport. (10-12).

L'auteur traite simplement différentes questions relatives au sujet indiqué dans le titre, en partant de la remarque suivante de Chasles : Lorsqu'un corps se déplace, chacun de ses points et le plan normal à la trajectoire correspondant forment un système polaire. Parmi les résultats obtenus, citons celui-ci : les points du système invariable qui, à un moment donné, passent par des points d'inflexion sur leurs trajectoires sont situés sur une cubique gauche; probablement, d'après le rapporteur, cette courbe est située sur un cylindre de révolution.

Neuberg (*J.*). — Sur les tétraèdres de Möbius. (1-14).

Analysé dans *Mathesis,* p. 221-222; 1884. Deux tétraèdres de Möbius sont tels que chacun d'eux est à la fois inscrit et circonscrit à l'autre. L'auteur établit, par la Géométrie, les propriétés fondamentales de ces tétraèdres et, en particulier, résout le problème suivant :

« Trouver sur quatre droites données les sommets de deux tétraèdres de Möbius. »

Deruyts (*J.*). — Sur les fonctions X_n de Legendre. (1-22).

1. Développements de quelques fonctions spéciales suivant les polynômes X_n de Legendre. 2. Conséquences diverses du développement

$$X_n = C_{2n}^{n} \cos n x + C_{2n-2}^{n-1} C_{2}^{1} \cos (n-2) x + \ldots.$$

où $\cos\alpha = x$. 3. Extension du théorème de Parseval aux fonctions X_n. 4. Autres propriétés.

Schönflies (*A.*). — Sur la courbure des trajectoires des points d'un système solide dont le mouvement est le plus général possible. (1-15).

Suite et complément du Mémoire cité plus haut.

Schur (*F.*). — Sur la surface tétraédrale symétrique du quatrième ordre. (1-7).

Propriétés diverses des 48 droites situées sur cette surface; solution complète du problème :

« Combien de fois arrive-t-il que ces droites appartiennent par groupes de huit (ou de douze) à une surface du deuxième (ou du troisième) ordre. »

Deruyts (*J.*). — Sur l'analyse combinatoire des déterminants. (1-11).

Soient Φx une fonction ayant une valeur entière pour $x = 1, 2, \ldots, n$, φx le résidu positif de Φx par rapport à n, ou n si Φx est un multiple de n. Une rangée $a_1 a_2 \ldots a_n$ d'éléments dans un déterminant est soumise à la transformation Φ si l'on y remplace a_i par φ_i. L'auteur trouve diverses propriétés des déterminants soumis à une ou plusieurs transformations de ce genre.

Vanecek (*J.-S.*). — Sur les réseaux de surfaces du second ordre. (1-8).

Recherches sur les réseaux de quadriques qui sont une extension à ces figures du travail antérieur de l'auteur (*Mémoires de Liège*, t. X; 1883).

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°. t. XXXVII. Bruxelles, F. Hayez, janvier 1886 (1).

Neuberg (*J.*). — Mémoire sur le tétraèdre. (1-72).

Analysé comme supplément au Volume V de *Mathesis*, 1885, dans le *Bulletin*.

(1) Voir *Bulletin*, XI_2, p. 223.

Tome XXVIII, octobre 1886.

Ne contient aucun travail mathématique.

Tome XXIX, novembre 1886.

Monchamps. — Histoire du Cartésianisme en Belgique. (1-643).

Ouvrage très important pour l'histoire des doctrines philosophiques de Descartes, où l'on rencontre çà et là quelques renseignements sur des mathématiciens (Sluse, Huygens, etc.).

MÉMOIRES couronnés et Mémoires des Savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Bruxelles, F. Hayez (¹).

Tome XLVII; 1886.

Lagrange (*Ch.*). — Démonstration élémentaire de la loi suprême de Wronski. (1-8).

Voir, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique,* 3ᵉ série, t. VIII, p. 165-172, un résumé et une simplification de la démonstration de M. Ch. Lagrange. La démonstration publiée par le même auteur dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (9 juin 1884) est plus simple encore et tout à fait équivalente.

De Ruyts (*J.*). — Sur certains développements en série. (1-18).

L'objet de ce Mémoire a été analysé en 1885, en même temps que les Rapports de MM. Catalan et Mansion, publiés dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique,* 3ᵉ série, t. IX, p. 523-525, 525-528.

Cesaro (*E.*). — Sur l'étude des événements arithmétiques. (1-13).

Voir *Bulletins de l'Académie de Belgique,* 3ᵉ série, t. XI, p. 139-145.

Tome XLVIII; 1886.

Lagrange (*Ch.*). — Développement des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes à l'aide d'autres fonc-

---

(¹) Voir *Bulletin*, X_2, p. 228-231.

tions de ces mêmes variables. Dérivées des fonctions de fonctions. (1-16).

Extension de la *Loi suprême* au cas de plusieurs variables. Le procédé de détermination du reste est celui que Cauchy a employé pour le théorème de Taylor, pour passer du cas d'une variable au cas de plusieurs. Mais la détermination des coefficients se fait par une méthode qui est propre à l'auteur et qui est l'extension de celle dont il s'est servi dans son premier Mémoire. *Voir* le Rapport de M. Mansion, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. VIII, p. 317-322.

Deruyts (*J.*). — Sur une classe de polynômes conjugués. (1-20).

Voir l'analyse du Rapport de M. Le Paige (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. XII, p. 12-15).

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, F. Hayez. In-4° (2).

Tome XLVI; 1886.

Catalan (*E.*). — Quelques théorèmes d'Arithmétique. (1-16).

Nombreux théorèmes analogues à celui de Lionnet : « Si n est un nombre premier supérieur à $p+1$, $S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$ est divisible par n. Quelques autres se rapportent à la décomposition de divers nombres en carrés. Ainsi

$$(a^2+c^2)^2p^2 + 2[(a^2+b^2+c^2)c^2 - a^2b^2]pq + (b^2+c^2)q^2$$

est la somme de quatre carrés si pq est un carré; de deux carrés, si, en outre, $a^2+b^2+c^2$ est un carré. »

Catalan (*E.*). — Problèmes et théorèmes de probabilités. (1-16).

Application du principe suivant : « La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues. »

Hirn (*G.-A.*). — Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température. (1-217, 3 Planches).

Voir *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. IX, p. 40-71, 1885,

---

(2) Voir *Bulletin*, XI$_2$, p. 225.

une analyse critique de ce Mémoire par MM. Folie, Melsens et Van der Mensbrugghe. Il fait suite à un Mémoire analysé antérieurement dans le *Bulletin*.

Catalan (*E.*). — Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce et sur une suite de nombres entiers. (1-22).

L'auteur trouve, en employant les notations de Legendre [F(*c*) pour K, *c* pour *k*, $b = 1 - 2x$ pour k'],

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty P_n\left(\frac{1-b}{16}\right)^n = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty Q_n x^n = \sum_0^\infty x^n \int_1^\infty \frac{X_n\,dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}},$$

et l'on a

$$P_n = 8^n Q_n, \qquad P_0 = 1, \qquad P_1 = 8,$$

$$n^2 P_n - 8(3n^2 - 3n + 1)P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0.$$

Les nombres Q_n sont entiers; X_n désigne le polynôme de Legendre. L'auteur fait connaître maintes propriétés des nombres P_n, Q_n.

Catalan (*E.*). — Sur les fonctions X_n de Legendre. Troisième Mémoire. (1-28).

Complément des recherches analysées antérieurement dans le *Bulletin*.

Catalan (*E.*). — Sur quelques intégrales définies. (1-24).

Étude de diverses intégrales apparentées aux fonctions X_n, les suivantes, par exemple,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n\sqrt{x^2-a^2}}, \qquad \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\omega\,d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^n}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-2}\omega\,d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^n}.$$

Développements divers en série.

Hirn (*G.*). — La cinétique moderne et le dynamisme de l'avenir. Réponses à diverses critiques faites par M. Clausius aux conclusions de mes travaux précédents. (1-82, 2 Planches).

Essai de réplique à la réponse de Clausius (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. XI, p. 173-193). D'après M. Folie (*ibid.*, t. XII, p. 5-9), la théorie cinétique des gaz attaquée par M. Hirn n'est pas celle de Clausius.

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion*, professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg*, professeur à l'Université de Liège. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars (¹).

Tome VI; 1886.

Neuberg (*J.*). — Sur le point de Tarry. (5-7).

Cet article se rattache étroitement à la question suivante, traitée pages 208-212 du tome V de *Mathesis* :

« Trouver dans le plan d'un triangle ABC le lieu d'un point M tel que les perpendiculaires menées par A, B, C, respectivement sur les droites MB, MC, MA, se coupent en un même point M'. »

1. Les lieux des points M et M' ont pour équations en coordonnées normales

$$(1)\qquad \frac{\cos B \sin C}{\alpha} + \frac{\cos C \sin A}{\beta} + \frac{\cos A \sin B}{\gamma} = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{\sin B \cos C}{\alpha} + \frac{\sin C \cos A}{\beta} + \frac{\sin A \cos B}{\gamma} = 0.$$

Ce sont des coniques passant par A, B, C et, respectivement, par les points de rencontre des hauteurs AH, BH, CH avec les perpendiculaires menées sur AB, BC, CA par B, C, A, ou sur AC, CB, BA par C, B, A.

2. Les équations (1) et (2) donnent, par addition et par soustraction,

$$(3)\qquad \frac{\sin A}{\alpha} + \frac{\sin B}{\beta} + \frac{\sin C}{\gamma} = 0,$$

$$(4)\qquad \frac{\sin(B - C)}{\alpha} + \frac{\sin(C - A)}{\beta} + \frac{\sin(A - B)}{\gamma} = 0,$$

équations du cercle ABC et de l'*hyperbole de Kiepert*.

Les quatre courbes (1), (2), (3), (4) se coupent en un même point N, appelé *point de Tarry*. Ce point N jouit de la propriété que les perpendiculaires menées sur NA, NB, NC, respectivement, par A, B, C ou par B, C, A, ou par C, A, B, concourent en trois points R, R', R''.

R est à l'intersection du cercle ABC avec l'ellipse de Steiner. C'est le point commun aux trois cercles osculateurs à cette ellipse en A, B, C. Pour cette raison, R est le *point de Steiner* du triangle ABC.

Le triangle RR'R'' est inscrit à l'ellipse de Steiner et a même centre de gravité que ABC. Des points R', R'' on voit les côtés *a*, *b*, *c* sous les angles B, C,

---

(¹) Voir *Bulletin*. Ce Recueil paraît en livraisons mensuelles de 24 pages, parfois avec suppléments. Prix : 7^{fr},50 pour la Belgique; 9^{fr} pour l'Union postale.

A ou C, A, B, ce qui établit un rapprochement curieux entre ces points et les points de Brocard.

3. Menons par un point quelconque M des perpendiculaires sur BC, CA, AB, et soient A_1, B_1, C_1 leurs intersections avec ces côtés; soient aussi A_2, B_2, C_2 les intersections de MA_1, MB_1, MC_1 avec b, c, a, et A_3, B_3, C_3 les intersections avec c, a, b. On a (S étant un signe sommatoire)

$$2\,A_1B_1C_1 = S\,\beta\gamma \sin A,$$
$$2\,A_2B_2C_2 \cos A \cos B \cos C = S\,\beta\gamma \cos B \sin C,$$
$$2\,A_3B_3C_3 \cos A \cos B \cos C = S\,\beta\gamma \sin B \cos C.$$

De là résultent des théorèmes assez curieux. Ainsi :

« 1° Les coniques (1) et (2) sont les lieux des points tels que les points A_2, B_2, C_2 ou les points A_3, B_3, C_3 soient en ligne droite.

» 2° Si le point M se meut sur la circonférence ABC ou sur l'hyperbole de Kiepert, les triangles $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ ont même aire, en valeur absolue.

» 3° Si le point M se meut sur une conique passant par les points A, B, C, N, il existe un rapport constant entre les aires de deux quelconques des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$.

» 4° Les perpendiculaires abaissées du point de Tarry sur les côtés de ABC rencontrent ceux-ci en neuf points qui sont répartis sur trois droites $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. »

Realis (S.). — Sur quelques relations nouvelles entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. (7-12).

On trouve les relations

$$\operatorname{Ch} x < e^{\frac{x^2}{2}} < \operatorname{séc} x, \qquad \frac{\operatorname{Sh} x}{x} < e^{\frac{x^2}{6}} < \frac{x}{\sin x}$$

par la considération du développement, en produit infini, des fonctions considérées.

Barbarin. — Axes des sections planes des surfaces du second ordre. (25-31, 49-53).

Cesaro (E.). — Sur une condition définissant des familles de courbes. (53-54).

1. Les courbes telles que

$$(\textstyle\int P\,dx)^2 + (\int P\,dy)^2 = Q^2,$$

P et Q étant des fonctions de l'arc s, ont pour rayon de courbure

$$\rho = \frac{PQ\sqrt{P^2 - Q'^2}}{P(P^2 - Q'^2) + Q(P'Q' - PQ'')},$$

les dérivées étant prises par rapport à s. 2. Les spirales logarithmiques sont

les seules lignes telles que si un point les parcourt, sa distance au centre de gravité du chemin parcouru varie proportionnellement à la longueur de ce même chemin.

Lemoine et *Neuberg*. — Note sur la géométrie du triangle. (55-59, 73-75).

Contributions à la Géométrie récente (points de Lemoine, de Brocard, de Tarry, hyperbole de Kiepert, etc.).

Novarese (*H.*). — Sur une propriété du paraboloïde hyperbolique. (75-76).

Parmi les segments des génératrices d'un système, qui sont compris entre deux génératrices de l'autre système, le segment qui appartient à la génératrice passant par le sommet a une longueur minimum.

D'Ocagne. — Sur un problème de limite. (76-79).

Mansion (*P.*). — Principe fondamental de la théorie des fractions continues périodiques. (80-84).

Tarry (*G.*). — Sur les figures semblables associées. (97-100, 148-151, 196-203).

Les propriétés du triangle relatives aux points et au cercle de Brocard peuvent être déduites de la théorie générale d'un système de trois figures directement semblables (*Mathesis*, t. II, p. 73). L'auteur, en considérant un nombre quelconque de figures semblables, étend à certains polygones, dits *polygones harmoniques*, maintes propriétés du triangle. Voici quelques-uns des nouveaux théorèmes de M. Tarry. 1. Dans n figures associées (c'est-à-dire des figures directement semblables renfermant deux groupes de n droites concourant respectivement en deux points), le polygone formé par n droites homologues quelconques est perspectif avec le polygone qui a pour sommets les centres de similitude. 2. Une ligne harmonique (c'est-à-dire, une ligne $A_1 A_1 \ldots A_{n+1}$, inscrite dans une circonférence, telle que les droites $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_n A_{n+1}$, soient homologues dans n figures associées) peut se transformer en une ligne régulière, par inversion.

Habich (*E.*). — Sur une question de roulettes. (103-106).

La ligne sur laquelle il faut faire rouler un cercle pour qu'un point quelconque de son plan décrive une droite est la courbe de Delaunay (*Journal de Liouville*, t. VI, p. 309; 1841). Recherche, par un procédé élémentaire, de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de révolution soit à courbure moyenne constante.

Mansion (*P.*). — Longueur de la boucle de la logocyclique ou strophoïde. (108-110).

Halsted. — Théorèmes de Descartes et d'Euler. (121-122).

Lazzeri et *Habich.* — Division d'un angle en parties égales. (122-123).

Construction d'une courbe servant à la division d'un angle en n parties égales; pour $n = \infty$, elle devient la quadratrice de Dinostrate.

Fauquembergue (*E.*). — Détermination du nombre maximum de sphères égales qui peuvent toucher à la fois une autre sphère de même rayon. (124-125).

L'auteur établit seulement que le nombre des sphères est au moins égal à douze.

Cesaro (*E.*). — Source d'identités. (126-131).

Posons

$$\omega_i = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^i), \qquad \lambda_{n,i} = \frac{\omega_n}{\omega_i\,\omega_{n-i}},$$

$$F_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^nx), \qquad F_n(x)\,G_n(x) = 1.$$

On aura

$$F_n(x) = 1 - \lambda_{n,1}qx + \lambda_{n,2}q^3x^2 - \ldots \pm \lambda_{n,n}q^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n,$$
$$G_n(x) = 1 + \lambda_{n,1}qx + \lambda_{n+1,2}q^2x^2 + \lambda_{n+2,3}q^3x^3 + \ldots,$$

conséquences nombreuses dans la théorie des séries elliptiques.

Seelhof. — Un nouveau nombre parfait. (100-101, 178).

Lucas (*Ed.*). — Sur les nombres parfaits. (145-148).

Stern (*A.*). — Sur les nombres parfaits. (248-250).

Liste des nombres parfaits anciennement connus. Le nombre $2^{60}(2^{61}-1)$ est un nombre parfait. Tous les nombres parfaits pairs sont donnés par la règle d'Euclide. On n'a pas démontré qu'il n'y a pas de nombres parfaits impairs : un nombre parfait impair, s'il existe, est de la forme $a^{4p+1}b^{2q}c^{2r}\ldots$. Autres théorèmes sur les nombres parfaits.

Bergmans (*C.*). — Théorèmes sur la parabole. (169-172).

Cesaro (*E.*). — Remarques sur une formule de Newton. (172-174).

Soient c_i, s_i les sommes des produits i à i et des puissances $i^{\text{èmes}}$ des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on a

$$dc_i = c_{i-1}\,ds_1 - \frac{1}{2}c_{i-2}\,ds_2 + \frac{1}{3}c_{i-3}\,ds_3 + \ldots \pm \frac{1}{i}\,ds_i.$$

formule d'où l'on déduit maintes généralisations des théorèmes de Newton sur les fonctions symétriques.

Gelin (E.). — Sur les combinaisons avec répétition. (175-178).

Cesaro (E.). — Théorème d'Algèbre. (193-195).

Si $fx = 0$ est une équation algébrique dont les racines sont réelles,

$$f_1 x = fx + af'x = 0$$

a aussi ses racines réelles, quand a est réel. Il en est de même pour

$$f_2 x = f_1 x + b f_1' x = 0, \qquad f_3 x = f_2 x + c f_2' x, \qquad \ldots,$$

b, c, ..., étant aussi réelles. Applications diverses.

Baker (M.). — Aire du triangle. (203-205).

Nouvelles formules.

Dewulf (E.). — Tangente et foyer de la focale de Quetelet. (217-218).

Neuberg (J.). — Note sur la strophoïde. (219-223).

Tangente, normale, rayon de courbure de cette courbe, obtenus par divers procédés.

Gilbert (Ph.). — Sur quelques théorèmes de Sluse. (241-244).

Massau. — Généralisation du premier théorème de Sluse. (245-273).

Le Paige. — Sur le théorème de Sluse. (273).

Si l'on fait tourner la cissoïde ordinaire, ou cissoïde du cercle, autour de son asymptote, le solide engendré est égal au volume du tore engendré par la révolution du cercle générateur autour de la même droite. M. Gilbert démontre ce joli théorème par le Calcul intégral, M. Le Paige au moyen du théorème de Guldin (procédé de Sluse). M. Massau montre qu'il est vrai pour la cissoïde d'une courbe quelconque et qu'il existe un théorème analogue pour le moment d'inertie d'une cissoïdale du second degré. Autres théorèmes de Sluse, généralisés par M. Gilbert.

De Longchamps (G.). — Sur la potentielle triangulaire. (246-248).

Étude sur la courbe qui a pour équations en coordonnées barycentriques

$$x : y : z = a^p : b^p : c^p,$$

a, b, c étant les trois côtés d'un triangle.

Mansion (*P.*). — Principes généraux de la théorie des limites. (265-272).

Bibliographie; biographie; variétés; questions proposées; questions résolues; questions d'examen; Notes mathématiques. (Passim).

Suppléments.

Mansion (*P.*). — Comptes rendus du « Traité d'Arithmétique élémentaire, du Précis d'Arithmétique et du Recueil de problèmes d'Arithmétique » de M. l'abbé *Gelin*. (8 pages).

Extrait de la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, t. XXIX, p. 38-45; 1886.

Mansion (*P.*). — Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. (40 pages).

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2ᵉ Partie, p. 1-40; 9ᵉ année, 1885.

Lemoine (*Ém.*). — Propriétés relatives à deux points du plan d'un triangle qui se déduisent d'un point quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine. (27 pages).

Extrait du *Congrès de Grenoble* (1885) de l'Association française pour l'avancement des Sciences.

Outre le sujet indiqué dans le titre, l'auteur traite en huit pages substantielles, l'histoire de la Géométrie récente du triangle.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CV; 1887 [1].

Humbert (*G.*). — Sur le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes. (54-55).

---

[1] Voir *Bulletin*, XI_2, p. 170.

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A et B de classe n est une courbe telle que, si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de A et aux n foyers réels de B, les deux systèmes obtenus aient même orientation.

Si les deux courbes A et B ont des foyers à l'infini, le lieu des foyers des courbes du faisceau peut être défini comme le lieu des points d'où l'on voit un certain nombre de segments rectilignes sous des angles dont la somme est constante, et réciproquement.

On retrouve ainsi des courbes étudiées par M. Darboux.

Appell. — Sur les invariants des équations différentielles. (55-58).

Dans une Note publiée à la fin du Volume précédent des *Comptes rendus*, l'auteur indiquait la possibilité d'étendre la théorie des invariants des équations différentielles linéaires et homogènes aux équations *homogènes*, mais non *linéaires*. Il compare ses résultats avec ceux qu'a obtenus antérieurement M. R. Liouville (même Recueil, t. CIII) et montre que les cas d'intégrabilité signalés par M. R. Liouville sont ceux où l'équation

$$\frac{dv}{dx} = \alpha v^3 + \beta v^2 + \gamma v + \delta$$

peut être transformée en une autre de même forme à coefficients constants.

M. Appell donne ensuite le moyen de trouver les invariants de l'équation particulière

$$y^{n-1}y'' = a_0 y'^n + a_1 y'^{n-1} y + \ldots + a_n y^n,$$

relatifs tant au changement de variable qu'au changement de fonction de la forme

$$v = v_1 \varphi(x) + \psi(x).$$

Ce sont les coefficients J de l'équation ramenée à la forme réduite

$$\frac{dw}{d\xi} = w^n + J_2 w^{n-2} + J_3 w^{n-3} + \ldots + J_{n-2} w^2 + J_n,$$

où w^n a pour coefficient l'unité et où les termes en w^{n-1} et w manquent. Si ces invariants sont des constantes ou s'ils sont de la forme

$$J_p = k_p \xi^{\frac{p}{1-n}},$$

l'équation proposée est réductible à une autre du même type, mais à coefficients constants, qui admet des intégrales particulières de la forme e^{rx}.

Painlevé. — Sur les équations différentielles linéaires. (58-61).

Rappelant les résultats de sa précédente Communication (t. CIV), l'auteur prouve qu'on peut toujours vérifier si l'intégrale de l'équation

$$y''' + b y' + c y = 0$$

est algébrique, ou ramener l'équation à une quadrature. Il montre que sa méthode s'applique à une équation linéaire d'ordre quelconque. Elle convient

aussi à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles où les dérivées r, s, t d'une fonction z sont trois expressions linéaires et homogènes relativement à z, p et q. La recherche des cas où leur intégrale est algébrique rentre dans le problème plus général de la transformation de ces systèmes.

Robin (*G.*). — Sur les explosions au sein des liquides. (61-64).

Au début de sa Note, l'auteur pose sans démonstration ce principe nouveau qui contient toute la théorie des percussions :

Étant donné un système actionné par des percussions connues P, si l'on désigne par p l'excès géométrique de la vitesse du point de masse m, après la percussion, sur sa vitesse avant la percussion, la quantité

$$\frac{1}{2}\Sigma mp^2 - \Sigma P_p \cos(P, p)$$

doit être un minimum.

C'est ce principe que M. Robin emploie pour résoudre le problème suivant :

« Un liquide, homogène et de densité μ, limité par des surfaces libres et des parois fixes, est en repos. Dans ce liquide plonge ou flotte un solide libre. Une sphère de rayon infiniment petit R éclate au sein du liquide avec une intensité de percussion $\frac{\mu m}{R}$ uniforme en tous les points de sa surface. On demande : 1° la vitesse (u, v, w, p, q, r) imprimée au corps solide par l'explosion; 2° la percussion en tout point du liquide. »

La théorie générale que l'auteur résume a été appliquée par lui à l'ellipsoïde et au disque elliptique flottants. Dans le cas particulier d'une sphère libre, à demi immergée dans un liquide pesant qui remplit la moitié de l'espace, quand le centre d'explosion se trouve sur la verticale passant par le centre de la sphère, on a cette proposition remarquable : La sphère est soulevée avec une vitesse qui varie en raison inverse du carré de la profondeur du centre d'explosion, mais *qui ne dépend pas du rayon de la sphère immergée.*

Réveille. — Détermination des éléments de courbure de la surface décrite par un point quelconque d'un solide invariable, dont quatre points donnés décrivent des surfaces dont les éléments de courbure sont donnés. (159-163).

Darboux. — Sur les équations linéaires à deux variables indépendantes. (199-201).

Étant donnée une équation à deux variables indépendantes, linéaire et du second ordre, dont on connaît l'intégrale générale, l'auteur enseigne à former au moyen de cette intégrale générale et de diverses solutions particulières quelconques, linéairement indépendantes, une fonction Z qui satisfera, elle aussi, à une équation linéaire du second ordre, dont elle sera l'intégrale générale. En conséquence, on peut déduire de chaque équation linéaire du second ordre, dont on possède l'intégrale générale, une infinité d'autres équations de même forme, contenant autant de fonctions arbitraires qu'on voudra, et dont l'intégrale générale sera connue.

Autonne. — Sur les groupes cubiques Cremona d'ordre fini. (267-270).

Il s'agit des groupes (déjà étudiés par l'auteur) formés de substitutions birationnelles

$$\left| z_i, \quad \varphi_i\binom{n}{z} \right|, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où n est un des trois premiers nombres entiers. Si $n = 3$, toutes les cubiques du réseau $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, où u_i est une constante arbitraire, ont un même point double fixe, ou *pôle*. Le groupe est *monopolaire* si toutes les substitutions du groupe ont même pôle.

Tout groupe cubique Cremona monopolaire est composé de substitutions *tautopolaires* de la forme

$$R = \begin{vmatrix} z_1, & (p_{11}z_1 + p_{12}z_2)(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_2, & (p_{21}z_1 + p_{22}z_2)(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_3, & A_{n-1}z_3 + A_n \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2 \text{ ou } 3),$$

où les p sont des constantes arbitraires de déterminant différent de zéro, les a et A des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice et identiquement nulles pour un indice négatif.

Tout groupe tautopolaire G dérivé des substitutions R, où n est un entier positif quelconque, est isomorphe au groupe Σ dérivé des substitutions linéaires binaires

$$\begin{vmatrix} z_1, & p_{11}z_1 + p_{12}z_2 \\ z_2, & p_{21}z_1 + p_{22}z_2 \end{vmatrix},$$

et à a substitutions-unité de Σ correspond dans G le groupe normal Γ dérivé des substitutions *normales*

$$\begin{vmatrix} z_1, & z_1(b_{n-2}z_3 + b_{n-1}) \\ z_2, & z_2(b_{n-2}z_3 + b_{n-1}) \\ z_3, & B_{n-1}z_3 + B_n \end{vmatrix},$$

où b, B désignent des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice.

Tous les groupes normaux et d'ordre fini appartiennent à quatre types dérivés de substitutions que l'auteur fait connaître.

Bertrand (*J.*). — Calcul des probabilités. Solution d'un problème. (369).

Deux candidats A et B sont soumis à un scrutin de ballottage. Le nombre des votants est μ; A obtient m suffrages et est élu, B en obtient $\mu - m$. Quelle est la probabilité pour que, pendant le dépouillement, le nombre des voix de A ne cesse jamais de surpasser celles de B?

Réponse : $\dfrac{2m - \mu}{\mu}$.

Bertrand (*J.*). — Formule nouvelle pour représenter la tension maxima de la vapeur d'eau. (390-394).

Les données de l'expérience ont conduit M. Bertrand à l'équation

$$\frac{pv}{\mathrm{T}+127} = 2{,}47$$

entre la pression, le volume spécifique et la température de la vapeur d'eau aux environs de la saturation. Dès lors la formule de Clapeyron,

$$r = \mathrm{AT}v\frac{dp}{d\mathrm{T}},$$

où la chaleur d'évaporation r est fournie très exactement par la formule

$$r = 800 - 0{,}705\,\mathrm{T},$$

donne, par une intégration très facile, cette expression de la tension maxima

$$p = \mathrm{G}\,\frac{\mathrm{T}^{72{,}623}}{(\mathrm{T}+126{,}37)^{\text{[illegible]}}} \qquad (\log \mathrm{G} = 34{,}21083).$$

Barbier. — Généralisation du problème résolu par M. J. Bertrand. (407).

Kœnigs. — Recherches sur les surfaces par chaque point desquelles passent deux ou plusieurs coniques tracées sur la surface. (407-409).

Chaque fois qu'une surface admet deux systèmes *simples* de génératrices du second degré (c'est-à-dire est telle que par un point il ne passe qu'une conique de chaque système), cette surface est un cas particulier ou un cas limite d'une surface du huitième ordre, dont les coordonnées ponctuelles x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles à quatre polynômes de la forme

$$f_i(\lambda,\mu) = (a_i\lambda^2 + b_i\lambda + c_i)\mu^2 + (a_i'\lambda^2 + b_i'\lambda + c_i')\mu + a_i''\lambda^2 + b_i''\lambda + c_i'',$$

où λ, μ sont deux paramètres. On peut disposer des a_i, b_i, c_i de manière que les coniques se réduisent à des cercles.

Cette surface remarquable, qui est représentable sur le plan, comprend une foule de surfaces bien connues : les quadriques, la surface de Steiner, les surfaces cubiques, les surfaces du quatrième ordre à conique double, etc. M. Kœnigs en donne une définition géométrique qui la rattache d'une autre façon aux surfaces du quatrième ordre à conique double.

Combescure. — Sur l'application des surfaces. (434-435).

Le problème de l'application des surfaces peut, par un choix particulier des variables, se ramener à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et à deux variables indépendantes, dans laquelle les dérivées du second ordre entrent sous forme linéaire seulement.

Barbier. — Théorème relatif au jeu de loto. (435).

André (*D.*). — Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. (436-437).

Bertrand (*J.*). — Observations sur deux Notes précédentes. (437-439).

A propos de ces deux Notes, M. Bertrand se pose et résout le problème suivant :

« Un joueur expose à un jeu de hasard la $n^{\text{ième}}$ partie de sa fortune et renouvelle l'épreuve indéfiniment. Quelle est la probabilité pour qu'il se ruine et que la $(2\mu+n)^{\text{ième}}$ partie lui enlève son dernier écu? »

Réponse : $\dfrac{n}{2\mu+n}\,\dfrac{\Gamma(2\mu+n+1)}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\mu+1)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\mu+n}$ ou sensiblement, pour les grandes valeurs de μ,

$$\frac{n}{(2\mu+n)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}(2\mu+n)}}.$$

Liouville (*R.*). — Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre et sur les formations invariantes qui s'y rapportent. (460-463).

Dans une Communication précédente, l'auteur a montré comment l'équation du premier ordre

$$(1)\qquad y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0$$

peut se ramener aux quadratures s'il existe entre ses coefficients et leurs dérivées certaines relations; à ce sujet, il a signalé deux invariants de l'équation (1), s_3, s_5 (de poids 3 et 5) pour les transformations

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{dx} = f(x), \qquad y = y_1\,\varphi(x).$$

Ces deux invariants doivent aussi être invariants de l'équation du second ordre

$$(3)\qquad Y'' + a_1 Y'^3 + 3a_2 Y'^2 + 3a_3 Y' + a_4 = 0,$$

pour les transformations

$$(4)\qquad \frac{dx_1}{dx} = F(x), \qquad Y = Y_1 + \Phi(x).$$

Or, si l'on pose, en général,

$$s_{2m+1} = a_1 s'_{2m-1} - (2m-1)\,s_{2m-1}\,[a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)],$$

les expressions s_7, s_9, ... jouissent aussi de la propriété d'invariance à l'égard des substitutions (4) et leur poids est égal à leur indice.

Cette série d'invariants donne un moyen commode de traiter les questions relatives à l'équation (1), par exemple celle-ci :

Trouver les conditions que doivent remplir les coefficients de l'équation (1) our qu'elle soit réductible à la forme

$$(5) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} + y_1^3 + k x y_1^2 = 0,$$

k étant une constante. La réduction ayant lieu, l'équation (5) se ramène à cette autre

$$4X'' + 3k(2Y + h)X = 0,$$

dont l'intégrale a été donnée par Jacobi et par Kummer.

Port. — Sur la résolution, dans un cas particulier, des équations normales auxquelles conduit la méthode des moindres carrés. (491-494).

Delauney. — Sur les distances des planètes au Soleil et sur les distances des comètes périodiques. (515-516).

Si l'on prend pour unité la distance de la Terre au Soleil, les distances des planètes au Soleil peuvent être représentées par la formule

$$D = 0{,}003268 \times 86^{1{,}669 n},$$

dans laquelle on donne à n successivement les valeurs de 1, 2, 3, ...

Les distances moyennes des dix comètes périodiques connues au centre du Soleil peuvent être représentées par la formule

$$D = 1{,}894 \times 1{,}1511^{2n}.$$

Il existe une lacune correspondant à $n = 1$. Sept comètes doivent être considérées comme formant un même groupe analogue aux petites planètes.

Barbier. — Sur une généralisation de l'indicatrice de Ch. Dupin. (516-518).

Construction de l'intersection limite de deux surfaces infiniment près d'être tangentes :

Si ρ et ρ' sont les rayons vecteurs des deux indicatrices au point de contact, la courbe qui donne la forme limite de l'intersection est la conique

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2}.$$

Halphen. — Un théorème sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution allongé. (535-536).

Toute ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde de révolution allongé se projette sur le plan de l'équateur suivant une courbe qui peut être engendrée par une ellipse à centre fixe et roulant sur ce plan.

Si l'on appelle A, B, ($A > B$) les axes de l'ellipsoïde; C le rayon des parallèles tangents à la ligne géodésique; a, b, ($a > b$) les axes de l'ellipse roulante; h la distance de son centre au plan de roulement, on a

$$b^2 - h^2 = C^2, \qquad a^2 - h^2 = B^2, \qquad b^2 = \frac{A^2 C^2}{B^2}.$$

Halphen. — Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. (583-584).

Les tangentes de toute ligne géodésique d'une quadrique de révolution coupent chaque surface homofocale suivant deux courbes distinctes, égales entre elles et qui peuvent être ramenées l'une sur l'autre par une rotation autour de l'axe.

Chaque point de l'une des courbes a donc sur l'autre son homologue, ou plutôt une infinité d'homologues; car chacune de ces courbes, comme la géodésique elle-même, se compose d'une infinité de branches égales disposées de la même manière autour de l'axe de révolution.

Voici le théorème de M. Halphen :

« Sur les deux courbes d'intersection d'une surface homofocale on prend deux points homologues y, y'. En chacun d'eux passe une tangente à la géodésique. Soient x, x' les points de contact; s, s' les arcs de géodésiques aboutissant à x, x' et comptés à partir de deux points fixes; m le nombre des points à l'infini qui séparent x et x'. La différence $s' - s$ et la somme $xy \pm (-1)^m x'y'$ diffèrent par une longueur constante (+ si la surface homofocale ne rencontre pas la géodésique, — dans le cas contraire). »

Lorsque la ligne géodésique se réduit à un méridien, cette proposition se confond avec des théorèmes bien connus sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole.

Boussinesq. — Sur la théorie des déversoirs en mince paroi et à nappe soit déprimée, soit soulevée, c'est-à-dire soumise à une pression constante plus petite ou plus grande que celle de l'atmosphère exercée au-dessus. (585-590).

Boussinesq. — Sur la théorie des déversoirs épais, ayant leur seuil horizontal et évasé ou non à l'entrée. (632-638).

Mathieu. — Sur un principe de l'électrodynamique. (659-661).

Quand un conducteur est traversé par des courants permanents qui entrent par une électrode et sortent par une autre, sa surface se recouvre d'une double couche d'électricité, dont l'action, jointe à celle des deux électrodes, produit la force électromotrice sur les points intérieurs au conducteur, tandis que l'action totale de cette couche et des électrodes est nulle à l'extérieur.

Boussinesq. — Sur une forme de déversoir en mince paroi, analogue à l'ajutage rentrant de Borda, pour laquelle le relèvement

de la face inférieure de la nappe liquide, à la sortie du déversoir, peut être déterminé théoriquement. (697-702).

Humbert. — Sur quelques propriétés des surfaces coniques. (739-741).

L'auteur introduit dans la théorie des cônes deux éléments nouveaux, l'*axe d'orientation* et le *module,* qui jouent par rapport au cône le même rôle que la bissectrice et l'angle par rapport au système de deux droites.

Pour un cône du second degré, l'axe d'orientation est l'axe de symétrie intérieur, le module est le produit $2\pi \sin\alpha \sin\beta$, si l'on appelle α et β les deux angles principaux des génératrices avec cet axe.

Pour un cône de degré quelconque, $f(x, y, z) = 0$, ces deux éléments seront définis de la manière suivante. Si l'on pose

$$\lambda = \int \frac{z\,dy - y\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \mu = \int \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \nu = \int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

les trois intégrales étant étendues à toute la surface réelle, le *plan d'orientation* du cône aura pour équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0;$$

l'axe d'orientation sera la normale élevée à ce plan par le sommet du cône; le module sera la quantité

$$\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

La propriété fondamentale de la théorie développée par M. Humbert consiste en ce que la différence des deux aires que le cône découpe sur une sphère de rayon R est égale à $2\rho R d$, d étant la distance du centre de la sphère au plan d'orientation du cône mené par le sommet

Les surfaces développables jouissent d'une propriété analogue.

Guccia. — Théorème sur les points singuliers des surfaces algébriques. (741-743).

Le nombre des conditions simples auxquelles équivaut, pour une surface algébrique, la condition de posséder en un point donné une singularité donnée est égal à l'abaissement que cette singularité produit dans le nombre des points d'intersection de trois surfaces quelconques qui la possèdent, diminué de l'abaissement produit dans le genre de la courbe gauche commune à deux de ces surfaces et augmenté de l'abaissement produit dans le genre de l'une d'elles.

Goursat. — Sur la théorie des surfaces minima. (743-746).

On sait qu'à une courbe minima donnée correspond une surface minima réelle, parfaitement déterminée. Quand on fait subir à cette courbe un déplacement réel, la surface minima réelle correspondante éprouve le même déplacement; mais, si l'on fait subir à la courbe minima un déplacement imaginaire, on obtient des surfaces minima différentes de la première, dont les relations avec celle-ci sont étudiées par M. Goursat.

Désignant par x, y, z les coordonnées d'un point de la surface minima donnée S, par x_0, y_0, z_0 celles d'un point de son adjointe S_0, l'auteur, en partant des formules de M. Weierstrass, obtient les expressions suivantes des coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point de la surface S_1 obtenue par une rotation imaginaire de S autour d'un axe réel :

$$x_1 = x \cos h\varphi + y_0 \sin h\varphi,$$
$$y_1 = y \cos h\varphi - x_0 \sin h\varphi,$$
$$z_1 = z,$$

où φ est un paramètre réel. Connaissant S et S_0, ces formules permettent de construire S_1. Parmi les nombreuses applications dont elles sont susceptibles, M. Goursat signale la suivante : Quand une surface minima possède une ligne de courbure plane ou une ligne asymptotique hélicoïdale, les deux nappes situées de part et d'autre de cette ligne se déduisent l'une de l'autre au moyen d'une transformation de la nature précédente, suivie dans le premier cas d'une transformation par symétrie.

Les formules ci-dessus peuvent être remplacées par des relations différentielles où ne figurent plus les coordonnées de la surface adjointe S_0. En appelant α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs des normales à S et à S_1; ds, ds_1 les éléments linéaires de ces deux surfaces, on a

$$dx_1 = (\cos h\varphi + \gamma \sin h\varphi)\, dx - \alpha \sin h\varphi\, dz,$$
$$dy_1 = (\cos h\varphi + \gamma \sin h\varphi)\, dy - \beta \sin h\varphi\, dz,$$
$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma \cos h\varphi + \sin h\varphi} = \frac{\pm 1}{\cos h\varphi + \gamma \sin h\varphi},$$
$$d\alpha_1\, dx_1 + d\beta_1\, dy_1 + d\gamma_1\, dz_1 = \pm (d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz),$$
$$ds_1 = (\cos h\varphi + \gamma \sin h\varphi)\, ds.$$

De ces relations on déduit facilement les propriétés les plus simples de la surface S_1, propriétés qu'on peut d'ailleurs établir au moyen de la représentation sphérique.

Floquet. — Sur le mouvement d'une surface autour d'un point fixe. (746-749).

On considère une surface d'ordre m mobile autour d'un point fixe O et un plan fixe. Soit M l'un des pôles de ce plan par rapport à la surface, dont on se donne la position initiale. M. Floquet étudie le mouvement ultérieur de cette surface, défini par cette condition que la rotation instantanée OI soit à chaque instant dirigée vers le pôle M et soit fonction de la distance OM.

Duhem. — Sur l'aimantation par influence. (749-751).

L'auteur propose une nouvelle théorie du magnétisme, fondée sur le principe suivant :

Dans toute modification qui déplace les uns par rapport aux autres les divers corps qui constituent un système sans changer leur état, le travail effectué par les actions mécaniques internes du système est la variation changée de signe d'un potentiel, et ce potentiel ne diffère du potentiel thermodynamique

interne que d'une quantité qui peut dépendre de l'état des divers corps, mais non de leur position.

Partant de là, M. Duhem arrive aux équations suivantes de l'équilibre magnétique

$$A = -h\,F(M)\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad B = -h\,F(M)\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad C = -h\,F(M)\frac{\partial V}{\partial z},$$

où M désigne l'aimantation en (x, y, z); A, B, C ses composantes; V la fonction potentielle magnétique; h une constante positive; F(M) une fonction de l'aimantation.

Ces équations avaient déjà été substituées par Kirchhoff à celles de Poisson, qu'on en déduit en remplaçant F(M) par une constante. Elles équivalent aux suivantes :

$$A = \lambda\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right),$$
$$B = \lambda\frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right),$$
$$C = \lambda\frac{\partial V}{\partial z}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right).$$

Ces dernières montrent que, lorsque l'expérience a déterminé la fonction λ, le problème de l'aimantation par influence se ramène à la détermination de V.

Bertrand. — Note sur une loi singulière de probabilité des erreurs. (779-780).

Painlevé. — Sur les transformations rationnelles des courbes algébriques. (792-794).

L'auteur étudie les substitutions rationnelles

$$x = \varphi(x', y'), \qquad y = \psi(x', y'),$$

qui transforment une courbe $f(x, y) = 0$, de genre p, en une autre courbe $F(x', y') = 0$, de genre $p' \geq p$, dont plusieurs points correspondent à chaque point de la première. Il arrive aux conclusions suivantes :

On peut toujours passer d'une courbe de genre zéro à une courbe de genre quelconque par une infinité de substitutions rationnelles; ces substitutions renferment une fonction rationnelle arbitraire du point (x', y') de la seconde courbe.

On ne peut, en général, passer d'une courbe de genre 1 à une courbe quelconque par une transformation rationnelle; si le fait est possible, il existe une infinité de substitutions rationnelles qui jouissent de la même propriété; elles dépendent au moins d'une constante et d'un entier arbitraires; elles peuvent renfermer plusieurs entiers arbitraires, mais ne sauraient dépendre d'un second paramètre.

Il ne peut exister qu'un nombre fini de substitutions rationnelles qui transforment une courbe algébrique de genre plus grand que l'unité en une courbe donnée.

Barbier. — On suppose écrite la suite naturelle des nombres; quel est le $(10^{1000})^{\text{ième}}$ chiffre écrit? (795-798).

Ce chiffre est un 3.

Duhem. — Sur l'aimantation par influence. (798-800).

La fonction potentielle magnétique V satisfait en tous les points d'un corps dénué de force coercitive à l'équation aux dérivées partielles

$$\left[1+4\pi\lambda\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)\right]\Delta V$$
$$+2\frac{\partial\lambda\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)}{\partial\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$
$$+4\frac{\partial\lambda\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)}{\partial\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)=0.$$

En tous les points de la surface elle vérifie l'équation

$$\left[1+4\pi\lambda\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)\right]\frac{\partial V}{\partial n_i}+\frac{\partial V}{\partial n_e}=0.$$

En tous les autres points, elle satisfait à des conditions qui sont les mêmes que dans la théorie de Poisson.

Toutes ces relations permettent de démontrer que, pour les corps magnétiques et diamagnétiques, le problème de l'aimantation par influence admet une solution et une seule, qui correspond à une distribution stable.

Une masse magnétique ou diamagnétique étant soumise à l'action d'aimants permanents et fixes, de la pesanteur et d'une pression extérieure normale et uniforme, s'il existe une position d'équilibre pour cette masse et si, de plus, l'aimantation demeure stable lorsqu'on maintient la masse dans cette position, l'équilibre de la masse est un équilibre instable.

Bertrand. — Sur un paradoxe analogue au problème de Saint-Pétersbourg. (831-833).

Autonne. — Sur une représentation géométrique dans l'espace des intégrales de l'équation $f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right)=0$. (850-854).

Toute crémonienne quadratique change une équation différentielle H en une autre H'; et si H' peut s'intégrer, H se trouve intégrée du coup. Il y a donc intérêt, au point de vue de l'intégration de H, à étudier la façon dont les crémoniennes quadratiques transforment H. Cette étude peut se faire à l'aide de la représentation géométrique suivante.

Soit l'équation

$$(\mathrm{H}) \qquad f(\xi, \eta, p) = 0, \qquad \left(p = \frac{d\eta}{d\xi}\right),$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\mathrm{F}(x, u) = \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0, \qquad \Sigma u_i x_i = 0.$$

Intégrer H, cela revient, d'après Clebsch, à répartir les ∞^2 éléments principaux du connexe $f = 0$ ou $\mathrm{F} = 0$, ∞ par ∞, en ∞ courbes intégrales, de façon que, le long d'une même courbe intégrale, on ait constamment entre deux éléments consécutifs

$$(\xi, \eta, p) \quad \text{et} \quad (\xi + d\xi, \eta + d\eta, p + dp)$$

ou

$$(x, u) \quad \text{et} \quad (x + dx, u + du),$$

la relation

$$d\eta - p\, d\xi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma u_i\, dx_i = 0.$$

Cela posé, soit (X, U) un élément principal formé par la droite U et le point X situé sur U, et soient u_i les coordonnées homogènes de U; p son coefficient angulaire; x_i les coordonnées homogènes de X; ξ et η ses coordonnées cartésiennes; z_i les coordonnées homogènes d'un point Z de l'espace; x, y, z ses coordonnées rectangulaires.

Si l'on établit entre ces éléments les relations

$$\gamma z_1 = x_1 u_3, \qquad \gamma z_2 = x_2 u_1, \qquad \gamma z_3 = x_2 u_2 - x_3 u_3, \qquad \gamma z_4 = x_2 u_3,$$

ou bien (en coordonnées non homogènes)

$$(1) \qquad x = \frac{\xi}{\eta}, \qquad y = \frac{p}{\eta - p\xi}, \qquad z = \frac{2\eta - p\xi}{\eta(\eta - p\xi)},$$

la connaissance de l'élément (X, U) entraîne celle du point Z sans ambiguïté et réciproquement.

Pour l'équation du premier ordre H, le connexe $f = 0$ ou $\mathrm{F} = 0$ se trouve représenté par une surface S. Sur S, les intégrales de H seront représentées par les courbes *intégrantes*

$$(2) \qquad dz + y\, dx - x\, dy = 0 \qquad \text{ou} \qquad z_2\, dz_1 - z_1\, dz_2 + z_3\, dz_4 - z_4\, dz_3 = 0.$$

L'intégration de (2) permet d'exprimer les coordonnées x, y, z d'un point d'une courbe intégrante à l'aide d'une seule variable t et d'une constante C; le système (1) donne alors $\xi = \lambda(t, \mathrm{C})$, $\eta = \mu(t, \mathrm{C})$ et l'élimination de t donne l'intégrale complète de H, $\psi(\xi, \eta, \mathrm{C}) = 0$.

Si S est un conoïde d'axe Oz, les courbes intégrantes sont les génératrices rectilignes.

Si S est une surface de révolution, ces courbes s'obtiennent par une quadrature.

Floquet. — Sur les propriétés de la surface $xyz = l^3$. (854-856).

La surface S dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $xyz = l^3$ roule sans glisser sur un plan fixe P situé à une distance h de l'origine O supposée fixe, et la rotation instantanée OI, dirigée à chaque instant vers le point de contact M, est proportionnelle à la longueur OM ($\omega = n\mathrm{OM}$).

En cherchant le mouvement du point M, M. Floquet trouve que les équations du mouvement définissent une herpolhodie et qu'elles appartiennent à un mouvement de Poinsot, où le plan fixe est le plan P, où la constante de la vitesse angulaire est $2n$, où les rapports à h^2 des carrés des demi-axes de la surface roulante sont les racines de l'équation

$$4\cos^2\lambda z^3 - 3z - 1 = 0,$$

λ désignant l'angle aigu qui a pour cosinus $\left(\frac{h}{l\sqrt{3}}\right)^3$, en sorte que la quadrique est un hyperboloïde H à deux nappes, capable de trièdres trirectangles.

Le mouvement du pôle M n'est pas altéré quand on remplace la surface S par l'hyperboloïde H et la constante n par $2n$. Ainsi H roulera sur S regardée comme fixe en tournant avec la vitesse angulaire nOM; voilà donc un mouvement de Poinsot où le plan fixe est remplacé par une surface courbe.

De Freycinet. — Note sur certaines définitions de mécanique et sur les unités en vigueur. (904-910).

De Jonquières. — Recherche du nombre maximum de points doubles (proprement dits et distincts) qu'il est permis d'attribuer à une courbe algébrique d'ordre m, cette courbe devant passer par d'autres points simples, qui complètent la détermination de la courbe. (917-923).

Une courbe algébrique C_m d'ordre m est supposée déterminée par des points doubles (proprement dits) et des points simples, donnés de position, dont le nombre total soit équivalent à $\frac{m(m+3)}{2}$ conditions.

1° Si $m < 6$, C_m peut être dotée *a priori* de tous les points doubles, proprement dits, distincts et donnés de position, que ce degré comporte, savoir $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

2° Si $m = 6$, C_m ne peut être construite que si huit points doubles seulement sont donnés de position, ainsi que deux points simples.

3° Soit enfin $m > 6$. La courbe C_m peut toujours être supposée engendrée par deux faisceaux projectifs de courbes de degrés n et n'

$$n = \frac{m}{2} + 1, \qquad n' = \frac{m}{2}, \qquad \text{si } m \text{ est pair,}$$

$$n = \frac{m+1}{2}, \qquad n' = \frac{m+1}{2}, \qquad \text{si } m \text{ est impair.}$$

Ces faisceaux donnent lieu à une courbe d'ordre $m+1$; mais on fait en sorte que celle-ci se réduise à la courbe demandée C_m^δ d'ordre m, en ajoutant aux données $m+2$ points simples pris sur une droite tracée arbitrairement, mais ne passant par aucun des autres points donnés. Cette droite fait partie du lieu d'ordre $m+1$; il suffit d'en faire abstraction pour avoir C_m^δ.

Cela posé, si $m > 6$, la construction de C_m^δ n'est possible, dans les conditions

ci-dessus, que si le nombre δ des points doubles proprement dits, donnés de position, est *au plus égal* à $\frac{3m+2}{2}$ lorsque m est pair, ou à $\frac{3m+1}{2}$ lorsque m est impair.

Autonne. — Sur l'application des substitutions quadratiques crémoniennes à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre. (929-932).

Soit H l'équation différentielle de la forme $f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0$. (Pour les notations *voir* l'analyse de la Note précédente de M. Autonne.) L'étude des modifications que font subir à H diverses crémoniennes s se ramène à celle des modifications qu'éprouve une forme quaternaire P de dimension Λ par le fait de diverses substitutions σ linéaires et homogènes de déterminant non nul. (La crémonienne s du plan se trouve, grâce à la substitution σ, représentée dans l'espace par un simple changement de coordonnées homogènes ou du triangle de référence; c'est là la raison de la représentation géométrique adoptée par l'auteur.)

On peut dès lors transporter dans la théorie des équations différentielles du premier ordre les nombreux résultats obtenus dans la théorie des formes quaternaires. La seule précaution à observer, c'est que les coefficients a_{ij} de la substitution

$$\sigma = \left| z_i, \quad \sum_j a_{ij} z_j \right|$$

soient choisis de manière à transformer les courbes intégrantes I de la surface S en des courbes intégrantes de la surface transformée.

M. Autonne applique sa méthode de transformation et d'intégration aux cas de $\Lambda = 1$ et de $\Lambda = 2$.

Dans le cas de $\Lambda = 1$, le connexe $F = 0$ est linéo-linéaire et H s'intègre par des procédés bien connus.

Dans le cas de $\Lambda = 2$, H est de la forme

$$\psi\left[\frac{\xi}{\eta}, \frac{p}{\eta - p\xi}, \frac{2\eta - p\xi}{\eta(\eta - p\xi)}\right] = 0, \qquad \left(p = \frac{d\eta}{d\xi}\right),$$

ψ étant un polynôme quadratique quelconque. On peut, en général, trouver une crémonienne quadratique s de façon que la forme quaternaire P devienne, après avoir été transformée par σ,

$$P' = z_1^2 + z_2^2 - 2K z_3 z_4$$

ou

$$P'' = z_1^2 + z_2^2 - K^2 z_3^2 \qquad (K = \text{const.}).$$

Alors la surface S est de révolution autour de l'axe des z et a pour équation en coordonnées semi-polaires r et θ

$$2Kz = r^2 \quad \text{ou} \quad r^2 = K^2.$$

Les courbes I se projettent sur le plan des xy suivant les spirales logarithmiques $r = Ce^{K\theta}$ où sont les hélices $z = K\theta + C$ du cylindre $r^2 = K^2$. On

conclut de là que ξ, η et p sont des fonctions rationnelles A, B, D de C, θ, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $e^{K\theta}$. Il suffit d'éliminer θ entre les expressions de ξ, η pour avoir l'intégrale $\Psi(\xi, \eta, C) = 0$ de l'équation transformée de H par la crémonienne s.

Si l'expression de s^{-1} en coordonnées non homogènes ξ, η, p est

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} \xi, & \mathcal{A}(\xi, \eta, p) \\ \eta, & \mathcal{B}(\xi, \eta, p) \\ p, & \mathcal{C}(\xi, \eta, p) \end{vmatrix}, \qquad (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} = \text{fonctions rationnelles}),$$

il suffit, pour avoir l'intégrale $\Omega(\xi', \eta', C) = 0$ de H, d'éliminer θ entre les équations

$$\xi' = \mathcal{A}(A, B, D), \qquad \eta' = \mathcal{B}(A, B, D).$$

Duhem. — Sur la théorie du magnétisme. (932-934).

De sa théorie du potentiel thermodynamique, M. Duhem conclut que tout corps magnétique est attiré par des aimants lorsqu'il en est très éloigné, mais qu'il est impossible de rien prévoir pour un corps diamagnétique.

Deux corps de même forme, l'un très peu magnétique, l'autre très peu diamagnétique, et doués de fonctions magnétisantes égales en valeur absolue, ont sous l'action d'aimants permanents les mêmes positions d'équilibre; mais les positions d'équilibre stable de l'un sont les positions d'équilibre instable de l'autre.

L'auteur indique ensuite deux théorèmes qui donnent le moyen de déterminer la fonction magnétisante et qui justifient la détermination de cette fonction par l'étude d'un ellipsoïde placé dans un champ uniforme ou par la méthode du tore (Kirchhoff).

Il fait enfin connaître les équations de l'équilibre magnétique des cristaux qui résultent de sa théorie.

De Jonquières. — Détermination du nombre maximum absolu de points multiples d'un même ordre quelconque r, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique C_m, de degré m, conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe. (971-977).

Le maximum *absolu* du nombre des points doubles qu'il soit permis d'attribuer *arbitrairement* à une courbe algébrique d'ordre m, dont la détermination est complétée par d'autres points donnés, est (pour $m > 6$)

$2p^2 + 7p + 4$,	si m est de la forme	$6p + 1$ ou $6p + 2$
$2p^2 + 7p + 7$,	»	$6p + 3$
$2p^2 + 9p + 8$,	»	$6p + 4$ ou $6p + 5$
$2p^2 + 9p + 11$,	»	$6p + 6$

Le nombre maximum des points r^{uples} qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'ordre m, dont d'autres points simples

donnés complètent la détermination, est égal à la $(2^{r-2})^{\text{ième}}$ partie du maximum des points doubles qui, pour cette même valeur de m, est attribuée à la courbe C_m par la règle précédente (sous certaines réserves).

Bertrand. — Théorème relatif aux erreurs d'observation. (1043-1044).

Si l'on renouvelle un nombre pair de fois la mesure d'une grandeur et qu'on associe les résultats deux à deux dans un ordre réglé par le hasard, en distinguant, dans chaque groupe de deux, la plus grande et la plus petite des erreurs fortuites, le rapport de la somme des premières à la somme des secondes, lorsque le nombre des épreuves augmente, converge vers

$$\sqrt{2}+1=2,41.$$

M. Broch a vérifié cette loi sur quatre séries d'observations faites par M. Benoît au Bureau international des Poids et Mesures. Elles ont donné un résultat égal en moyenne à 2,39.

Lévy (Maurice). — Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel. (1044-1050).

Quelle que soit la cause de la polarisation, il est certain, comme l'a observé Maxwell, que cette cause est mesurable par une grandeur qui est de la nature d'un vecteur. Soient u, v, w les composantes de ce vecteur suivant les trois axes principaux d'un cristal biréfringent. Il s'agit de déterminer les expressions les plus générales des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

par rapport au temps t, en fonction des dérivées secondes relatives aux coordonnées x, y, z, par la condition de reproduire la surface de l'onde de Fresnel, ou, ce qui revient au même, l'équation aux vitesses des ondes planes.

Le problème comporte quatre solutions (physiquement acceptables) renfermant chacune cinq constantes arbitraires

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c};\ \frac{\lambda}{\nu},\ \frac{\mu}{\nu}.$$

Ce sont, en appelant a, b, c les inverses des indices principaux de réfraction :

Solution A_1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathrm{b}-c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathrm{c}-b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathrm{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(\mathrm{c}-a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathrm{a}-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathrm{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathrm{a}-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\mu}{\nu}(\mathrm{b}-a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y};$$

Solution A_2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{a} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a} - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathbf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{b} - a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b} - c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathbf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{c} - b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{c} - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y};$$

Solution B_1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{b} - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{c} - a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathbf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{c} - b'')\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{a} - b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathbf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{a} - c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{b} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y};$$

Solution B_2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{a} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathbf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{b} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b} - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathbf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{c} - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{c} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.$$

L'équation du troisième degré au carré ω^2 des vitesses des ondes planes est la même dans les quatre solutions. Elle se décompose en deux autres

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

$$\omega^2 = \mathbf{a}\,l^2 + \mathbf{b}\,m^2 + \mathbf{c}\,n^2.$$

La seconde correspond à l'onde obscure (Cauchy). Cette onde peut être imaginaire ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} < 0$).

Il y a intérêt à rechercher les solutions qui fournissent des vecteurs lumineux perpendiculaires ou parallèles au plan normal (plan projetant le rayon lumineux sur le plan de l'onde). Les équations A_2 sont les seules qui fournissent la première solution, et cela pour $\lambda = \mu = \nu$. Cette direction est celle de Mac Cullagh, Neumann, Cauchy, Lamé. En faisant $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, on retombe sur les équations de Lamé, Neumann, etc.

Les équations B_2 et B_1 sont les seules qui fournissent des vecteurs lumineux situés dans le plan normal.

Si dans les équations B_2 on fait $\lambda = \mu = \nu$ et $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, on obtient la théorie de Fresnel; si l'on y fait $\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$, on retrouve les équations de Maxwell.

D'ailleurs, les vibrations lumineuses peuvent, sans cesser de satisfaire aux lois de l'observation, avoir toutes les directions possibles relativement au rayon lumineux, et même la direction longitudinale pour une onde particulière.



Les équations B_1 comprennent aussi la théorie de Fresnel

$$(\mathbf{a} = -a^2,\quad \mathbf{b} = -b^2,\quad \mathbf{c} = -c^2)$$

et celle de Maxwell

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0).$$

Liouville (*R.*). — Sur une classe d'équations différentielles parmi lesquelles, en particulier, toutes celles des lignes géodésiques se trouvent comprises. (1062-1064).

L'équation différentielle

$$(1)\qquad y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

dont les coefficients a sont fonctions arbitraires de x, y, se change en une autre de même espèce par les substitutions générales

$$(2)\qquad x = \varphi(x_1, y_1),\qquad y = \psi(x_1, y_1).$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_1 = {} & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3a_2 a_4\right) - a_4\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{2\,\partial a_3}{\partial y} - a_1 a_4\right) + 3a_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{2\,\partial a_3}{\partial y} - a_1 a_4\right), \\ \mathrm{L}_2 = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3a_1 a_3\right) + a_1\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3a_2 a_4\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{2\,\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4\right) - 3a_2\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{2\,\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4\right), \end{aligned}$$

l'expression

$$\begin{aligned} v_5 = {} & \mathrm{L}_2\left(\mathrm{L}_1 \frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial x} - \mathrm{L}_2 \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial x}\right) + \mathrm{L}_1\left(\mathrm{L}_2 \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial y} - \mathrm{L}_1 \frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial y}\right) \\ & - a_1 \mathrm{L}_1^3 + 3a_2 \mathrm{L}_1^2 \mathrm{L}_2 - 3a_3 \mathrm{L}_1 \mathrm{L}_2^2 + a_4 \mathrm{L}_2^3 \end{aligned}$$

est un invariant relatif de poids 5, c'est-à-dire se reproduit multipliée par la cinquième puissance du déterminant

$$\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial y_1} - \frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial y}{\partial x_1}.$$

D'ailleurs, à chaque invariant v_m de poids m, fonction entière des coefficients et de leurs dérivées, correspond un autre invariant

$$v_{m+2} = \mathrm{L}_1 \frac{\partial v_m}{\partial y} - \mathrm{L}_2 \frac{\partial v_m}{\partial x} + m v_m \left(\frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial y}\right).$$

En partant de v_5, on peut donc calculer les invariants relatifs v_7, v_9, ..., et, par suite, deux invariants absolus distincts $\frac{v_5 v_9}{v_7^2}$, $\frac{v_7 v_9^2}{v_5^5}$, qui, pris pour variables dans l'équation proposée (1), lui donnent une forme canonique.

De là résulte la solution des problèmes suivants :

« 1° Étant données deux équations telles que (1), reconnaître si elles sont réductibles l'une à l'autre par l'une des transformations (2);

» 2° Obtenir les substitutions dont l'existence a été établie. »

Parmi les équations (1) se trouvent celles des lignes géodésiques des surfaces quelconques. Ici ce sont les coefficients de l'équation géodésique que l'on regarde comme donnés et non l'expression de l'élément linéaire sur les surfaces correspondantes. Les systèmes géodésiques tracés sur deux surfaces peuvent être amenés à coïncider, sans que les surfaces soient applicables l'une sur l'autre. Ainsi sur toutes les surfaces à courbure constante (et sur celles-là seulement) les lignes géodésiques peuvent être transformées en lignes droites du plan, quelle que soit la valeur de la courbure.

Couette. — Oscillations tournantes d'un solide de révolution en contact avec un fluide visqueux. (1064-1067).

L'auteur étudie les oscillations lentes d'un solide de révolution plongé dans un fluide visqueux et soumis à un moment moteur $-A\lambda$ proportionnel à son élongation λ.

Le mouvement du solide est le même que si son moment d'inertie I était augmenté d'une quantité constante C et que s'il était soumis à une résistance $-B\frac{d\lambda}{dt}$ proportionnelle à sa vitesse angulaire. L'élongation du solide à chaque instant est

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\mu t}\left(\cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\mu T}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right).$$

Les paramètres μ et T sont liés à B et C par les équations

$$B = 2(I + C)\mu,$$
$$A = (I + C)\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \mu^2\right).$$

Si, d'ailleurs, on introduit les quantités m, n liées par les relations

$$m^2 - m = \left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \mu^2\right)n^2,$$
$$2mn - n - \frac{\rho}{2} = 2\mu n^2.$$

ρ désignant la densité du fluide et ε son coefficient de viscosité, on a

$$B = 2\pi m\varepsilon\int\left(\frac{1}{R} + \frac{3\sin\alpha}{r}\right)r^3\,ds,$$
$$C = 2\pi n\varepsilon\int\left(\frac{1}{R} + \frac{3\sin\alpha}{r}\right)r^3\,ds,$$

ds étant l'arc de la méridienne, r le rayon vecteur de cet élément en coordonnées semi-polaires (r, z), R son rayon de courbure, α l'angle de la normale à l'élément ds avec l'axe de rotation, et l'intégration s'étendant à toute la demi-méridienne.

Si entre les six équations précédentes on élimine B, C, m, n, on aura deux équations entre I, A, μ, T, ε. Donc : 1° si l'on connaît I, A, ε, on peut calculer les paramètres μ et T du mouvement; 2° si l'on détermine expérimentalement μ et T et si l'on connaît I, on peut calculer C.

Bertrand. — Sur ce qu'on nomme le poids et la précision d'une observation. (1199-1102).

Le *poids* d'une observation est k lorsque, dans l'appréciation des résultats, quelle que soit la méthode adoptée, l'observation équivaut à k des observations dont le poids est pris pour unité.

La *précision* d'une observation est h lorsque la probabilité d'une erreur comprise entre z et $z+dz$ est la même que celle de l'erreur comprise entre hz et $h(z+dz)$ dans le système d'observation dont la précision est l'unité.

Ces définitions ne sont applicables qu'à certaines lois d'erreur. La probabilité d'une erreur comprise entre z et $z+dz$ étant $\varphi(z)\,dz$, $\varphi(z)$ devra être de la forme

$$\varphi(z) = \mathrm{A}\,e^{-m^2 z^{2\mu}},$$

A, m, λ désignant des constantes dont la dernière est un nombre entier. Si la dérivée seconde de $\varphi(z)$ n'est pas nulle pour $z=0$, on aura $\mu=1$, et la loi est celle qu'a proposée Gauss.

Faye. — Lettre à M. Bertrand à propos de sa précédente Note « Sur un théorème relatif aux erreurs d'observation ». (1102).

Duhem. — Sur l'aimantation par influence. (1113-1115).

L'auteur énonce divers théorèmes relatifs à l'influence de l'aimantation sur la chaleur dégagée dans une réaction chimique, et complète la théorie de ce phénomène proposée par M. P. Janet.

Il étudie ensuite le dégagement de chaleur dû au déplacement d'une masse magnétique. Suivant M. Duhem, lorsqu'une substance magnétique, soumise à l'action d'aimants, s'éloigne à l'infini, elle absorbe de la chaleur si son coefficient d'aimantation est constant ou décroît à température croissante. Quand ce coefficient croît avec la température, le sens du phénomène thermique ne peut être assigné *a priori*.

Ce résultat est en contradiction avec la proposition bien connue de Thomson : Une masse magnétique, que l'on éloigne des aimants permanents, s'échauffe si son coefficient d'aimantation croît avec la température et se refroidit dans le cas contraire.

Pellet. — Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné. (1119-1120).

Bertrand. — Sur la loi des erreurs d'observation. (1147-1148).

Si l'on mesure une même grandeur un grand nombre de fois, et qu'on groupe les mesures deux par deux au hasard, en choisissant dans chaque groupe la plus grande des erreurs, le rapport de la moyenne des carrés de ces erreurs maxima à la moyenne des carrés de toutes les erreurs tend vers $1+\frac{2}{\pi}$.

Si l'on groupe les mesures trois par trois au hasard, la moyenne des carrés des plus grandes erreurs de chaque groupe, divisés par la moyenne des carrés de toutes les erreurs a pour valeur probable $1+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ et tend vers cette valeur lorsque le nombre des épreuves augmente.

De Jonquières. — Génération des courbes unicursales. (1148-1154).

En général, on ne peut attribuer *arbitrairement* à une courbe algébrique (dont un nombre suffisant de points simples complètent la détermination) qu'un nombre relativement restreint de points doubles proprement dits. Au contraire, si la courbe est unicursale, elle peut être dotée, *en des points arbitraires,* de tous ses points multiples équivalant à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.

M. de Jonquières indique comment on doit former les deux faisceaux projectifs de la courbe unicursale déterminée par de telles données.

Callandreau. — Recherches sur la théorie de la figure des planètes; étude spéciale des grosses planètes. (1171-1173).

L'auteur revient sur le calcul des deux constantes $\frac{C-A}{M}$, $\frac{C-A}{C}$ (A et C désignent les moments d'inertie principaux de la planète, supposée de révolution, et M sa masse); il a trouvé qu'elles s'exprimaient avec une approximation du second ordre, au moyen des seules données superficielles.

Les formules possèdent une précision suffisante pour la Terre et les planètes inférieures; mais, pour les planètes supérieures, une étude spéciale des petits termes de correction est nécessaire. Ces termes influent notablement sur la valeur des constantes de Saturne.

Bertrand. — Sur les épreuves répétées. (1201-1203).

Soit une urne contenant un grand nombre λ de boules blanches et de boules noires; la probabilité d'en extraire une boule blanche est p, celle d'extraire une boule noire est q. On fait μ tirages sans jamais remettre dans l'urne les boules qui en sont sorties. La probabilité pour que le nombre des boules blanches soit $\mu p + h$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}}\,e^{-\frac{h^2}{2pq\mu}\frac{\lambda}{\lambda-\mu}}.$$

Si l'on remettait les boules après chaque tirage, la probabilité ci-dessus serait, d'après Euler,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,e^{-\frac{h^2}{2pq\mu}}.$$

On voit que la formule de M. Bertrand ne diffère de celle d'Euler que par le changement de μ en $\mu\frac{\lambda-\mu}{\lambda}$.

De Jonquières. — Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque. (1203-1209).

Toute surface algébrique S_m de degré m non multiple de 4, déterminée par

des points simples donnés, peut être engendrée par deux faisceaux projectifs S_n, $S_{n'}$ de degrés n et n' dont la somme $n+n'$ soit égale à m, mais sous deux restrictions : 1° que ni n ni n' ne soit multiple de 4 ni de même résidu que m par rapport à 4; 2° que le plus grand n de ces deux nombres satisfasse à la condition

$$n \geq \frac{3m + \sqrt{m^2 - 16m - 24 + \frac{168}{m+4}}}{6},$$

toujours remplie d'ailleurs pour $m < 18$.

Toute surface S_m de degré multiple de 4, déterminée par des points simples donnés, peut être engendrée par des faisceaux projectifs de degrés n, n', dont la somme soit égale à $m+1$, sous les réserves ci-dessus quant aux valeurs et aux formes de n et de n'.

Weill. — Condition d'égalité de deux figures symétriques. (1237-1238).

Pour qu'une figure soit égale à sa symétrique, il faut et il suffit qu'à tout point M de la figure en corresponde un autre P obtenu en faisant tourner M d'un angle constant autour d'une droite fixe, puis prenant le symétrique du nouveau point par rapport à un plan fixe perpendiculaire à la droite fixe.

Barbier. — On suppose écrite la suite naturelle des nombres; quel est le $(10^{10000})^{\text{ième}}$ chiffre écrit? (1238-1239).

Duhem. — Sur l'aimantation par influence. (1240-1241).

La différence de niveau potentiel entre deux points M et M' d'un conducteur électrisé et aimanté varie avec l'intensité d'aimantation en ces deux points. Si l'on désigne par V le niveau potentiel électrostatique, par ε la constante de la loi de Coulomb, par $\mathcal{G}(\mathfrak{M})$ une fonction de l'aimantation $\mathfrak{M}$ qui s'annule avec $\mathfrak{M}$, par Θ une quantité qui, en chaque point, dépend de la nature du conducteur, l'équation de l'équilibre électrique est

$$\varepsilon V + \Theta + \mathcal{G}(\mathfrak{M}) = \varepsilon V' + \Theta' + \mathcal{G}(\mathfrak{M}').$$

Si l'on désigne par $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ la force magnétisante, par ρ la densité électrique, par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ les composantes de l'aimantation, les équations de l'équilibre magnétique seront

$$\mathfrak{A} = -h\,F\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \mathfrak{B} = -h\,F\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \mathfrak{C} = -h\,F\frac{\partial V}{\partial z},$$

en posant

$$F = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}} + \rho\frac{\partial \mathcal{G}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}}.$$

La fonction magnétisante en chaque point dépend de la densité électrique.

La différence $D(\mathfrak{M})$ de niveau potentiel entre un corps possédant l'aiman-

tation $\mathfrak{M}$ et un corps non aimanté varie avec $\mathfrak{M}$, suivant la loi

$$\varepsilon \frac{\partial D(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}} = -h\,\mathfrak{M}\,\frac{\partial \frac{1}{F}}{\partial \rho}.$$

La force électromotrice d'une pile dont l'électrode négative est formée par une lame de fer doux varie avec l'aimantation supposée uniforme; elle est proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation et en raison inverse du coefficient d'aimantation de l'électrode.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par F. Klein et A. Mayer [1].

Tome XXVII, 1886.

Engel (F.). — Sur les équations de définition des groupes continus de transformation. (1-57).

L'auteur expose tout d'abord les notions fondamentales et les théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes de transformation d'après les travaux de Sophus Lie; puis il passe à une étude qui personnellement l'a plus particulièrement occupé.

Il s'agit de développer une méthode nouvelle pour déterminer les équations de définition des groupes de transformations infinitésimales.

Lie, en plusieurs endroits de son Mémoire *Ueber unendliche Gruppen* (*Christiania Videnskabsselkabs Forh.*, 1882), calcule directement quelques équations de définition dans le plan; il assujettit non seulement ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2, mais aussi

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

et

$$\xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y},$$

à former un système de solutions de l'équation différentielle considérée, et il obtient de la sorte des équations qui permettent d'obtenir les coefficients de l'équation différentielle. Mais les calculs sont un peu longs.

La méthode exposée par l'auteur est plus générale : elle lui permet d'obtenir non seulement les formes normales, mais aussi les groupes qui sont semblables aux formes normales de Lie, et par suite de déterminer non pas les formes les plus simples des équations de définition, mais leur forme générale.

En même temps, l'auteur parvient à quelques résultats relatifs à l'intégration des équations de définition, à l'existence de certaines intégrales, à leur détermination, etc.

---

[1] Voir *Bulletin*, XI_2, 26.

Study (*E.*). — Sur la géométrie des coniques et, en particulier, sur le problème des caractéristiques. (58-101).

L'auteur commence par un exposé critique des travaux de de Jonquières, de Chasles, de Cremona, de Clebsch et d'Halphen sur les caractéristiques, et il se propose tout particulièrement d'étudier de quelle façon on doit interpréter le théorème de Chasles pour qu'il n'admette plus aucune exception.

Study (*E.*). — Sur la formule des caractéristiques de Cremona. (102-105).

Remarques sur le théorème de Cremona qui constitue l'extension aux systèmes doublement et triplement infinis de coniques du théorème de Chasles.

Klein (*F.*). — Sur les configurations qui sont à la fois inscrites et circonscrites à la surface de Kummer. (106-142).

La question des configurations à la fois inscrites et circonscrites à la surface de Kummer a été déjà rapidement étudiée, au moyen de la théorie des fonctions hyperelliptiques, par Rohn, dans son Mémoire intitulé : *Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (*Math. Ann.*, t. XV).

La surface de Kummer se présente de la façon la plus simple et la plus naturelle dans l'étude des complexes linéaires du second degré. L'auteur emploie donc le système canonique de coordonnées qu'il a introduit dans l'examen des propriétés de ces complexes (*Math. Ann.*, t. II), et il examine tout d'abord les configurations en question, en laissant de côté, en premier lieu, les fonctions hyperelliptiques. Les relations fondamentales entre ces configurations se déduisent alors simplement. L'auteur laisse ensuite de côté ces considérations élémentaires pour montrer comment la théorie des fonctions hyperelliptiques se prête facilement à l'examen des questions qui se présentent relativement aux configurations considérées. Après avoir exposé rapidement le mode de représentation de la surface de Kummer au moyen des fonctions hyperelliptiques, il montre comment leur emploi simplifie l'étude des configurations, en quoi elles sont une généralisation remarquable du théorème de Poncelet, et termine en donnant soixante-quatre transformations univoques qui laissent inaltérable la surface de Kummer.

L'auteur se demande si ces soixante-quatre transformations sont les seules qui jouissent, relativement à la surface, de cette propriété.

Markoff (*A.*). — Sur les racines de certaines équations. (143-150).

Soient

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(x)}{z - x}\,dx + \xi \int_c^d \frac{f(x)}{z - x}\,dx$$

et $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$ une des fractions convergentes de la fonction $F(z)$, a, b, c, d et ξ étant réels et les différences $b - a$, $c - b$, $d - c$ positives. Les fonctions $g(x)$

et $f(y)$ sont aussi supposées positives quand y est compris entre a et b et entre c et d. L'auteur s'occupe de la détermination du nombre des racines de l'équation

$$\varphi_n(z) = 0,$$

de $-\infty$ à a, de a à b, de b à c, de c à d et de d à $+\infty$. Les recherches de l'auteur sont analogues, à certains égards, à celles de Sturm sur les racines de certaines équations qui se rattachent à l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre [*Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre* (*Journ. de Liouville*, t. I_1)].

D'autre part, les fonctions de Lamé sont des cas particuliers des fonctions $\varphi_n(z)$; les considérations de l'auteur se relient donc aux travaux de Klein [*Ueber die Lamé'sche Functionen* (*Math. Ann.*, t. XVIII)], de Ljapounoff (*De la stabilité des formes ellipsoïdales de l'équilibre d'une masse liquide, douée d'une rotation*, 1884, Chap. IV) et de Stieltjes [*Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé* (*Acta mathem.*, t. VI)].

Pringsheim (*A.*). — Sur un théorème fondamental de la théorie des fonctions elliptiques. (151-157).

Si l'on veut représenter les fonctions inverses de l'intégrale elliptique de première espèce par des quotients de fonctions thêta, il faut tout d'abord montrer que le rapport des deux périodes définies par certaines intégrales définies a sa partie imaginaire positive et différente de zéro. Mais, comme on peut disposer du signe de ces périodes, il suffit de démontrer que le rapport des périodes n'est pas réel; on disposera ensuite des signes de façon que les séries thêta soient convergentes.

L'auteur montre d'une façon simple que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ ne peut être réel et incommensurable et non plus réel et rationnel.

M. Falk publiait en même temps une démonstration simple et directe du même théorème [*Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen* (*Acta mathem.*, t. VII, p. 197)].

Hilbert (*D.*). — Sur les conditions covariantes nécessaires et suffisantes pour la représentation d'une forme binaire par une puissance entière. (158-161).

Application à cette question particulière de quelques théorèmes établis par l'auteur dans sa Dissertation inaugurale (*Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*).

Hurwitz (*A.*). — Supplément à la Note : Quelques théorèmes généraux sur les courbes gauches (*Math. Ann.*, t. XXV, p. 287). (162).

Les théorèmes [de la première partie de la Note dont il s'agit avaient été publiés depuis longtemps par Möbius, § 56 de sa *Statique*, d'une part, par Zeuthen et Oppermann (*Tidsskrift for Mat.*, 1865 et 1866; *Astron. Nachr.*, t. LXVI), d'autre part.

On peut encore citer, sur l'existence de la projection maxima d'une courbe fermée, un travail de Hayward [*On an extension of the term Area* (*Proc. London Math. Soc.*, t. IV, p. 289)].

Schur (*F.*). — Sur la déformation des espaces à courbure de Riemann constante. (163-176).

L'auteur se propose de donner surtout des exemples de la déformation d'espaces à plus de deux dimensions contenus dans les espaces dits linéaires.

On dit qu'un espace est déformé en un autre lorsque aux lignes infiniment petites du premier correspondent dans le second des lignes infiniment petites égales. Un espace linéaire est celui où le carré de l'élément linéaire est exprimé par la somme des carrés des accroissements des coordonnées.

Monro [*On flexure of spaces* (*Proc. London Math. Soc.*, t. IX, p. 171)] a traité un cas particulier de la question. Killing (*Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung,* 1885) a donné dans son Ouvrage une liste assez complète des travaux faits sur cette question. Les démonstrations de Killing reposent sur des considérations géométriques; l'auteur a cru utile de traiter ces questions analytiquement. C'est ce qu'il fait dans les trois paragraphes dont les titres suivent :

§ 1. Sur la courbure de Riemann et sur l'élément linéaire des espaces où cette courbure est constante.

§ 2. Généralités sur la déformation des surfaces.

§ 3. Sur la déformation des surfaces à courbure constante.

Markoff (*A.*). — Sur les racines de certaines équations. (Seconde Note). (177-182).

Soit $V(y, \xi)$ une fonction de deux variables y et ξ. Posons

$$\varphi_n(y, \xi) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n,$$

où $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sont des fonctions d'une seule variable ξ déterminées par la condition

$$\int_a^b \varphi_n(y, \xi)\, V(y, \xi)\, \omega(y)\, dy = 0,$$

pour chaque fonction entière $\omega(y)$ du degré $n-1$.

L'équation

$$\varphi_n(z, \xi) = 0$$

donne, pour une valeur déterminée de ξ, n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour z.

L'auteur étudie la façon dont varient les quantités x quand ξ varie. Il montre, par exemple, comme application des résultats auxquels il arrive, que les racines de l'équation

$$\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

se trouvent, une à une, dans les intervalles suivants :

$$\left|\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right|,$$

$$\left|\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\right|,\quad \ldots,\quad \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{\pi}{2n+1}\right).$$

ou bien encore dans les intervalles suivants

$$\left(\cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{\pi}{n+1}\right), \quad \left(\cos\frac{3\pi}{2n}, \cos\frac{2\pi}{n+1}\right), \quad \ldots, \quad \left[\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}, \cos\frac{n\pi}{n+1}\right].$$

Hurwitz (A.). — Sur les groupes finis de substitutions linéaires, qui se présentent dans la théorie des transcendantes elliptiques. (183-233).

F. Klein a étudié la façon dont se comportent les fonctions représentées par le symbole $X_\alpha(u)$, formées des produits σ à n termes, lorsqu'on effectue une transformation linéaire des périodes ω_1, ω_2 [*Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ten} Stufe* (*Ber. k. Sächs. Ges. Wiss.*, 1884); *Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe* (*Abh. math. phys. Cl. k. Sächs. Ges. Wiss.*, t. XIII)]. Klein avait laissé de côté le cas de n pair. L'auteur reprend les considérations de Klein et examine à la fois le cas de n pair et de n impair et rattache à cette question nombre de problèmes de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions. Voici l'énoncé des principales divisions de son Mémoire :

§ 1. Théorème d'Hermite.

§ 2. Détermination plus précise des fonctions $X_\alpha(u)$. Propriétés de ces fonctions.

§ 3. Zéros des fonctions $X_\alpha(u)$. Représentation de ces fonctions par des séries Θ.

§ 4. Transformation linéaire des périodes.

§ 5. Recherche des groupes de substitutions des $X_\alpha(u)$ qui résultent d'une transformation linéaire des périodes.

§ 6. Séparation des résultats obtenus jusqu'ici en deux classes, l'une relative à la théorie des fonctions, l'autre à la théorie des groupes. Conséquences.

§ 7. Quantités du premier échelon, composées avec les fonctions $X_\alpha(u)$.

§ 8. Enoncé et solution d'un problème de la théorie des groupes.

§ 9. Application des résultats trouvés dans le § 6 aux groupes de substitutions.

§ 10. Systèmes de fonctions composés avec les fonctions $X_\alpha(u)$ correspondant aux nombres impairs.

§ 11. Composition de systèmes de fonctions X qui correspondent aux nombres pairs.

§ 12. Systèmes de fonctions composés avec les fonctions $X_\alpha(u)$ correspondant à des nombres pairs.

§ 13. Composition de systèmes de fonctions X qui correspondent à des nombres pairs et impairs.

§ 14. Système de fonctions composés avec les fonctions $X_\alpha(u)$ correspondant à des nombres pairs et impairs.

§ 15. Procédé de composition.

§ 16. Procédé de différentiation. Intégrales du $n^{ième}$ échelon qui sont partout finies.

Bruns (H.). — Sur les périodes des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. (234-252).

Reproduction d'un travail publié en 1875 à l'Université de Dorpat.

L'auteur, à l'occasion d'une recherche sur les perturbations séculaires des éléments de la trajectoire des comètes périodiques, avait été conduit à la question suivante : représenter analytiquement les périodes des intégrales de première et de seconde espèce qui correspondent à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = y, \qquad y^2 = \mathrm{A}x^4 + 4\mathrm{B}x^3 + 6\mathrm{C}x^2 + 4\mathrm{B}'x + \mathrm{A}',$$

en supposant que les coefficients de y^2 sont des fonctions rationnelles données d'un paramètre variable ξ. Si, pour simplifier l'examen, on part de la forme normale ordinaire

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{K}\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

les périodes, si l'on fait abstraction du facteur K, sont des fonctions de k seulement; mais, si l'on part de la forme normale prise par Weierstrass dans ses *Leçons sur les fonctions elliptiques*, les périodes peuvent être représentées par des séries hypergéométriques dont le quatrième élément est une fonction linéaire simple des invariants absolus de y^2.

Staude (*O.*). — Sur de nouvelles propriétés focales des surfaces du second degré. (253-271).

Soient x, y les coordonnées d'un point du plan, α, β deux constantes réelles; les coordonnées elliptiques λ, μ du point (x, y) sont définies par les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{\alpha - \lambda} + \dfrac{y^2}{\beta - \lambda} = 1, \qquad \dfrac{x^2}{\alpha - \mu} + \dfrac{y^2}{\beta - \mu} = 1, \\ \qquad -\infty < \lambda < \beta < \mu < \alpha. \end{array} \right.$$

Les distances du point (λ, μ) aux foyers communs des coniques (1) sont données par

$$r_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu}, \qquad r_2 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu}.$$

On en déduit

$$r_1 + r_2 = 2\sqrt{\alpha - \lambda}, \qquad r_1 r_2 = 2\sqrt{\alpha - \mu},$$

$$r_1^2 + r_2^2 = 2\alpha - \lambda - \mu, \qquad r_1 - r_2 = \mu - \lambda,$$

en sorte que

$$\lambda = \mathrm{C}, \qquad \mu = \mathrm{C},$$

$$\lambda + \mu = \mathrm{C}, \qquad \mu - \lambda = \mathrm{C}$$

sont, en coordonnées elliptiques, les équations de l'ellipse, de l'hyperbole, du cercle et de la courbe de Cassini.

Considérons de même dans l'espace les surfaces

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 1;$$

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha.$$

λ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du point (x, y, z) et de plus on a les surfaces connues représentées par

$$\lambda = C, \qquad \mu = C, \qquad \nu = C, \qquad \lambda + \mu + \nu = C,$$
$$\mu + \nu = C, \qquad \lambda + \mu - \nu = C, \qquad \mu - \mu = C.$$

L'auteur se demande alors si les expressions

$$r = \sqrt{\alpha - \lambda} \pm \sqrt{\alpha - \mu} \pm \sqrt{\alpha - \nu}$$

ont une signification géométrique, comme en avaient une les expressions correspondantes dans le cas du plan. Il arrive de la sorte à une généralisation et à une démonstration nouvelle des propriétés focales des surfaces du second degré qu'il avait précédemment données (*Math. Ann.*, t. XX).

Dingeldey (*F.*). — Sur les courbes du troisième ordre ayant un point double. (272-276).

Dans son Mémoire [*Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse* (*Crelle*, t. XXXI, p. 126)], Grassmann donne pour la génération de la courbe générale du troisième ordre au moyen du mouvement de lignes droites la proposition suivante :

« Si les quatre côtés et une des diagonales d'un quadrilatère tournent autour de points fixes et que les deux sommets non situés sur cette diagonale se meuvent sur des droites, chacun des sommets situés sur la diagonale décrit une courbe du troisième degré ».

L'auteur, en partant de là, se propose de montrer comment on peut arriver à une génération très simple des courbes du troisième ordre ayant un point double et donner une construction de la ligne d'inflexion.

Affolter (*G.*). — Sur les groupes de lignes droites sur les surfaces d'ordre supérieur. (276-295).

L'auteur était depuis longtemps arrivé aux résultats que contient son Mémoire; le travail de Schur [*Ueber eine besondere Classe Flächen vierter Ordnung* (*Math. Ann.*, t. XX)] l'a engagé à les publier.

Les surfaces du $n^{\text{ième}}$ ordre, lorsque n est supérieur à 3, sur lesquelles se trouve un nombre limité de lignes droites, n'ont été jusqu'ici que peu étudiées.

On ne connaît pas les propriétés de ces surfaces dues à la présence de droites sur elles; on ne sait rien, à quelques exceptions près, des modes de groupement de ces droites.

Dans son Mémoire, l'auteur essaye de parvenir directement et d'une façon élémentaire à la détermination de ces surfaces et du mode de groupement des droites qu'elles contiennent. Il arrive à une série de résultats remarquables, dont l'énoncé même ne peut trouver place ici.

Segre (*C.*). — Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes. (296-314).

L'auteur s'est déjà occupé (*Atti della R. Acc. di Scienze di Torino*, t. XIX et XXI) des variétés rationnelles normales composées d'une série simplement

infinie de droites et de plans; on est ensuite conduit à étudier les variétés normales elliptiques et tout d'abord les courbes elliptiques C_n que l'on peut appeler normales, qui appartiennent à un espace à $n-1$ dimensions S_{n-1}.

Clifford [*On the Classification of loci* (*Phil. Trans.*, 1878)], Véronèse [*Behandlung der projectivischen Verhältnisse, ...* (*Math. Ann.*, t. XIX)], Klein [*Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (*Math. Ann.*, t. XVII); *Ueber die elliptischen Normalcurven der N^ten Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^ten Stufe* (*Abh. k. Sächs. Ges. Wiss.*, t. XIII)] et Bianchi [*Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung* (*Math. Ann.*, t. XVII)] ont étudié déjà attentivement ces courbes et l'examen des transformations univoques des courbes elliptiques normales du troisième et du quatrième ordre en elles-mêmes[1] a fait le sujet des travaux de Harnack, Lange, Ameseder, Kupper et Em. Weyr.

L'auteur se propose surtout dans son Mémoire de montrer comment la série simplement infinie des transformations univoques d'une C_n en elle-même, en conduisant à une série simplement infinie de surfaces réglées rationnelles normales qui la contiennent, permet d'appliquer des résultats connus sur celles-ci à l'étude de la C_n et fournit ainsi des propriétés nouvelles de cette courbe.

Papperitz (*E.*). — Recherches sur la transformation algébrique des fonctions hypergéométriques. (315-356).

Le problème de la transformation des fonctions hypergéométriques a été traité par Kummer [*Ueber die Gauss'sche Reihe, ...* (*Crelle*, t. XV)] et par Goursat [*Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergomtrique* (*Ann. Ec. Norm. sup.*, 1881); *Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer* (*Math. Ann.*, t. XXIV); *Recherches sur l'équation de Kummer* (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. XV)]; mais ces auteurs se sont bornés à l'examen des transformations rationnelles.

L'auteur se propose dans ses recherches d'étudier la théorie générale de la transformation algébrique.

Il considère d'une façon générale les fonctions qui satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{\alpha+\alpha'-1+(\beta+\beta'+1)x}{x(1-x)}\frac{dP}{dx} + \frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')x+\beta\beta'x^2}{x^2(1-x)^2}P = 0,$$

où les coefficients satisfont à la condition

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1,$$

ou bien qui, par une substitution linéaire effectuée sur la variable x, se ramènent aux solutions de cette équation différentielle.

L'auteur part de cette remarque, que la théorie de la transformation des fonctions hypergéométriques est en somme identique à la fonction de Schwarz $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ et se propose dès lors de résoudre la question suivante :

Déterminer toutes les équations algébriques

$$f(x, y) = 0$$

qui permettent de passer d'une équation différentielle

$$[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$$

à une équation différentielle de même forme

$$[s]_y = R(\lambda', \mu', \nu', x),$$

où l'on désigne, pour abréger, par $[s]_x$ l'invariant différentiel

$$\frac{\frac{d^3 s}{dx^3}}{\frac{ds}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 s}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}}\right)^2,$$

et par $R(\lambda, \mu, \nu, x)$ la fonction rationnelle

$$R = \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1)x + (1 - \mu^2)x^2}{2x^2(1-x)^2}.$$

L'auteur applique à la résolution de cette question la méthode de Schwarz (*Crelle,* t. LXXV) et emploie sous une forme particulière les surfaces de Riemann.

Voss (A.). — Sur la théorie des surfaces algébriques. Première Partie : Théorie des surfaces steinériennes. (357-396).

Représentons par

$$f = (a_x)^n = 0$$

une surface générale du $n^{\text{ième}}$ ordre. La $k^{\text{ième}}$ polaire d'un point y relativement à cette surface est représentée symboliquement par l'équation

$$(a_x)^{n-k}(a_y)^k = 0.$$

La condition pour que cette polaire présente au point x un point double est exprimée par les équations

$$(a_x)^{n-k-1}(a_y)^k a_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Si l'on élimine entre ces équations les quantités x, on obtient l'équation d'une surface S_k telle que la $k^{\text{ième}}$ polaire de chacun de ses points a un point double. Le lieu de ces points doubles forme une surface H_k. La $(n-k-1)^{\text{ième}}$ polaire du point x de H_k possède un point double au point y de S_k.

L'auteur appelle S_k la $k^{\text{ième}}$ steinérienne, H_k la $k^{\text{ième}}$ hessienne de la surface donnée, et il étudie dans son Mémoire les singularités de ces surfaces, qui se trouvent liées de la façon la plus étroite avec la théorie des polaires des surfaces algébriques.

Les surfaces S_1 et H_1 ont été étudiées surtout à cause de leur importance dans le cas de $n = 3$; dans le cas général de n quelconque on ne peut citer que les remarques de Cremona dans sa *Théorie des surfaces algébriques,* Chap. X, et le travail de Bäcklund [*Om geometriska ytor* (*Kong. Svenska Vetens. Ak. Handl.*, t. IX, 1871)], que l'auteur n'a connus qu'après avoir trouvé les résultats

exposés dans son Mémoire, et en particulier dans le cinquième des paragraphes suivants :

§ 1. Correspondance univoque de deux surfaces au moyen de quatre équations biquaternaires.

§ 2. Correspondance univoque de deux courbes au moyen de cinq équations biquaternaires.

§ 3. Sur un cas particulier de la question traitée dans le § 1.

§ 4. Sur la théorie des polaires des figures algébriques.

§ 5. La hessienne et la steinérienne conjuguées.

Königsberger (*L.*). — Sur une propriété des séries infinies. (397-402).

Remarques sur les séries infinies absolument convergentes relatives à la rationnalité ou à l'irrationnalité des valeurs qu'elles fournissent.

Applications à e^x et à $\sin x$.

Morera (*G.*). — Sur l'intégration des différentielles totales. (403-411).

Mayer (*Math. Ann.*, t. V) a établi le théorème suivant : « L'intégration d'un système intégrable d'équations linéaires aux différentielles totales peut être ramenée à l'intégration d'un système d'un nombre égal d'équations différentielles du premier ordre.

L'auteur se propose dans ce Mémoire d'établir d'une façon précise l'origine de ce fait important, en ayant recours aux méthodes exposées, d'après Riemann, par Lipschitz dans le second Volume de son Traité d'Analyse.

Staude (*O.*). — Une propriété catoptrique de l'ellipsoïde. (412-418).

Emploi des relations établies dans le même volume (p. 253 et suiv.) pour établir relativement à l'ellipsoïde des propriétés analogues aux propriétés catoptriques connues de l'ellipse.

Krause (*M.*). — Développements en séries de Fourier dans le domaine des fonctions thêta à deux variables. (419-430).

L'auteur s'occupe de la question du développement des puissances et des produits des fonctions thêta à deux variables en séries de Fourier.

La question est importante en ce sens qu'elle comprend en somme le problème de la transformation. L'auteur arrive en effet, comme cas particulier, aux transformations générales du second, du troisième, du quatrième et du sixième ordre d'une part, à celle du cinquième de l'autre.

Klein (*F.*). — Sur les fonctions sigma hyperelliptiques. (431-464).

« Si l'on veut essayer d'étendre à la théorie des fonctions hyperelliptiques, et tout d'abord des fonctions hyperelliptiques à deux variables, les progrès récents de la théorie des fonctions elliptiques, il paraît nécessaire, en premier

lieu, d'introduire, au lieu de seize fonctions thêta de la théorie ordinaire

$$\mathfrak{S}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

seize autres fonctions telles, que par une transformation linéaire des périodes ces fonctions permutent entre elles sans l'adjonction d'un facteur quelconque.

» On approche du résultat, et d'une façon suffisante dans bien des cas, en divisant les fonctions thêta paires par leurs valeurs correspondant aux zéros des variables indépendantes, les fonctions impaires par les valeurs de certains quotients différentiels, à définir d'une façon plus précise, pris dans les mêmes conditions. Les fonctions résultantes se permutent, par une transformation linéaire des périodes à un facteur près, commun pour toutes et dépendant des coefficients de la transformation :

$$(1) \qquad e^{c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2},$$

en sorte que toute relation homogène entre les fonctions se transforme comme si l'on avait simplement effectué une permutation sur les fonctions. Il en sera encore de même si l'on multiplie les fonctions en question par le même facteur exponentiel

$$(2) \qquad e^{A_{11}v_1^2 + A_{12}v_1v_2 + A_{22}v_2^2}.$$

» Je désignerai par

$$\Theta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

les fonctions ainsi définies.

» S'il s'agit, au lieu des fonctions $\mathfrak{S}$, d'introduire des fonctions qui, par une transformation linéaire des périodes, ne font que permuter, il n'y a aucun doute que ces fonctions sont comprises parmi les fonctions Θ. La question revient alors à déterminer le facteur (2) en sorte que les facteurs (1) qui se présentent en général dans une transformation linéaire des périodes disparaissent. Dans les paragraphes suivants, je montrerai qu'il est facile de satisfaire simplement à cette condition. Pour conserver l'analogie avec la théorie des fonctions elliptiques telle que l'a établie Weierstrass, je donne le nom de *fonctions* σ aux fonctions ainsi obtenues, tout en remarquant que Weierstrass paraît préférer, dans le cas des fonctions hyperelliptiques et des fonctions abéliennes, laisser indéterminé le facteur (2) et désigner par fonctions σ ce que nous appelons fonctions Θ. »

L'auteur passe alors à la détermination des dix fonctions σ paires, des six fonctions σ impaires, à l'étude des transformations des fonctions σ par l'addition des périodes et au développement de ces fonctions en séries.

Il examine ce que deviennent les formules quand on passe des fonctions hyperelliptiques aux fonctions elliptiques et termine en établissant, dans le cas des fonctions hyperelliptiques, des formules analogues aux formules connues dans le cas des fonctions elliptiques.

Hess (*W.*). — Sur l'herpolhodie. Extrait d'une Lettre à la Rédaction. (465-472).

De Sparre (*Comptes rendus*, t. XCIX) a montré que l'herpolhodie n'a pas de point d'inflexion et cette proposition a fait le sujet de Communications

de la part de Mannheim (*Comptes rendus*, t. C et CI), de de Saint-Germain (*Id.*, t. C), de Franke (*Id.*, t. C), et de Resal (*Journal de l'Éc. Pol.*, Cah. 55).

Le théorème de de Sparre n'est pas nouveau.

L'auteur l'avait donné comme cas particulier dans sa dissertation (*Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene;* München, 1880) et il reproduit ici dans un ordre nouveau les principales propositions contenues dans ce travail.

Königsberger (*L.*). — Sur la loi de formation des différentielles d'ordre supérieur d'une fonction de fonctions. (473-477).

Expression de la différentielle $\rho^{\text{ième}}$ de la fonction

$$t = f(x, y, z, \ldots),$$

où $x, y, z, \ldots$ sont des fonctions d'une seule variable u.

L'auteur en déduit une démonstration du théorème donné par Eisenstein (*Monatsb. Berl. Ak.*, 1852) sur le développement des fonctions algébriques et démontré depuis par Heine (*Crelle*, t. XLVIII) et Hermite (*Proc. Lond. Math. Soc.*, t. VII).

Neumann (*C.*). — Sur le mouvement de roulement d'un corps sur un plan horizontal donné sous l'influence de la pesanteur. (478-501).

On considère un corps à surface convexe comme une sphère ou un ellipsoïde. Ce corps peut, sous l'influence de la pesanteur, se déplacer sur un plan horizontal avec lequel il reste toujours en contact. On suppose qu'entre le corps et le plan horizontal existe un certain frottement, tel qu'il ne puisse exister aucun mouvement de glissement du corps. L'auteur étudie les formes les plus simples sous lesquelles puissent se mettre les équations du mouvement et étudie la nature de son déplacement à un moment quelconque.

Neumann (*C.*). — Sur une méthode simple pour établir le principe des déplacements virtuels. (502-505).

Von der Mühl (*K.*). — Sur la théorie de Green de la réflexion et de la réfraction de la lumière. (506-514).

Comparaison des théories de Green et de Cauchy.

Examen des travaux de Haughton (*Phil. Mag.*, VI, 1853) et des travaux de l'auteur lui-même (*Math. Ann.*, t. V).

Voss (*A.*). — Sur une propriété des formes cubiques d'un nombre quelconque de variables. (515-526).

Soit

f une forme de degré s à p variables homogènes,
H la hessienne,
${}^{\mathrm{H}}\mathrm{H}$ la hessienne de la hessienne.

On sait que, s'il s'agit de formes linéaires, on a pour $s > 3$

$$(1) \qquad H_H = Pf + QH.$$

Pour les formes ternaires on n'a un théorème semblable que si f est du troisième degré; on a alors

$$H_H = Af + BH,$$

où A et B sont les deux invariants de f. Bauer [*Von der Hesse'schen Determinante der Hesse'schen Fläche dritter Ordnung* (*Münch. Acad.*, t. XIV)] a démontré que pour les formes cubiques quaternaires on a une relation de la forme (1). L'auteur établit d'une façon générale dans son travail que le théorème fourni par l'équation (1) subsiste pour les formes cubiques d'un nombre quelconque de variables.

Voss (*A.*). — Sur une proposition fondamentale de la théorie des fonctions algébriques. (527-536).

Nöther (*Math. Ann.*, t. II) a énoncé les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $F = 0$ pour que F soit de la forme $Af + B\varphi$, où A, B, f et φ sont des fonctions rationnelles entières de x et y. La même question a été étudiée par Halphen (*Bull. Soc. mat.*, t. V) et par Bacharach dans sa Dissertation (Erlangen, 1881). Voss se propose dans ce Mémoire de donner de ce théorème une démonstration simple et précise.

Schur (*F.*). — Sur la connexion entre les espaces à courbure de Riemann constante et les espaces projectifs. (537-567).

§ 1. Sur les lignes géodésiques.
§ 2. Sur les variables normales.
§ 3. Sur les surfaces géodésiques.
§ 4. Sur la courbure de Riemann.
§ 5. Sur les espaces tels que toutes les surfaces géodésiques passant par un point fixe contiennent une série doublement infinie de lignes géodésiques de l'espace.
§ 6. Sur la courbure de Riemann de ces espaces.
§ 7. Sur les espaces projectifs ou espaces à courbure de Riemann constante.
§ 8. Sur des généralisations de la courbure de Riemann.

Hess (*W.*). — Complément à la Note sur l'herpolhodie (568).

Rectification de deux théorèmes du travail cité plus haut.

Voss (*A.*). — Sur un théorème de Mécanique analytique. (569-574).

Les trois équations différentielles d'Euler pour la rotation d'un corps solide s'appliquent sans changement à un système quelconque de points matériels. La remarque se trouve dans les fragments de la *Mécanique analytique* de Lagrange qui se trouvent dans l'édition de Bertrand et a été donnée de nouveau par Liouville, Frahm et Kirchhoff. L'auteur donne une nouvelle démonstration de ce fait important et insiste sur son importance.

Von der Mühl (*K.*). — Sur le mouvement des liquides dans les vases. (575-600).

La question des oscillations du niveau des lacs, étudiée en particulier par Forel [*Sur les Seiches du lac Léman* (*Bull. Soc. vaud. des Sc. nat.*, t. XII, t. XIII; *Arch. de Genève*, 1876, 1877, 1885)], a rappelé l'attention de l'auteur sur la théorie de la durée des oscillations simples d'un liquide dans un vase de profondeur finie telle qu'elle avait été formulée par son grand-oncle Johann Rudolf Merian (Bâle, 1828).

L'auteur expose, avec les notations et sous la forme actuelles, les résultats de Merian et examine successivement le mode de détermination des équations différentielles du problème, l'hypothèse des petites oscillations, l'intégration des équations différentielles, le cas d'un vase de profondeur constante et enfin les mouvements à deux et à trois dimensions.

Tome XXVIII; 1886-1887.

Hölder (*O.*). — Sur la propriété de la fonction gamma, de ne satisfaire à aucune équation différentielle algébrique. (1-13).

Presque toutes les fonctions d'une variable introduites dans l'Analyse sont telles qu'il existe une équation algébrique entre la variable arbitraire, la fonction et un certain nombre des dérivées de cette fonction. Il n'en est pas de même pour la fonction gamma.

L'auteur démontre d'abord la propriété en question pour la dérivée logarithmique de la fonction gamma

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\,\frac{d\Gamma(x)}{dx},$$

définie comme fonction analytique univoque ayant partout le caractère d'une fonction rationnelle, en partant de sa propriété fondamentale donnée par l'équation

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x} + \varphi(x),$$

et il en déduit ensuite la même conclusion pour la fonction gamma.

Voigt (*W.*). — Sur la théorie des veines liquides. (14-33, 1 pl.).

Helmholtz et Kirchhoff ont donné une méthode pour résoudre les problèmes du mouvement d'un liquide dans le plan lorsque le liquide possède une surface libre en partie, mais on n'a donné effectivement que peu d'exemples. L'auteur, dans cette Communication, se propose d'appliquer la méthode de Kirchhoff au choc de plusieurs veines liquides.

Rahts (*J.*). — Sur la réduction de l'équation générale du cinquième degré à la forme de Jerrard : extension du procédé proposé par Hermite. (34-60).

L'auteur expose d'abord rapidement les résultats auxquels est arrivé M. Hermite dans les tomes XLI et XLII des *Comptes rendus;* il passe ensuite au calcul des différentes fonctions qui se présentent dans la réduction en question.

Heymann (*W.*). — Théorie des équations trinômes. (61-80).

Dans ce Mémoire, l'auteur se propose de montrer que dans tous les cas l'équation trinôme peut être résolue par des intégrales définies. Il part des formes fondamentales

$$(1) \qquad y^n + y^{n-s} + x = 0,$$

$$(2) \qquad y^n + \xi y^{n-s} + 1 = 0,$$

dans lesquelles on peut toujours transformer l'équation

$$(3) \qquad t^n + at^{n-s} + b = 0,$$

ces deux formes fondamentales étant telles que la solution à laquelle on arrive pour l'équation (3) s'applique exclusivement soit à l'une soit à l'autre des équations (1) et (2).

Dans le cas de la première forme, l'auteur établit successivement les expressions qui donnent les racines différentes de zéro, puis égales à zéro quand x est nul.

Dans le second cas, il n'y a point à considérer ces deux classes de racines.

L'auteur passe ensuite aux développements en séries des intégrales trouvées précédemment et à l'étude de la convergence de ces séries, et il trouve qu'il existe en toute circonstance un développement en série convergente et, par suite, une intégrale acceptable.

Il examine alors en passant ce qui arrive pour l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré en renvoyant, pour plus de détails, à son Mémoire [*Transcendente Auflösung der allgemeinen Gleichung n-ten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 101)] et termine en indiquant la marche qui l'a conduit aux résultats qu'il a précédemment exposés : c'est l'étude des résolvantes différentielles et de l'intégration de ces résolvantes (voir *Math. Ann.*, t. XXVI, et *Zeitschrift Math. u. Phys.*, t. XXXI) qui en est l'origine première.

Dingeldey (*F.*). — Sur la construction de la hessienne d'une courbe rationnelle du troisième ordre. (81-83).

Compléments à l'exposé présenté dans un Mémoire des *Math. Ann.*, t. XXVII, p. 272, sur les courbes rationnelles du troisième ordre. L'auteur montre la relation qui, dans les notations de Grassmann, existe entre la courbe rationnelle du troisième ordre et sa hessienne.

Reichardt (*W.*). — Sur la mise sous forme normale des modules de Borchardt des fonctions hyperelliptiques de genre $p = 2$. (84-98).

Suite des travaux de Klein [*Zur Theorie der Liniencomplexe der ersten und zweiten Grades* (*Math. Ann.*, t. II, p. 1981)], et plus particulièrement de Rohn [*Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusam-*

menhang mit den hyperelliptischen Functionen $p=2$; Dissertat. München, 1878, et *Transformation der hyperelliptischen Functionen* $p=2$ *und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (*Math. Ann.*, t. XV, p. 345)], et de Borchardt [*Ueber die Darstellung der Kummer'sche Fläche 4ter Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen 4 Thetafunctionen mit 2 Variablen* (*Journal de Crelle*, t. 83, p. 240), et *Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 834)].

Fricke (*R.*). — Sur les groupes de substitutions qui appartiennent aux racines du module intégral $k^2(\omega)$ de Legendre. (99-118).

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des fonctions modulaires elliptiques est, comme l'a établi Klein (*Math. Ann.*, t. XVII), d'énumérer et de ranger en classes systématiques tous les sous-groupes contenus dans le groupe des substitutions ω linéaires à coefficients entiers

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Ce problème a été traité pour les sous-groupes dont la particularité arithmétique peut s'exprimer par des congruences auxquelles doivent satisfaire, relativement à un module fixe m, les coefficients α, β, γ, δ. En ce qui concerne les autres sous-groupes, la question subsiste encore de déterminer les propriétés numériques fournissant pour les coefficients α, β, γ, δ une définition arithmétique directe.

L'auteur, pour arriver à un résultat de cette nature, a employé une méthode indirecte.

On pose

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ldots - \cfrac{1}{a_n + \omega}}};$$

à des propriétés arithmétiques de α, β, γ, δ relatives à des sous-groupes particuliers correspondront des propriétés arithmétiques particulières des quantités a.

L'auteur a appliqué cette méthode à l'examen de tous les sous-groupes remarquables de genre $p=1$, et aussi aux racines du module intégral $k^2(\omega)$. Il arrive à ce résultat final que seuls les groupes de $k(\omega)$, $\sqrt{k(\omega)}$, $\sqrt[4]{k(\omega)}$ peuvent être exprimés par des congruences.

Pick (*G.*). — Sur certaines substitutions linéaires à coefficients entiers qui ne peuvent s'exprimer par des congruences algébriques. (109-124).

Le Mémoire de Pick, sur le même sujet que celui de Fricke qui précède, est arrivé à la rédaction des *Mathematische Annalen* un jour après celui de ce dernier. Les deux Mémoires traitent la même question, la solution d'un théorème énoncé il y a longtemps déjà (*Math. Ann.*, t. XVII, p. 63 et suiv.) par

Klein. Les méthodes sont différentes; le dernier auteur emploie en effet, en dernière ligne, un groupe qui, relativement au groupe total des substitutions linéaires entières, est d'indice infiniment élevé.

Kneser (A.). — Le groupe de monodromie d'une équation algébrique lorsque l'on fait une transformation linéaire des variables. (125-132).

Si l'équation irréductible $F(s, z) = 0$ définit s comme fonction algébrique de z, on doit se demander comment se comporte le groupe de monodromie de cette équation par une transformation linéaire des variables. Ce groupe est en général le groupe symétrique, c'est-à-dire le groupe de toutes les substitutions possibles, comme l'a déjà démontré l'auteur dans sa Dissertation inaugurale (*Irreductibilität und Monodromiegruppe algebraischer Gleichungen*. Berlin, 1885), par la considération des ramifications de la fonction.

Dans ce travail, l'auteur se propose de déduire par une voie purement algébrique ce résultat algébrique.

Thieme (H.). — Les surfaces du troisième ordre comme *surfaces d'ordre* de systèmes polaires. (133-151).

Dans son travail [*Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme* (*Zeitschrift Math. u. Phys.*, t. XXIV; 1878)], l'auteur a donné la construction purement géométrique du système des premières polaires d'une surface du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre et de variétés de surfaces du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre. Le mode d'exposition rendait le travail assez difficile à lire. L'auteur donne ici une réduction un peu différente pour un cas particulier, celui des surfaces du troisième ordre.

Gordan (P.). — Sur les équations du cinquième degré. (152-166).

L'auteur s'occupe dans ce Mémoire d'une transformation de l'équation générale du cinquième degré en une forme normale qui ne contient qu'un paramètre. Au moyen de transformations quadratiques, on peut ramener toutes les équations du cinquième degré à la forme

$$x^5 + ax^2 + bx + c,$$

qui ne contiennent plus que *deux* paramètres essentiels. Klein (*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung* 5ten *Grades*, 1884) a comparé ces équations avec une équation qui se présente dans l'étude de l'icosaèdre, qui ne contient qu'un paramètre essentiel Z et dont les racines Y_ν sont des combinaisons linéaires

$$Y_\nu = \sigma w_\nu + \tau t_\nu w_\nu$$

des quantités w_ν, $t_\nu w_\nu$ qui ne dépendent que de Z.

Entre les quantités w_ν et $t_\nu w_\nu$ existent les relations suivantes pour toutes les

valeurs de λ_1 et λ_2

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma(\lambda_1 x_\nu + \lambda_2 x_\nu t_\nu) = 0, \\ \Sigma(\lambda_1 x_\nu + \lambda_2 x_\nu t_\nu)^2 = 0. \end{cases}$$

D'autre part, les quantités $t_\nu = \frac{x'_\nu t_\nu}{x_\nu}$ sont proportionnelles aux racines u_ν de l'équation

$$(2) \qquad u^5 - 10u^3 + 45u + c = 0,$$

c'est-à-dire de la forme normale de Brioschi. Cette même équation (2) permet donc de résoudre toutes les équations qui ont pour racines

$$\sigma x_\nu + \tau t_\nu x_\nu,$$

quelles que soient les valeurs de σ et de τ.

L'auteur se demande si l'on peut déduire directement la forme normale de Brioschi (2) des conditions (1), et il montre que l'on peut, avec ces conditions, transformer très simplement l'équation générale du cinquième degré sous la forme normale de Brioschi. La forme d'Hermite

$$x^5 + ax + b = 0$$

est typique pour les équations du cinquième degré dont l'invariant $C = 0$; mais il faut des relations cubiques pour ramener à cette forme l'équation générale. La forme de Brioschi est typique pour les équations dont l'invariant $B = 0$, et des relations quadratiques suffisent pour la transformation.

Hess (P.). — Compléments à la théorie des triangles et des tétraèdres plusieurs fois perspectifs. (167-260).

Rosanes [*De polarium reciprocarum theoria observationes.* Dissert. Vratisl.; 1865 (*Math. Ann.*, t. II, p. 549-552)], Schröter (*Math. Ann.*, t. II, p. 553-562), et Vályi (*Archiv Math. u. Phys.*, t. LXX, p. 105-110; *Ibid.*, t. II_2, p. 320-324) ont étudié dans le plan les triangles qui peuvent être dans le plan de plus d'une façon en perspective.

Relativement aux tétraèdres, on a plus particulièrement étudié le cas où trois tétraèdres sont en position *desmique;* et ce sujet a été successivement traité par Stephanos (*Bulletin des Sciences,* t. III_2, p. 429-456), par Schröter (*Zeits. Math. u. Phys.*, t. XXVIII, p. 178, et *Journal de Crelle*, t. 93, p. 169), par Reye (*Acta Math.*, t. I, p. 97-108) et par Vietor (*Ber.-Verhandl. nat. Ges. Freiburg,* t. VIII, p. 2; 1884).

L'auteur donne dans ce Mémoire un exposé complet des propriétés de ces triangles et de ces tétraèdres multiplement perspectifs; il arrive, en particulier, à des relations intéressantes entre la théorie des triangles d'une part et celle des polyèdres réguliers; entre la théorie des triedres et celle des figures régulières tracées dans l'espace à quatre dimensions sur un espace sphérique à trois dimensions.

Sturm (R.). — Sur les séries de points égales, les faisceaux de plans et de rayons égaux dans les espaces collinéaires. (261-267).

Sturm (*R.*). — Sur la théorie de la collinéation et de la corrélation. (268-276).

Sturm (*R.*). — Sur les systèmes nuls supérieurs dans l'espace. (277-283).

L'auteur s'est déjà occupé (*Math. Ann.*, t. XIX, p. 461) de quelques systèmes nuls supérieurs. Ameseder (*Journal de Crelle*, t. 97, p. 62) a considéré en particulier le système nul général du second degré et a donné à cette occasion quelques propriétés des systèmes nuls supérieurs. La même question a également été traitée en même temps par Voss (*Math. Ann.*, t. XXIII, p. 45, 359).

L'auteur s'occupe ici de quelques exemples intéressants de systèmes nuls et détermine leurs trois caractéristiques.

Rohn (*K.*). — Les différentes espèces de surfaces réglées du quatrième ordre. (284-308).

Les travaux les plus importants des géomètres sur les surfaces réglées du quatrième ordre sont dus à Chasles [*Mémoire sur les surfaces du troisième et du quatrième degré* (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 888)], à Cayley [*First, second and third Memoir on skew surfaces, otherwise Scrolls* (*Phil. Trans.*, t. CLIII, p. 453; t. CLIV, p. 559, et t. CLIX, p. 111)] et à Cremona [*Sulle superficie gobbe di quarto grado* (*Mem. Bologna*, t. VIII, p. 15)] qui se sont, en particulier, occupés de la classification des surfaces réglées.

La nature de la courbe double sert tout d'abord à la distribution en classes de ces surfaces. Les classes ainsi déterminées se divisent ensuite en espèces, d'après les autres propriétés singulières qui se rencontrent dans ces surfaces.

L'auteur s'occupe dans ce Mémoire non seulement de la division en espèces, mais aussi dans chaque espèce des conditions de réalité qui se présentent. Il a été amené à faire cette étude attentive alors qu'il se proposait de construire une série de dix modèles de surfaces réglées du quatrième ordre qui ont paru chez Brill, à Darmstadt, et qui sont destinés à fournir, sous une forme sensible, les particularités principales présentées par les surfaces considérées.

Pick (*G.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (309-318).

Si l'on se donne une intégrale elliptique de première espèce sous une forme quelconque, il est tout d'abord nécessaire, pour les calculs ultérieurs, de représenter les fonctions elliptiques élémentaires, lorsque l'on y remplace l'argument par l'intégrale donnée, en fonctions explicites des limites et des constantes de l'intégrale.

On connaît depuis longtemps les formules qui résolvent la question dans le cas où la différentielle elliptique est de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

où $f(x)$ est un polynôme du quatrième ou du troisième degré. Elles ont été données, par exemple, par Scheibner [*Zur Theorie der Reduction elliptischen Integrale in reeller Form* (*Abh. math. phys. Cl. sächs. Ges.*, t. XII)] et

d'une façon plus complète, et qui en montre bien l'origine, par Klein [*Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen* (*Math. Ann.*, t. XXVII)].

L'auteur résout ici la question dans le cas où le domaine elliptique est défini par une courbe générale du troisième ordre. Il établit deux séries de formules qui répondent à deux hypothèses différentes relativement à l'argument des fonctions elliptiques. L'une des séries se présente comme absolument analogue aux formules données par Klein pour le domaine binaire; l'autre série est particulièrement intéressante en ce sens qu'elle comprend, comme cas particulier, le système d'équations qui ont été données par Hermite et Brioschi pour la transformation d'une courbe du troisième ordre en la forme normale dite de Weierstrass.

Schönflies (*A.*). — Sur les groupes de mouvements. Premier Mémoire. (319-342).

C. Jordan est le premier qui se soit occupé de déterminer d'une façon complète les groupes de mouvements [*Mémoire sur les groupes de mouvements* (*Annali di Mat.*, t. II_2, p. 167 et 322)].

Les groupes de cette nature ont de l'intérêt, non seulement au point de vue mathématique, mais surtout à l'égard de la théorie de la structure cristalline. La question où il s'agit de trouver toutes les formes cristallines possibles théoriquement conduit aux groupes de mouvement. C'est à ce point de vue que s'était d'abord placé Bravais [*Mémoire sur les systèmes formés par des points, etc.* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIIe Cahier, p. 1)], c'est encore le problème que Sohncke a traité complètement dans son Livre (*Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur*).

Sohncke a laissé au second plan, dans son Livre, les considérations relatives à la théorie des groupes. L'auteur, dans son Mémoire, étudie la question exclusivement en ce qui concerne les groupes de mouvements et montre comment les groupes de mouvement peuvent se composer à l'aide de groupes d'espèce simple.

Schur (*F.*). — Sur la déformation d'un espace à trois dimensions dans un espace plan à quatre dimensions. (343-353).

Suite des travaux de l'auteur sur le sujet de la déformation des espaces dans les espaces linéaires d'un nombre de dimensions supérieur. On sait quelle est la difficulté du problème dans le cas général. L'auteur montre que, même dans le cas spécial qu'il considère ici, on ne peut répondre d'une façon générale aux questions qu'on est amené à se poser. Les conditions sous lesquelles il peut y avoir déformation souffrent toujours des cas d'exception; les conditions nécessaires établies par l'auteur (*Math. Ann.*, t. XXVII) ne sont pas toujours suffisantes.

Nöther (*M.*). — Sur le problème de l'inversion dans la théorie des fonctions abéliennes. (354-380).

La question de l'inversion dans la théorie des fonctions abéliennes a fait le sujet des travaux de Prym [*Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen* (*Wiener Akad.*, 1864), *Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen*

Fläche. Zurich, 1886], de Weber (*Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht* 3, Berlin, 1876), de H. Stahl (*Ueber die Behandlung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale*. Dissert., Berlin, 1882, et *Journal de Crelle*, t. 89) et de l'auteur lui-même dans plusieurs Mémoires publiés dans les *Math. Ann.* et les *Ann. di Mat.*

L'auteur se propose ici d'établir, sous la forme la plus symétrique possible, les formules au moyen desquelles les quotients thêta simples s'expriment en fonction des limites supérieures des intégrales qui constituent les arguments des fonctions thêta. Il déduit ensuite de ces formules une solution nouvelle du problème d'inversion de Jacobi et termine par l'étude de la classification, en deux espèces, des caractéristiques qui s'introduisent dans ses recherches et par leur emploi dans la transformation du premier ordre.

Hilbert (*D.*). — Sur un point de vue général dans les recherches relatives à la théorie des invariants dans le domaine des formes binaires. (381-446).

La théorie des formes binaires, telle qu'elle a été développée jusqu'ici, s'occupe plus particulièrement de problèmes appartenant à deux genres, à deux catégories bien distinctes.

La première catégorie a un caractère plus numérique. On s'y occupe de déterminer le nombre, le degré, l'ordre des formations invariantes et aussi des questions relatives à la structure et à l'établissement de systèmes de formes complets.

La seconde catégorie est relative aux questions qui complètent celles étudiées dans la première; il s'agit alors de la nature et de la signification analytique des formations invariantes. A cette catégorie appartiennent également les recherches sur la mise sous forme canonique et les autres représentations des formes binaires, covariants ou combinants, sur la façon d'obtenir les caractères d'invariance, sur la séparation en espèces des formes binaires, sur les propriétés des formes et des systèmes de formes d'un caractère spécial.

Pour l'étude des questions appartenant à la première catégorie, on a deux méthodes à sa disposition, la méthode symbolique de Clebsch, la méthode énumératrice de Sylvester. En ce qui concerne la seconde catégorie, on ne peut citer aucune méthode générale, si importantes que soient les questions qui lui appartiennent et que l'on a résolues jusqu'ici.

Ce sont là les considérations qui ont engagé l'auteur à traiter, d'une façon systématique, une certaine espèce générale d'invariants et de covariants irrationnels du système basique de formes.

Bolza (*O.*). — Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques de premier ordre et de première espèce aux intégrales elliptiques par une transformation du quatrième degré. (447-456).

L'auteur donne la marche qu'il a suivie et les résultats qu'il a obtenus dans sa Dissertation (*Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische, insbesondere über die Reduction durch eine Transformation vierten Grades*. Göttingen, 1886).

Schröter (*H.*). — L'hexagone de Clebsch. (457-482).

Clebsch, dans son Mémoire [*Ueber die Anwendung der quadratischen Substitutionen auf die Gleichungen fünften Grades und die Theorie des ebenen Fünfecks* (*Math. Ann.*, t. IV, p. 284)], a établi l'existence d'un hexagone plan remarquable qui fournit de dix façons un hexagone de Brianchon. Klein est revenu sur cet hexagone [*Untersuchungen über das Ikosaeder* (*Math. Ann.*, t. XII, p. 531) et *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grades.* Leipzig, 1884] et il a montré comment les propriétés de cet hexagone pouvaient se déduire de la figure de l'icosaèdre dans l'espace. Hess (*Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung.* Leipzig, 1883) avait donné des considérations de même nature; le même auteur, dans un Mémoire sur les triangles et tétraèdres plusieurs fois perspectifs (*Math. Ann.*, t. XXVIII; *voir* plus haut), a démontré analytiquement les propriétés de cette figure.

L'auteur donne un exposé synthétique de ces propriétés en partant précisément des mêmes considérations sur les triangles plusieurs fois perspectifs.

Königsberger (*L.*). — Remarques sur la classification des transcendantes de Liouville. (483-492).

Liouville [*Sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients* (*Journal de Liouville*, t. II et III) dit que la solution d'une équation algébrique peut s'exprimer explicitement en fonction algébrique des coefficients lorsqu'on peut donner à l'aide des six opérations arithmétiques et sous forme finie des formules qui, substituées à la place de l'inconnue, satisfont identiquement à l'équation proposée. Puis il introduit, outre les fonctions algébriques, les transcendantes e^x et $\log x$ et étend dans ces conditions les recherches d'Abel sur la résolution des équations, en étudiant les équations qui peuvent se résoudre avec les seules fonctions algébriques et transcendantes ainsi admises.

Les connaissances acquises maintenant sur l'irréductibilité des équations différentielles algébriques permettent à l'auteur d'établir que Liouville n'a pas formulé la question comme il convient de le faire aujourd'hui et il se propose d'énoncer les problèmes auxquels on est alors conduit dans toute leur généralité.

Caspary (*F.*). — Sur l'application d'identités algébriques à l'établissement de relations entre les fonctions thêta d'une variable. (493-498).

Emploi de certaines identités pour démontrer certaines formules données par Cayley, Jacobi, Gudermann et surtout par Glaisher.

Klein (*F.*). — Sur la théorie des équations générales du sixième et du septième degré. (499-532).

La théorie des équations du cinquième degré, telle que l'auteur l'a exposée dans ses *Vorlesungen über das Ikosaeder*, etc., non seulement s'applique aux équations du quatrième degré, mais peut aussi s'étendre aux équations du

sixième et du septième degré. L'auteur [*Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grades* (*Math. Ann.*, t. XV) a donné des considérations générales sur la solution des équations algébriques quelconques; ces idées trouvent ici une forme plus concrète dans les paragraphes suivants :

I. Exposé de la question.

§ 1. Coup d'œil sur les équations du quatrième et du cinquième degré.

§ 2. Proposition plus générale relative aux équations du sixième et du septième degré.

II. Définition du paramètre z et des groupes de substitution quaternaires correspondants.

§ 3. Généralités sur la connexion entre les x et les z.

§ 4. Sur la façon dont se comportent les z lorsque les x sont soumis aux permutations qu'ils comportent.

§ 5. Formules relatives à la connexion entre les x et les z.

§ 6. Formules relatives aux transformations linéaires des z définies par les permutations des x.

Cas de $n = 6$.

Cas de $n = 7$.

§ 7. Sur la nécessité de l'introduction du double signe qui entre dans les formules de substitution des z.

III. Réduction des équations du sixième et du septième degré aux systèmes d'équations correspondantes en z.

§ 8. Principes généraux de la réduction en question.

§ 9. Formules pour la détermination des droites X′, X″.

§ 10. Calcul du point d'intersection de X′ et X″.

§ 11. Quelques remarques sur les équations de degré quelconque.

Klein (*F.*). — Sur la signification géométrique du théorème d'Abel pour les intégrales hyperelliptiques. (533-560).

Dans le précédent Volume des *Mathematische Annalen* (*Ueber Configurationen welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind*), Klein a établi en particulier ce théorème, que si les coordonnées elliptiques d'une droite sont λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 et si, pour un choix de signe déterminé à l'avance, on a

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \, d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

où l'on doit donner à ν les valeurs 0 et 1 et où l'on a

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=6} (\lambda - k_i),$$

la droite tourne autour d'un point fixe de la surface de Kummer que l'on a

prise, ou bien elle se déplace dans un plan tangent à cette surface. Klein a signalé aussi en note une autre représentation géométrique du théorème d'Abel (p. 138) que Domsch a étudiée dans sa Dissertation (*Grünert's Arch.*, t. II_2) relativement à des différentielles de même nature.

L'auteur se propose ici d'établir des théorèmes de même nature relativement aux variétés générales homofocales du second degré et d'étudier en particulier les groupes remarquables formés sur les espaces du second degré par des espaces linéaires.

Il s'occupe d'abord du cas de l'espace ponctuel à trois dimensions, étend les résultats obtenus à un nombre quelconque de dimensions et termine par le cas de la Géométrie linéaire.

L'auteur fait remarquer la parenté des premières propositions auxquelles il arrive avec celles qui se trouvent dans le Livre de M. Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*).

Hurwitz (*A.*). — Sur les correspondances algébriques et sur le principe de correspondance généralisé. (561-585).

Le principe de correspondance de Chasles, qui n'est valable que dans le cas de points correspondants situés sur une courbe de genre zéro, a été étendu par Cayley (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 586; *Phil. Trans.*, t. CLVIII, p. 145) aux courbes de genre quelconque. Brill a donné une démonstration du théorème généralisé dans les *Mathematische Annalen* (t. VI, p. 33, et t. VII, p. 607).

Le principe de correspondance ainsi généralisé s'énonce alors de la sorte :

Entre les coordonnées $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ de deux points x, y d'une courbe algébrique C de genre p, on se donne une équation algébrique

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0:$$

à tout point x de la courbe répond un nombre déterminé α de points y, variables avec x et différents en général de x; de même, à tout point y correspond un nombre β de points x variables avec y et différents en général de y. Il arrive que les deux points x, y se confondent dans un nombre de cas égal à

$$\alpha + \beta + 2p\gamma.$$

Dans cette expression, γ est un nombre positif qui exprime combien de points d'intersection de la courbe $\Psi(x \mid y) = 0$ ou $\Psi(y \mid x) = 0$ avec la courbe C tombent au point y; y_1, y_2, y_3 étant les coordonnées d'un point quelconque y de la courbe C.

On suppose dans cet énoncé que la correspondance algébrique sur la courbe C est définie par une équation $\Psi = 0$. Mais il y a des exemples où existent des correspondances pour lesquelles l'hypothèse précédente n'est pas vraie.

L'auteur s'est, par suite, posé la question de déterminer toutes les correspondances algébriques possibles et d'établir le nombre de leurs coïncidences. Au lieu de la courbe algébrique, il prend comme support de la correspondance une surface de Riemann, en sorte que les résultats auxquels il arrive s'appliquent non seulement aux courbes algébriques planes, mais, d'une façon générale, aux éléments géométriques à une dimension qui sont définis par un nombre quelconque d'équations algébriques.

Markoff (*A.*). — Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. Première Note. (586-593).

La question est la suivante : Obtenir tous les cas où le produit de deux valeurs de y satisfaisant à l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

se réduit à une fonction entière de y.

L'auteur forme l'équation différentielle du troisième ordre, à laquelle satisfait le produit de deux intégrales de l'équation proposée; puis il détermine les conditions sous lesquelles cette équation du troisième ordre admet comme solution un polynôme entier.

Brioschi (*F.*). — Sur la transformation du troisième degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (Extrait d'une Lettre à M. Krause.) (594-596).

Krause (*M.*). — Sur la transformation du troisième degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (Extrait d'une Lettre à M. F. Brioschi.) (597-600).

Tome XXIX; 1887.

Affolter (*G.*). — Sur les groupes de lignes droites sur les surfaces d'ordre supérieur. (1-26).

Suite des recherches dont la publication a commencé dans le tome XXVII des *Mathematische Annalen*.

Ici encore, l'auteur se propose d'étudier, d'une façon générale, les groupes possibles de droites existant sur les surfaces et réserve pour une autre Communication la démonstration effective de l'existence de ces groupes et la détermination des surfaces correspondantes.

Le travail contient un nombre considérable de propriétés des droites considérées et nous devons nécessairement y renvoyer.

Bochert (*A.*). — Sur la limite de transitivité des groupes de substitutions qui ne contiennent pas le groupe alterné de leur degré. (27-49).

La question importante de la limite de transitivité d'un groupe de substitutions de n lettres qui contient moins de la moitié des substitutions possibles avec ces lettres et qui est, par suite, moins de $(n-2)$ fois transitif a été étudiée par Jordan (*Bull. de la Soc. math.*, t. I). Jordan y détermine, pour la limite en question, des valeurs très faibles pour des nombres donnés déterminés. Le même auteur, dans son *Traité des substitutions*, était arrivé à des limites plus élevées, et par un procédé plus compliqué.

Chacun des deux procédés présente cependant ses avantages et il peut arriver que la détermination la plus ancienne, au moyen de fonctions de degré régulièrement croissant, donne dans certains cas des limites plus précises que les derniers théorèmes de Jordan. Et c'est là la question principale considérée par l'auteur dans son Mémoire.

Schœnflies (*A.*). — Sur les groupes de mouvements (50-80).

Ce Mémoire est destiné à compléter les recherches de l'auteur sur les groupes de mouvements dont la première Partie a paru dans le tome XXVIII des *Mathematische Annalen*. Dans la première Partie l'auteur avait étudié les groupes qui se déduisent du groupe cyclique et de celui du cube; il considère ici les groupes généraux de mouvements qui proviennent de la même façon des groupes du dièdre pour les cas $n = 3$, 4, 6 et des groupes du tétraèdre et de l'octaèdre.

Rohn (*K.*). — Les surfaces du quatrième ordre au point de vue de leurs points doubles et de leur conformation. Avec une planche. (81-96).

L'auteur donne ici l'analyse d'un Mémoire couronné par la Société Jablonowski, à Leipzig.

Le travail contient deux Parties : la première traite des surfaces du quatrième ordre possédant des points doubles, la seconde des rapports de configuration des surfaces du quatrième ordre d'une façon générale. La première Partie constitue en somme la suite des travaux de Cayley [*First, second and third Memoirs on quartic surfaces*, t. III (*Proc. Lond. Math. Soc.*)]. Cayley donne la série complète des surfaces qui ont huit ou neuf points doubles et son énumération, pour le cas des surfaces qui possèdent dix points doubles, est incomplète. Dans son travail, l'auteur donne d'une façon systématique toutes les surfaces du quatrième ordre ayant de huit à seize points doubles. Les surfaces du quatrième ordre dont Kummer s'est occupé [*Die algebraische Strahlensysteme, insbesondere der* 1 *und* 2 *Ordnung* (*Abh. Berl. Akad.*, 1866); *Flächen welche von einer Schaar von Flächen* 2 *Grades eingehüllt werden*] trouvent donc aussi leur place dans cette énumération. La seconde Partie est relative aux questions pures de configuration. L'auteur introduit la notation importante de surface limite, ce qui lui permet d'amener des simplifications utiles dans une aussi riche variété de formes. De plus, en ce qui concerne les surfaces ayant un seul point double, l'auteur a recours à la considération simultanée des courbes de projection du sixième ordre, que l'on obtient en prenant le point double pour centre de projection.

Ce procédé, qui consiste à considérer la projection de la surface et aussi la projection des courbes situées sur la surface en prenant comme centre de projection un point double, est constamment employé dans tout le cours du travail.

Fricke (*R.*). — Les groupes de congruences du sixième échelon. (97-122).

L'auteur se propose dans ce Mémoire de donner un exposé complet des fonctions modulaires elliptiques correspondant aux groupes de congruence du sixième échelon.

Klein [*Ueber die elliptischen Normalcurven des n^{ten} Ordnung* (*Abh. math. phys. Cl. Sachs. Ges. Wiss.*, t. XIII)] a établi les systèmes de modules seulement pour le cas d'un échelon impair; Hurwitz [*Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftriten* (*Math. Ann.*, t. XXVII, 183)] a étendu les considérations de Klein, mais, dans ses recherches, l'échelon 6 se trouve encore exclu.

L'auteur s'est placé dans son travail à un autre point de vue encore. L'examen du cas de l'échelon égal à 6 lui a semblé présenter aussi quelque intérêt en ce sens que cet échelon, comme ceux de la forme $2p$, p étant premier, présente quelques rapports spéciaux avec une portion de la théorie des fonctions elliptiques intéressantes au moins au point de vue historique. Il s'agit des relations qui existent entre les valeurs pour l'argument nul des fonctions $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et les quantités qui en résultent par une transformation du $p^{\text{ième}}$ ordre. L'examen de l'échelon $2p$ simplifie considérablement l'établissement de ces relations que l'on rencontre déjà dans Gauss (*Werke*, t. III, p. 470) et qui ont occupé Schröter, Göring, Krauss, Müller, Rhode, etc. L'auteur examine en particulier dans son Mémoire le cas de la transformation du troisième ordre.

Kopcke (*A.*). — Sur la différentiabilité et la représentabilité (*Anschaulichkeit*) des fonctions continues. Avec une planche. (123-140).

On sait depuis longtemps qu'une fonction continue n'a pas nécessairement de dérivée. Un des premiers exemples que l'on a donné d'une fonction continue n'admettant pour aucune valeur de la variable réelle de dérivée est celui de Weierstrass étudié depuis par Wiener (*Journal de Crelle*, t. 90). On ne peut se représenter une suite continue de points à laquelle on ne peut nulle part mener de tangente. L'existence d'une telle suite est pourtant chose démontrée. Une autre question de même nature est relative à l'existence d'une courbe ou plutôt d'une suite continue de points présentant, dans un intervalle aussi petit que l'on veut, une infinité de maxima et de minima.

L'auteur établit ici l'existence de fonctions continues admettant une dérivée et présentant dans tout intervalle une infinité de maxima et de minima.

Netto (*E.*). — Sur un algorithme pour la solution des équations numériques algébriques. (141-147).

Soit l'équation

$$x^n - x - a = 0;$$

on a souvent, pour la résoudre, employé le procédé suivant : on part d'une valeur x_0 quelconque, et l'on en déduit une suite de valeurs x_1, x_2, ... par la relation

$$x_{p+1} = \sqrt[n]{x_p + a};$$

lorsque p augmente indéfiniment, on approche en général d'une valeur limite qui est racine de l'équation proposée. La condition de convergence de ce procédé n'a pas été étudiée, c'est là la question dont s'occupe l'auteur, et il établit les conditions dans le cas d'une équation plus générale que l'équation proposée, ces conditions devenant d'ailleurs très simples dans le cas présent.

Netto (*E.*). — Sur la théorie des fonctions itérées. (148-153).

Soit $\Theta(x)$ une fonction entière et rationnelle, et posons

$$\Theta[\Theta(x)] = \Theta_2(x), \qquad \Theta[\Theta_2(x)] = \Theta_3(x), \quad \ldots.$$

Ce travail contient des propositions remarquables sur la façon dont se comportent les racines des équations

$$\Theta(x) - x = 0, \qquad \Theta_p(x) - x = 0, \qquad T_p(x) = \frac{\Theta_p(x) - x}{\Theta(x) - x} = 0.$$

Reyes y Prosper (*V.*). — Sur la Géométrie non euclidienne. (154-156).

C. von Staudt a montré que la Géométrie de position est indépendante de toute idée de mesure. Klein a établi qu'elle est aussi indépendante de toute hypothèse sur la théorie des parallèles. L'auteur se propose de simplifier ici les démonstrations de Klein.

Witting (*A.*). — Sur les fonctions de Jacobi du $k^{\text{ième}}$ ordre à deux variables. (157-170).

Dans le présent travail, l'auteur se propose d'étudier les fonctions de Jacobi du $k^{\text{ième}}$ ordre à deux variables, au point de vue de leur transformation, d'une façon analogue à celle employée depuis longtemps déjà dans la théorie des fonctions elliptiques. Il est nécessaire dans ce but de mettre les fonctions thêta sous une forme normale; il faut former des fonctions de Jacobi qui se comportent à l'égard de la transformation des périodes de la façon la plus simple possible. Les quatre fonctions sigma sont, à ce point de vue, d'importance fondamentale à l'égard des fonctions de Jacobi du premier ordre. Par une transformation linéaire, la fonction sigma impaire reste invariable, les trois autres fonctions se permutant alors sans l'introduction de facteurs. Klein [*Ueber die elliptische Normalcurven der N^{ten} Ordnung* (*Abh. math. phys. Cl. Sächs. Ges. Wiss.*, t. XIII)] a montré comment on pouvait étendre cette propriété aux fonctions de Jacobi du $k^{\text{ième}}$ ordre, en introduisant certaines fonctions X_α, Y_α, Z_α qui, par une transformation linéaire des périodes, se permutent, avec des coefficients numériques constants. Le cas où k est impair a été étudié par Hurwitz (*Math. Ann.*, t. XXVII). Dans le cas des fonctions de deux variables, Klein [*Hyperelliptische Sigmafunctionen* (*Math. Ann.*, t. XXVII)] a établi l'existence de fonctions qu'il appelle σ et Σ, telles que par une transformation linéaire les premières permutent entre elles, tandis que les secondes sont absolument invariables.

A l'aide des fonctions sigma hyperelliptiques, l'auteur arrive à faire dans la même direction un pas de plus et à former des fonctions de Jacobi à deux variables $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ qui, de même que les fonctions analogues X_α dans le cas des fonctions elliptiques, donnent lieu à une permutation linéaire, homogène, à coefficients numériques.

L'auteur ne considère ici, pour plus de simplicité, que le cas de k impair.

Kneser (*A.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques. (171-186).

Dans un Mémoire publié dans le tome XXVIII des *Mathematische Annalen* (*Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabelen*), l'auteur était implicitement arrivé à un théorème général relatif aux fonctions algébriques.

Ce théorème est assez facile à démontrer, mais la réciproque présentait quelques difficultés. L'auteur revient sur cette proposition importante en ce sens, qu'elle permet de donner un critérium pour décider si une fonction algébrique donnée de plusieurs variables peut être ou non représentée par une fonction rationnelle de plusieurs fonctions algébriques d'une variable chacune.

Koppe. — Sur les plus grands entiers contenus dans les multiples d'une fraction continue. (187-233).

Krauss (*J.*). — La signification géométrique d'un certain invariant dans les collinéations planes. (234-238).

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \xi_i &= m_{i1}\xi'_1 + m_{i2}\xi'_2 + m_{i3}\xi'_3, \\ \xi''_i &= n_{i1}\xi'_1 + n_{i2}\xi'_2 + n_{i3}\xi'_3, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

l'auteur étudie la signification géométrique de l'expression $z = 0$ où l'on pose

$$\begin{aligned} z = &+ m_{22}n_{33} + m_{33}n_{22} + m_{33}n_{11} + m_{11}n_{33} + m_{11}n_{22} + m_{22}n_{11} \\ &- m_{23}n_{32} - m_{32}n_{23} - m_{31}n_{13} - m_{13}n_{31} - m_{12}n_{21} + m_{21}n_{12}. \end{aligned}$$

Petersen (*J.*). — Remarques sur la démonstration du théorème sur la somme des angles du triangle. (239-246).

« La raison du manque de clarté qui se rencontre trop souvent dans la conception des premiers principes des sciences mathématiques consiste, selon moi, pour la plus grande partie, dans ce fait que l'on confond souvent les Mathématiques, science logique pure, avec la Physique, qui est essentiellement une science expérimentale. Les Mathématiques choisissent arbitrairement leurs hypothèses et en déduisent tout ce qui peut logiquement s'en déduire. Que, pour des raisons pratiques, les hypothèses soient choisies en tenant compte des faits de la nature, cela est possible; mais cela n'a, au point de vue scientifique, aucune signification, aucune importance. »

C'est là, en somme, l'idée fondamentale qui a toujours guidé Hoüel (*Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie*, Greifswald, 1863; *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, Paris, 1867) dans ses recherches sur les éléments de la Géométrie et particulièrement dans l'étude de la question des parallèles, si intimement liée à celle qui fait le sujet du Mémoire de Petersen. Le travail contient un exposé des conclusions auxquelles on arrive relativement à la somme des angles d'un triangle dans la Géométrie de Lobatchewski, de Bolyai, de Cayley et Klein.

Markoff (*A.*). — Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. (Seconde Note). (247-258).

Déterminer tous les cas où l'équation différentielle

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

admet une intégrale de la forme

$$Xy'+Yy=0$$

ou bien

$$Xy'^2+Yy'y+Xy^2=0,$$

X, Y étant des fonctions rationnelles de x. Cette question est importante dans la détermination des cas où l'équation différentielle considérée s'obtient en quantités explicites finies.

Pick (*G.*). — Sur la théorie des fonctions abéliennes. (259-271).

L'auteur se propose ici d'étudier, relativement aux fonctions abéliennes, la question soulevée et résolue par Klein [*Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen* (*Math. Ann.*, t. XXVII)] relativement aux fonctions hyperelliptiques et particulièrement à celles de genre 2.

L'auteur ne considère pas le cas quelconque, mais simplement celui des fonctions abéliennes qui répondent à une courbe algébrique plane sans point double ni point de rebroussement.

La courbe choisie

$$a_x^n=0$$

est donc d'ordre n et de genre p, où

$$p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Wiltheiss (*E.*). — Sur une équation aux dérivées partielles pour les fonctions thêta à deux arguments et sur leurs développements en séries. (272-298).

Dans le tome 98 du *Journal de Crelle*, l'auteur a donné les équations différentielles qui relient les dérivées des fonctions thêta prises par rapport aux arguments et aux paramètres.

Il se propose ici, dans le cas des fonctions thêta de deux arguments, de transformer ces équations différentielles, en sorte que la propriété invariante des fonctions thêta, que Klein a signalée (*Math. Ann.*, t. XXVII), se manifeste clairement, c'est-à-dire que les différentiations se présentent de la façon dont cela a lieu dans la formation des invariants et des covariants.

Ces équations fournissent alors immédiatement des formules de récursion qui permettent de déduire les termes du $n^{\text{ième}}$ ordre relativement aux arguments u_1 et u_2 dans le développement en séries suivant les puissances des arguments des termes d'ordre inférieur, et, en fait, au moyen d'opérations en tout analogues à celles que l'on emploie dans la formation des invariants et des covariants. Brioschi (*Rendic. Accad. Lincei*, t. I, p. 199, 215 et 302), a déjà obtenu en partant des équations différentielles des formules de récursion analogues, mais, chez Brioschi, un des six points singuliers était supposé rejeté à l'infini, en sorte que la propriété invariante des fonctions thêta ne se manifestait pas aussi clairement que cela a lieu dans le présent Mémoire.

Schröder (*F.*). — Table des fonctions univoques réversibles à deux variables dans les domaines numériques les plus simples. (299-317).

Gordan (*P.*). — Sur les équations biquadratiques. (318-326).

On sait que l'on peut par une transformation de Tschirnhausen convenablement choisie réduire une équation générale du cinquième degré à une autre équation du cinquième degré où n'entre qu'un seul paramètre. Les coefficients de la fonction de transformation ne peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des coefficients a de l'équation primitive; ils dépendent rationnellement des a et de certaines quantités R qui se déduisent des quantités a au moyen d'équations quadratiques. Toutes ces équations quadratiques ne peuvent pas être résolues rationnellement, si l'on y remplace les a par leurs expressions en fonction des racines.

Les R, qui sont des quantités irrationnelles, non seulement relativement aux coefficients, mais aussi aux racines de l'équation primitive, s'appellent *irrationelles accessoires.*

On est conduit à se demander si ces irrationnelles accessoires sont nécessaires ou non pour la transformation de l'équation du cinquième degré en une équation à un seul paramètre.

Kronecker (*Journal de Crelle,* t. 61) s'est prononcé pour l'affirmative; il a énoncé cette proposition que les équations du cinquième degré, même si on leur adjoint la racine carrée du discriminant, n'ont aucune résolvante qui ne contienne qu'un seul paramètre.

Klein (*Das Ikosaeder und die Gleichungen* 5ten *Grades*) a démontré la justesse de cette proposition en partant de certaines propriétés remarquables de l'icosaèdre.

L'auteur se propose de donner une démonstration nouvelle du théorème de Kronecker en s'appuyant sur une propriété des équations biquadratiques.

Brioschi (*F.*). — Sur la transformation des équations algébriques par des covariants. (327-330).

Soit

$$f(x, y) = (a_0 a_1 \ldots a_n)(xy)^n$$

une forme de degré n, et

$$\varphi(x, y) = (c_0 c_1 \ldots c_n)(xy)^n$$

un covariant de f d'ordre n. Supposons que $f(x, 1) = 0$ ait n racines inégales, et posons

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_0 x_\nu + a_1, \\ \alpha_2 &= a_0 x_\nu^2 + 2 a_1 x_\nu + a_2, \\ \alpha_3 &= a_0 x_\nu^3 + 3 a_1 x_\nu^2 + 3 a_2 x_\nu + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

la valeur de $\varphi(x, 1)$ s'obtient en remplaçant dans le dernier coefficient c_n du covariant $\varphi(x, y)$ les coefficients $a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n$ respectivement par les quantités $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-1}\, 0$.

Démonstration de ce théorème et applications.

Capelli (*A.*). — Réduction de l'opération Ω de Cayley à des opérations polaires ordinaires. (331-338).

Soit n séries de variables

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, \end{matrix}$$

et Ω l'opération de Cayley

$$\Omega = \Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Représentons par

$$H = (xy\ldots u)\,\Omega$$

une opération obtenue en multipliant l'opération Ω par le déterminant des variables; l'opération H peut toujours s'exprimer par un ensemble d'opérations polaires D_{pq}, p et q étant deux quelconques des quantités $x, y, \ldots, u$ et

$$D_{pq} = q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + q_2\frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots + q_n\frac{\partial}{\partial p_n},$$

H se mettant sous la forme d'un déterminant symbolique.

Noether (*M.*). — Sur les différentielles algébriques totales. (339-381).

Extension et généralisation des propriétés dues à Picard [*Comptes rendus*, 1 et 29 décembre 1884; *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce* (*Journal de Liouville*, t. I_4, 1885)] et Poincaré (*Comptes rendus*, 29 décembre 1884).

§ 1. Forme des expressions différentielles.
§ 2. Condition d'intégrabilité.
§ 3. Transformation de l'expression différentielle.
§ 4. Transformation univoque de l'expression différentielle.
§ 5. Conditions pour que les expressions différentielles restent finies aux éléments multiples de la surface.
§ 6. Autres méthodes de détermination de ces conditions.
§ 7. Les surfaces de genre 1 à deux intégrales finies indépendantes.

Weiss (*W.*). — Sur une démonstration de la généralisation de Zeuthen du théorème sur la conservation du genre. (382-385).

Zeuthen (*Math. Ann.*, t. III) a donné du théorème de Riemann, que deux courbes algébriques dont les points se correspondent univoquement sont du même genre, la généralisation suivante :

S'il existe entre les points de deux courbes de genres respectifs p_1 et p une correspondance $x_1 x_2$ voque et s'il se présente respectivement l_1 et l_2 coïncidences, on a la relation

$$l_1 - l_2 = 2x_1(p_1 - 1) - 2x_2(p - 1).$$

L'auteur donne de ce théorème une démonstration nouvelle fondée sur des considérations de géométrie dans l'espace.

Bobek (*K.*). — Sur les courbes hyperelliptiques. (386-412).

Une courbe algébrique C_m^p d'ordre m et de genre $p > 1$ peut contenir un seul faisceau linéaire $g_2^{(1)}$ de groupes de deux points et, lorsque cela a lieu, la courbe est hyperelliptique.

La présence du $g_2^{(1)}$ se fait aussi ressentir sur la courbe adjointe d'ordre $m - 3$ et l'on a cette propriété qui caractérise également bien les courbes hyperelliptiques que toute courbe adjointe d'ordre $m - 3$ qui passe par un point de C_m^p passe par un second point de la même courbe qui est dans $g_2^{(1)}$ le point correspondant au premier point choisi.

L'auteur se propose ici d'employer le $g_2^{(1)}$ qui existe sur la courbe C_m^p pour établir une correspondance entre cette courbe et deux faisceaux de courbes rationnelles de l'ordre le plus petit possible. Cela permet alors de construire la courbe C_m^p comme lieu des points d'intersection des courbes correspondantes des faisceaux.

Dans la première Partie l'auteur détermine les faisceaux de courbes du plus petit ordre possible; dans la seconde section il établit les équations de deux courbes hyperelliptiques et le système complet des courbes adjointes d'ordre $m - 3$. Le premier cas se rapporte aux courbes hyperelliptiques générales d'ordre m et de genre $m - 3$; le second ne donne que des courbes particulières de genre p et d'ordre $m = 2p$ pour $p > 4$.

Nekrassof (*P.*). — Sur les équations trinômes. (413-430).

Exposé des résultats obtenus par l'auteur dans un travail couronné par l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, et publié en 1883 dans le *Journal de la Société mathématique de Moscou* sous le titre : *Étude des équations de la forme* $u^m - pu^n - q = 0$.

I. Propriétés fondamentales sur la distribution des racines de l'équation trinôme dans le plan imaginaire, leurs développements en séries et leurs expressions par des intégrales.

II. Examen de la convergence des séries et propriétés de leurs termes complémentaires.

III. Application des propriétés de l'équation à trois termes au développement en série de quelques intégrales définies.

IV. Application des propriétés de l'équation trinôme à l'intégration d'une équation différentielle.

Maisano (*G.*). — Équation de la courbe qui détermine les points de contact des tangentes doubles à la courbe générale du cinquième degré. (431-446).

L'équation de la courbe qui détache sur la courbe générale du $n^{ième}$ degré

les points de contact des tangentes doubles est de degré $(n-2)(n^2-9)$. On n'a jusqu'ici calculé effectivement cette équation que pour le cas le plus simple où $n=4$. L'auteur s'est proposé de résoudre la question dans le cas de $n=5$ et il a naturellement recours au calcul symbolique.

Meyer (*F.*). — Sur les procédés algébriques reliés à la génération des courbes gauches du quatrième ordre et de seconde espèce. (447-467).

L'étude de la courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce a fait le sujet des travaux de Study [*Ueber die rationalen Raumcurven* (*Leipziger Ber.*, janvier 1886)] et de Jolles (*Die Theorie der Osculanten und das Sehnensystem der Raumcurve.* IV. *Ordnung.* II. *Species, Habilitationsschrift;* Aix-la-Chapelle, 1881). On a été conduit à relier les propriétés projectives dans l'espace, dans l'ordre quaternaire de ces courbes, aux résultats de la Géométrie sur la courbe elle-même, c'est-à-dire dans l'ordre binaire; autrement dit, on a été conduit à déterminer des procédés invariants qui comprennent simultanément les deux ordres de recherches en question.

Le travail de l'auteur est destiné à mettre encore plus en relief les relations de parenté entre les domaines binaire et quaternaire.

Staude (*O.*). — Sur une espèce de fonctions de deux variables doublement périodiques à périodes réelles. (468-485).

§ 1. Exposé du problème d'inversion en question.

§ 2. Séparation du problème d'inversion proposé en deux problèmes d'inversion.

§ 3. Univoquie des fonctions t_1, t_2 de u_1, u_2.

§ 4. Univoquie des fonctions u_1, u_2 de t_1, t_2.

§ 5. Périodicité double réelle de t_1, t_2.

§ 6. Inversion des intégrales hyperelliptiques dans le domaine réel.

§ 7. Formation des fonctions doublement périodiques considérées à périodes réelles.

§ 8. Sur une espèce de fonction d'une seule variable réelle qui n'est périodique que sous certaines conditions.

Harnack (*A.*). — Sur les oscillations des cordes tendues par des coins. (486-499).

Christoffel [*Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten* et *Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper* (*Ann. di Mat.* t. VIII)] a établi à quelles conditions on doit avoir égard dans l'intégration des équations aux dérivées partielles de la Mécanique, lorsque les hypothèses faites originairement sur la continuité des dérivées de la fonction cherchée cessent de subsister. Pour le cas le plus simple de cette espèce, pour les oscillations des cordes tendues, qui sont soutenues par des coins, Christoffel ne donne que

brièvement ces conditions et il remarque justement qu'il est inadmissible d'appliquer, sans explication ultérieure, les formules que l'on a déterminées dans le cas du mouvement transversal pour une courbure continue.

L'auteur se propose d'étudier ici cette question. La démonstration que la présence de coins n'a aucune influence ne repose pas sur les propriétés des séries de Fourier employées, mais sur le caractère intime de ces conditions. D'ailleurs l'emploi des séries de Fourier simplifie, sans aucun doute, l'étude du mouvement considéré.

Hess (*H.*). — Sur le gyroscope dans le cas où l'on choisit pour le système momentané de forces qui agissent le système le plus général. (500-580).

L'auteur a déjà étudié (*Math. Ann.*, t. XIX, 121-154) le mouvement du gyroscope dans le cas où le corps, de révolution, est soumis à une simple rotation autour de son axe. Il s'occupe ici, dans le cas le plus général d'un système momentané de forces quelconques, de déterminer :

I. Le mouvement de l'axe du gyroscope dans l'espace.

II. Les formes du cône mobile de la polhodie et du cône fixe de l'herpolhodie, qui, d'après Poinsot, en roulant l'un sur l'autre déterminent le transfert d'une position à une autre du corps animé de rotation.

III. La position de l'axe particulier dans l'espace le long duquel, d'après Euler, il suffit d'effectuer une seule rotation d'amplitude finie pour amener immédiatement le corps de sa première position à la seconde et la grandeur de cette amplitude.

Une planche lithographiée est annexée au Mémoire.

Caspary (*F.*). — Remarques sur les tétraèdres desmiques. (581-582).

Détermination excessivement simple de points qui sont les sommets de trois tétraèdres desmiques et d'où peuvent se déduire ainsi directement les résultats dus à Stephanos, Véronèse, Hermes, Schröter, Reye, etc.

ACTA MATHEMATICA.

Tome IV; 1884 (1).

Mittag-Leffler. — Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. (1-79).

C'est le Mémoire définitif où se trouve exposé, avec toute l'ampleur désirable, l'ensemble des recherches de l'auteur sur le sujet indiqué par le titre, et qui ont pour point de départ la proposition classique à laquelle le nom de M. Mittag-Leffler restera attaché, sur la représentation d'une fonction uniforme dont les points singuliers (pôles ou points singuliers essentiels) forment un ensemble admettant le point ∞ pour limite unique (2).

La démonstration si simple de cette proposition, démonstration que M. Mittag-Leffler et M. Weierstrass ont trouvée presque simultanément, s'étend à des propositions analogues, mais d'une généralité beaucoup plus élevée, et l'on voit ainsi combien elle est dans la nature des choses. Il y a plus, ce même mode de démonstration, comme M. Appell le montre dans un Mémoire inséré dans le même Recueil, s'applique à une généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler qui regarde, non plus les fonctions analytiques d'une variable complexe, mais les fonctions de trois variables réelles qui vérifient l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

Le théorème qui constitue le fond du Mémoire peut, dans toute sa généralité, être énoncé comme il suit (3):

Soit Q un ensemble isolé de points appartenant au domaine d'une variable x à variabilité illimitée, soit Q' l'ensemble dérivé; soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les points de Q; à chacun de ces points a_i on associera une fonction

$$G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right)$$

représentée par une série de la forme

$$\frac{A_i^{(1)}}{x-a_i}+\frac{A_i^{(2)}}{(x-a_i)^2}+\ldots+\frac{A_i^{(n)}}{(x-a_i)^n}+\ldots,$$

où tous les coefficients A ne soient pas nuls, convergente enfin quelle que soit la valeur de $\frac{1}{x-a_i}$, et d'ailleurs arbitraire : il existe une fonction uniforme, se comportant partout d'une manière régulière, sauf aux points de l'ensemble Q + Q', formé par la réunion des deux ensembles Q et Q', telle enfin que, aux

(1) Voir *Bulletin*, XI_2, p. 137.

(2) Voir *Bulletin*, V_1, p. 113.

(3) *Voir*, pour la terminologie de M. Cantor, *Bulletin*, VIII_2, p. 162.

environs de a_i, sa différence avec $G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right)$ soit développable en une série qui procède suivant les puissances entières et positives de $x-a_i$.

Si du champ de la variable on supprime l'ensemble de points $Q+Q'$, il reste un ensemble de *continua* (¹) d'une seule pièce; dans chacun d'eux, la fonction construite par M. Mittag-Leffler est une *même* fonction monogène et uniforme. Si l'ensemble $Q+Q'$ est la limite complète d'un tel *continuum*, cette fonction est régulière pour tout point situé au dedans du *continuum;* elle se comporte comme il a été expliqué dans le voisinage de chaque point de Q; enfin tout point de $Q+Q'$ est, pour elle, un point singulier.

L'auteur montre aussi, en supposant encore que l'ensemble $Q+Q'$ limite entièrement un continuum $\mathcal{A}$, que, si l'on désigne par

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots$$

les points de l'ensemble isolé Q et par

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_\nu,\ \ldots$$

des entiers positifs ou négatifs, on peut construire une fonction régulière en tout point de $\mathcal{A}$, ne s'annulant en aucun point de $\mathcal{A}$ et pouvant se mettre sous la forme

$$(x-a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{p}(x-a_\nu)}$$

aux environs de a_ν; $\mathfrak{p}(x-a_\nu)$ désigne une série procédant suivant les puissances entières et positives de $x-a_\nu$. Chaque point de Q' est un point singulier essentiel de Q. C'est la généralisation d'une proposition fondamentale due à M. Weierstrass.

De ces propositions en résultent d'autres qui permettent, une fonction monogène uniforme étant donnée, de construire une expression analytique qui se comporte régulièrement là où la fonction donnée se comporte elle-même régulièrement et qui, dans le voisinage d'un nombre infini de points singuliers isolés, représente celle-ci au degré d'approximation que l'on veut. La différence entre les deux fonctions a ainsi perdu un nombre infini de points singuliers isolés. On pourra procéder sur cette différence comme sur la fonction proposée; l'application continuelle de ce procédé conduit ainsi à des fonctions de moins en moins compliquées et *aboutit toujours* à une fonction simple; c'est ce que les recherches récentes de M. Cantor et de M. Bendigson ont permis à M. Mittag-Leffler d'établir entièrement.

Mittag-Leffler. — Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. (80-88).

Les recherches précédemment analysées avaient pour point de départ le théorème du commandant Laurent : ce théorème, on le déduit d'habitude de la théorie de Cauchy sur les intégrales à variable imaginaire. Afin de n'avoir rien à emprunter à cette théorie, M. Mittag-Leffler donne de cette proposition

(¹) Le mot *continuum* est pris dans le sens de M. Weierstrass; voir *Bulletin*, V_2, p. 159.

capitale une démonstration nouvelle qui reste dans la pure doctrine de M. Weierstrass.

Hermite et *Fuchs*. — Sur un développement en fraction continue. (89-92).

Soient α, β deux exposants dont la somme est un entier k, et $\frac{B}{A}$ la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$. Les polynômes A et B, des degrés n et $n+k$ se déterminent sauf un facteur constant en posant

$$D_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}A,$$
$$D_x^{n+k}[(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta}] = (x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}B.$$

Darboux (*G.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre des systèmes orthogonaux. (92-96).

Formation très simple de cette équation, avec un système quelconque de variables, en partant de la théorie de Lamé.

Laguerre. — Sur quelques points de la théorie des équations numériques. (97-120).

Soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n;$$

posons, en désignant par ξ, η deux nombres dont le premier est positif ou nul et le second plus grand que le premier

$$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}f(\eta) - f(x\eta)}{x-1} + \xi\frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi} = P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + \ldots + P_n;$$

les coefficients P s'expriment aisément au moyen des quantités ξ, η et des coefficients a et l'on a la proposition suivante, dont l'auteur tire de nombreuses conséquences.

Le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre ξ et η, est au plus égal au nombre de variations du polynôme $\varphi(x)$ et la différence, s'il y en a une, est un nombre pair.

Voici, dans un autre ordre d'idées, une proposition dont l'auteur montre la fécondité.

Soient k un nombre quelconque et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des nombres positifs quelconques; posons

$$\Theta(x) = e^{kx}(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_p);$$

si l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en sera de même de l'équation

$$a_0\Theta(0) + a_1\Theta(1)x + a_2\Theta(2)x^2 + \ldots + a_n\Theta(n)x^n = 0;$$

en supposant que n augmente indéfiniment, on a des conclusions relatives aux fonctions de genre zéro ou de genre un.

Bjerknes. — Recherches hydrodynamiques. Premier Mémoire. Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires. (121-170).

Il résulte des recherches de l'auteur qu'on peut, au moyen de vibrations de corps plongés dans un fluide, imiter les phénomènes fondamentaux du magnétisme. C'est la théorie mathématique de ses recherches, déjà publiée antérieurement en partie, que l'auteur a l'intention de donner, avec les développements qu'elle comporte.

Dans les comparaisons de cette nature se manifeste une particularité très caractéristique : les phénomènes hydrodynamiques qui correspondent aux phénomènes d'influence présentent, vis-à-vis de ces phénomènes de la nature, une analogie directe ; ceux, au contraire, qui répondent aux actions pondéromotrices présentent une analogie inverse. M. Bjerknes se demande si l'on obtiendrait des résultats analogues en substituant au fluide incompressible un fluide élastique et il arrive en effet à montrer qu'il en serait ainsi, entre des limites suffisamment restreintes, en sorte que c'est en dehors de ces limites qu'il faudrait poursuivre les recherches de ce genre pour arriver à des phénomènes coïncidant, sans traces d'inversion, avec ceux des grandes forces de la nature, en supposant que ces phénomènes puissent être trouvés par cette voie.

Voici les titres des subdivisions de son Mémoire :

I. Les équations hydrodynamiques et les relations empiriques ou supplémentaires.

II. Variation d'une vibration uniforme à une autre, et changement des coefficients dans la relation empirique.

III. Vibrations variées. Changement du caractère de la relation empirique.

IV. Vibrations uniformément variées.

V. Suite sur les vibrations variées. Petites vitesses et seconde approximation.

VI. Représentation hydrodynamique de la pression. Pressions partielles.

VII. Superpositions de potentiels. Cas simplifiants. Conclusion.

Sonine. — Sur la généralisation d'une formule d'Abel. (171-176).

Soient p, q deux nombres positifs dont la somme est égale à un ; soit

$$\varphi(y) = 1 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots$$

une série quelconque, et soit

$$\frac{1}{\varphi(y)} = 1 + d_1 y + d_2 y^2 + \ldots ;$$

si l'on pose

$$\sigma(x) = x^{-p} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{c_m x^m y^m}{\Pi(m-p)}$$

$$\psi(x) = x^{-q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_n x^n y^n}{\Pi(n-q)},$$

on aura

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = \int_a^x \psi(x-\lambda)\, d\lambda \int_a^\lambda f(\xi)\, \sigma(\lambda-\xi)\, d\xi.$$

Matthiessen (*L.*). — Recherches sur les positions mutuelles et relatives à un rayon principal des lignes focales d'un faisceau de rayon infiniment mince. (177-192).

Pour déterminer complètement la situation des deux directrices d'un faisceau quelconque de rayons, il faut connaître au moins quatre rayons; les autres rayons, pour appartenir aux mêmes directrices, doivent satisfaire à certaines conditions.

Hermite et *Lipschitz*. — Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques. (193-196).

Sur l'emploi des produits

$$\begin{aligned} A &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots, \\ B &= (1-q)\,(1-q^3)(1-q^5)\ldots, \\ C &= (1+q)\,(1+q^3)(1+q^5)\ldots, \\ D &= (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots, \end{aligned}$$

liées par la relation identique

$$ABC = 1,$$

qui permettent d'écrire plus simplement diverses formules des *Fundamenta*.

Goursat. — Démonstration du théorème de Cauchy. (197-200).

Démonstration très simple du théorème fondamental relatif à l'intégration le long d'un contour fermé, faite en décomposant l'aire limitée par ce contour en petits carrés, et reposant uniquement sur la définition de la dérivée et sur ce fait que les intégrales $\int dz$, $\int z\, dz$, prises le long d'un contour fermé, sont nulles.

Poincaré. — Sur les groupes des équations linéaires. (201-312).

L'auteur résume, comme il suit, les principaux résultats de cet important travail.

« Dans ce Mémoire, après avoir montré à calculer les paramètres du groupe d'une équation linéaire donnée, j'ai exposé quelques propriétés de ces paramètres considérés comme fonctions des coefficients de cette équation ou inversement de ces coefficients regardés comme fonctions des paramètres du groupe.

» J'ai abordé ensuite un autre problème. Considérons une équation de la forme suivante

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)\, v$$

$$(2) \qquad \theta(x, y) = 0$$

où φ et θ sont rationnels en x et y. Je suppose que la relation (2) est donnée ainsi que les points singuliers de l'équation (1) et l'équation déterminante relative à chacun d'eux, mais que tous les autres coefficients de l'équation (1) restent arbitraires. Je suppose de plus que la différence des racines de chaque équation déterminante est nulle ou est une partie aliquote de l'unité. J'appelle z le rapport des intégrales et je considère x comme fonction de z.

» J'ai montré qu'on peut disposer *d'une manière et d'une seule* de ces coefficients restés arbitraires, de telle façon que x soit fonction fuchsienne de z, n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle, et j'ai fait voir comment il fallait diriger le calcul des coefficients.

» On peut disposer de ces mêmes coefficients *d'une infinité de manières*, de telle façon que x soit fonction kleinéenne de z *n'existant pas dans tout le plan.* Enfin on peut encore disposer de ces coefficients *d'une manière et d'une seule*, de telle sorte que x soit fonction fuchsienne ou kleinéenne de z *existant dans toute l'étendue du plan.* Ce dernier point n'a pas été démontré. Il faudrait, pour le faire appliquer, la méthode de continuité.

» Considérons maintenant une fonction linéaire quelconque

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \Sigma \varphi_p \frac{d^p y}{dx^p} + \theta(x, y) = 0,$$

les φ et θ étant rationnels en x et y. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les intégrales de cette équation. On peut trouver une variable z, de telle façon que z soit le rapport des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels en x et y et que $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ainsi que x et y, soient des fonctions uniformes de z. Il peut arriver d'ailleurs que x, considéré comme fonction de z, soit ou une fonction rationnelle, ou une fonction doublement périodique, ou une fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle, ou une fonction kleinéenne n'existant pas dans tout le plan, ou enfin une fonction fuchsienne ou kleinéenne existant dans tout le plan. Nous laisserons de côté ce dernier cas.

» Alors, ce dernier cas étant laissé de côté, on pourra choisir cette variable z d'une infinité de manières en satisfaisant à toutes les conditions données plus haut. J'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les différentes variables obtenues de la sorte. Mais, parmi toutes ces variables, on peut en choisir une et une seule que j'appelle z_1, et qui est plus simple que toutes autres. En général, x sera une fonction fuchsienne de z (n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle), mais dans certains cas particuliers elle pourra ou être une fonction rationnelle ou doublement périodique. Dans tous les cas, z_1 sera fonction uniforme des autres variables $z_2, \ldots, z_n, \ldots$, ce qui explique pourquoi x, y et les v, qui sont uniformes en z_1, sont aussi uniformes en $z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$.

» Ainsi nous pouvons exprimer les intégrales d'une équation linéaire à coefficients algébriques par des fonctions uniformes d'une variable z. »

Appell. — Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta V = 0$. (313-374).

L'objet essentiel du travail de M. Appell est l'étude des fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$ qui ne cessent d'être finies et continues qu'en certains points isolés les uns des autres.

Il introduit tout d'abord, comme MM. Thomson et Tait, les fonctions entières

$V_n(x, y, z)$ à $2n+1$ constantes arbitraires (n étant entier et positif), qui vérifient cette équation, et les fonctions à indices négatifs

$$V_{-(n+1)}(x, y, z) = \frac{1}{r^{2n+1}} V_n(x, y, z),$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Les séries de la forme

$$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

sont convergentes dans l'intérieur d'une sphère dont le centre est à l'origine; les séries de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} V_n(x, y, z)$$

convergent dans l'espace compris entre deux telles sphères. Réciproquement les fonctions F continues admettant des dérivées premières et secondes et vérifiant l'équation de Laplace sont développables en séries d'une espèce ou de l'autre suivant que les conditions précédentes sont vérifiées à l'intérieur d'une sphère ou entre deux sphères.

On acquiert, dès lors, facilement la notion d'une fonction F *régulière* en un point de l'espace. Une fonction F uniforme et vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ admet un pôle en un point a, b, c, si elle devient régulière quand on en retranche une expression de la forme

$$V_{-1}(x-a, y-b, z-c) \\ + V_{-2}(x-a, y-b, z-c) + \ldots + V_{-n}(x-a, y-b, z-c).$$

Le pôle est d'ordre n et, si l'on a

$$V_{-1} = \frac{\lambda}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

λ est le résidu. On parvient de même à la notion de point singulier essentiel. Des considérations analogues se rapportent au point ∞. L'analogie avec les fonctions d'une variable complexe est manifeste et se poursuit très loin, jusqu'à fournir une extension du théorème de M. Mittag-Lefler. Le théorème de Green fournit ensuite des propositions analogues à celles que l'on déduit du théorème de Cauchy. L'auteur parvient enfin à des développements en série qui sont exactement le pendant de ces développements en série d'une fonction d'une variable imaginaire holomorphe à l'extérieur de deux cercles qu'il a étudiés dans le t. XI du *Bulletin de la Société Mathématique de France* [1].

Dans une deuxième Partie de son Mémoire, M. Appell étudie les fonctions de x, y, z vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ et qui possèdent trois groupes de périodes indépendantes. Ces fonctions, qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes, sont l'analogue de la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire. Ainsi une telle fonction, qui est régulière en tous les points d'un parallélépipède élé-

---

[1] Voir *Bulletin*, IX_2, p. 7.

mentaire, est une constante. A l'intérieur d'un parallélépipède élémentaire la somme des résidus est nulle. M. Appell forme une fonction simple qui joue dans sa théorie le même rôle que la fonction $Z(u)$ dans la théorie des fonctions doublement périodiques, telle que l'expose M. Hermite, à l'aide de laquelle s'expriment les autres fonctions, et qui jouit d'une série de propriétés intéressantes. Le cas où il y a des points singuliers essentiels complète l'analogie avec les fonctions doublement périodiques.

Scheeffer. — Démonstration du théorème de Laurent. (375-380).

Démonstration indépendante de l'intégrale de Cauchy.

Cantor. — De la puissance des ensembles parfaits de points. (381-392).

Démonstration dans le cas d'un ensemble linéaire de cette proposition : Les ensembles parfaits de points ont tous la même puissance, à savoir la puissance du continu. La démonstration conduit à la considération de fonctions continues intéressantes.

Définition du volume ou de la grandeur se rapportant à tout ensemble P situé dans un espace plan à n dimensions.

Kowalevski (S.). — Sur la réduction aux intégrales elliptiques d'une classe déterminée d'intégrales abéliennes du troisième rang.

Le Mémoire de Mme Kowalevski débute par une introduction où, après avoir rappelé le théorème fondamental d'Abel sur la réduction d'une intégrale à des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, elle déduit, d'après M. Weierstrass, la solution sous forme transcendante de cette question : Supposant qu'il y ait entre les variables x, y une équation algébrique de genre ρ, et désignant par $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ les ρ intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes, quelle propriété particulière doit avoir l'équation entre x et y pour qu'on puisse déterminer les constantes $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ de façon que l'intégrale de première espèce

$$u = e_1 u_1 + e_2 u_2 + \ldots + e_\rho u_\rho$$

puisse se ramener à une intégrale elliptique

$$\int \frac{ds}{\Delta(s)},$$

et cela, de telle manière que s et $\Delta(s)$ s'expriment rationnellement en x et y? De cette solution, déjà communiquée par M. Kœnigsberger dans le cas de $\rho = 2$ [1], résulte une méthode pour aborder le problème algébrique, au moins dans des cas particuliers, et c'est ce qu'a fait M. Kœnigsberger dans le Mémoire

[1] *Ueber die Transformation des zweiten Grades für die Abel'sche Functionen der ersten Ordnung.* (*Crelle*, t. 67, p. 71).

qu'on vient de citer. Toutefois, Mme Kowalevski abandonne cette voie pour le problème qu'elle a eu en vue :

Trouver les relations algébriques qui doivent exister entre les coefficients d'une équation algébrique du troisième genre entre x et y pour que, parmi les intégrales $\int F(x, y)\, dx$, où F est une fonction rationnelle en x, y, il s'en trouve une qui puisse se ramener aux intégrales elliptiques par une transformation du second degré.

La solution à laquelle elle parvient, et qui est encore fondée sur divers théorèmes dus à M. Weierstrass, conduit au théorème très élégant que voici :

« Si y est une fonction algébrique de x du troisième genre, on peut transformer d'une infinité de manières l'équation entre x et y en une équation homogène du quatrième degré $F = 0$ entre les quantités X_1, X_2, X_3 qui sont rationnelles en x et y, et cela de telle façon que les coefficients de cette équation ainsi que ceux qui figurent dans les expressions X_1, X_2, X_3 soient exprimés rationnellement au moyen des coefficients de l'équation donnée. L'équation $F = 0$ est irréductible (sauf un cas particulier examiné par l'auteur) et représente une courbe du quatrième degré sans points doubles.

» Pour que, parmi les intégrales abéliennes relatives à y, il en existe une qui puisse se ramener à une intégrale elliptique par une transformation du second ordre, il faut et il suffit que quatre tangentes doubles correspondantes de cette courbe se coupent en un même point. Par le mot *correspondantes* on entend que les huit points de contact appartiennent à une même conique. »

Zeller (*C.*). — Sur la formule récurrente d'Euler relative aux sommes de diviseurs. (415-416).

Tome V, 1884.

Malmsten. — Sur la formule

$$hu'_n = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\Delta u^{\text{IV}}_x - \dots$$

(1-46).

C'est la réimpression, avec un certain nombre de corrections nécessaires, du beau Mémoire de Malmsten sur la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, qui avait été publié pour la première fois dans le tome XXXV du *Journal de Crelle*.

Scheeffer. — Recherches générales sur la rectification des courbes. (49-82).

Le concept de longueur d'une courbe

$$y = f(x)$$

n'implique pas que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

ait un sens, ni même l'existence de la dérivée $f'(x)$.

Partageons l'intervalle x_0, x_1 en intervalles plus petits, en nombre fini, en

insérant entre x_0, x_1 des nombres croissants; à ces nombres correspondent des points sur la courbe. Ces points se suivent dans un ordre déterminé; joignons-les par une ligne brisée dont le premier élément joint le premier point au second, dont le second joint le second point au troisième, etc.; soit L_1 la longueur de cette ligne brisée. Répétons les mêmes opérations pour chaque nouvel intervalle partiel, et soit L_2 la somme des longueurs des lignes brisées que l'on obtient ainsi; l'ensemble de ces lignes brisées constitue une ligne brisée qui part du point (x_0, y_0) pour aboutir au point (x_1, y_1); etc.

On formera ainsi une suite de longueurs

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$$

qui vont manifestement en croissant; si, lorsque n augmente indéfiniment, avec cette seule condition que les intervalles partiels décroissent indéfiniment, L_n tend vers une limite; cette limite sera la longueur de la courbe entre le point (x_0, y_0) et le point (x_1, y_1).

M. Scheeffer montre que, la fonction $f(x)$ étant supposée univoque et continue entre x_0 et x_1, cette limite existe, dès que, pour un mode spécial de décomposition des intervalles, il est prouvé que les longueurs L_n restent toujours au-dessous d'un nombre fixe; on retrouvera alors la même limite pour tout autre mode de décomposition.

Si la fonction $f(x)$ est univoque et discontinue, les conditions suivantes sont nécessaires pour l'existence de la limite : 1° pour toute valeur x appartenant à l'intervalle x_0, x_1 les quantités limites $f(x+0)$, $f(x-0)$ doivent exister; 2° $f(x)$ doit être compris entre ces deux limites ou être égal à l'une d'elles; 3° La somme des valeurs absolues des différences $f(x+0)-f(x-0)$ doit être finie. Inversement, ces conditions étant vérifiées, la limite existe, pourvu que les longueurs L_n restent inférieures à un nombre fixe. M. Scheeffer transforme ensuite cette proposition de diverses manières, en faisant notamment intervenir la notion des quatre fonctions dérivées d'une fonction discontinue; il donne en outre quelques exemples intéressants.

Krey. — Quelques nombres pour les surfaces coniques. (83-96).

Ces nombres se rapportent à la surface, ou à la ligne, engendrée par un cône qui passe par

$$\frac{n(n+3)}{2}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{n(n+3)}{2}+2$$

points fixes; l'auteur donne aussi le nombre de cônes qui passent par

$$\frac{n(n+3)}{2}+3$$

point fixes.

Goursat. — Sur une classe d'intégrales doubles. (97-120).

Ce travail fait suite au Mémoire du même auteur inséré dans le tome II des *Acta* (1) : on s'y occupe spécialement d'intégrales doubles signalées par

(1) Voir *Bulletin*, VIII, p. 152.

M. Hermite; mais auparavant l'auteur rappelle et généralise la méthode qu'il avait exposée pour les intégrales simples; dans cet ordre d'idées il ajoute quelques résultats importants à ceux qu'il avait déjà obtenus.

M. Goursat s'occupe ensuite des intégrales

$$\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1} du \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u, t)\, dt}{G^n(x, u, t)},$$

où F et G sont des fonctions entières de x, u, t, où n est un entier positif et où les intégrations sont effectuées suivant des lignes droites. $\Phi(x)$ offre un sens bien déterminé, sauf pour les valeurs de x que l'on obtient en faisant varier u de u_0 à u_1 et t de t_0 à t_1 suivant des lignes droites dans l'équation

$$G(x, u, t) = 0.$$

L'ensemble de ces valeurs de x recouvre en général une certaine portion E du plan, dans laquelle l'intégrale double ne définit pas la fonction $\varphi(x)$. Mais cet espace E n'est point un espace lacunaire au sens de M. Weierstrass; la fonction $\Phi(x)$ peut être continuée analytiquement au dedans de $\Phi(x)$, de façon à atteindre tous les points, sauf des points isolés.

L'auteur étudie spécialement le cas où, u et t variant entre les limites indiquées, une des valeurs de n déduite de l'équation

(1) $$G(x, u, t) = 0$$

vient coïncider une fois et une seule fois avec chacun des points à l'intérieur d'une portion du plan simplement connexe E. Alors, en prenant un contour C, suffisamment rapproché de la limite de E, toutes les autres valeurs de x, déduites de l'équation (1), sont figurées par des points à l'extérieur de C. Le symbole $\Phi(x)$ définit alors une fonction holomorphe de x entre la limite de E et le contour C.

Cet espace E peut être envisagé comme une espèce de quadrilatère curviligne. Si, dans l'équation (1), on attribue à t la valeur t_0 et qu'on fasse varier u de u_0 à u_1, la valeur correspondante de x, comprise à l'intérieur de C, décrit un certain arc de courbe T_0; soient T_1, U_0, U_1 les trois arcs de courbes engendrés d'une manière analogue : deux arcs désignés par deux lettres différentes ont toujours une extrémité commune; deux arcs désignés par une même lettre n'ont pas de point commun. Ces arcs forment les côtés d'un quadrilatère curviligne convexe. C'est la limite de E. M. Goursat montre comment la fonction Φ peut être continuée à l'intérieur de ce quadrilatère, dont les sommets sont les seuls points critiques de la fonction Φ, à l'intérieur de C. Lorsque le point x pénètre dans le quadrilatère pour revenir au point de départ, la fonction Φ augmente d'une quantité que M. Goursat apprend à calculer suivant les côtés du quadrilatère que le chemin traverse. Les résultats se simplifient notablement dans le cas où $n = 1$. Divers exemples permettent de vérifier la théorie générale.

En terminant, M. Goursat considère l'intégrale

$$\Phi(x) = \int [illegible] du \int_0^1 f(u [illegible] t - x)\, dt,$$

où

$$f(t) = \frac{R_1}{t - p_1} + \frac{R_2}{t - p_{[illegible]}} + \dots + \frac{R_n}{t - p_{[illegible]}}.$$

est une fraction rationnelle à pôles simples. Il montre qu'on peut diviser le plan en $n+1$ parties dans chacune desquelles la fonction est une constante : c'est l'analogue d'un résultat bien connu, développé par M. Hermite.

Picard (*E.*). — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes. (121-182).

Ce travail fait suite au Mémoire inséré dans le tome I des *Acta*, où l'auteur a montré comment les formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers pouvaient conduire à une classe étendue de groupes discontinus de substitutions linéaires pour le cas de deux variables; dans ce même Mémoire, il avait montré que l'on peut former des fonctions de deux variables indépendantes qui ne changent point quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe. Ce sont ces fonctions qu'il désigne sous le nom d'*hyperfuchsiennes*. L'existence seule de ces fonctions, toutefois, avait été établie : c'est à leur étude qu'est consacré le présent Mémoire.

Il est divisé en quatre Parties. La première contient l'étude des formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées

$$F = a x x_0 + a' y y_0 + a'' z z_0 + b y z_0 + b_0 y_0 z + b' z x_0 + b'_0 x z_0 + b'' x y_0 + b''_0 y x_0,$$

où a, a', a'' sont réels, où, b_0, b'_0, b''_0 sont les quantités conjuguées de b, b', b'', où enfin x_0, y_0, z_0 sont des variables conjuguées des variables x, y, z. Cette étude fait suite au Mémoire de l'auteur inséré dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (1884).

Une telle forme peut, au moyen d'une substitution linéaire, être ramené à l'un des types

$$\pm(uu_0 + vv_0 + ww_0),$$
$$\pm(uu_0 + vv_0 - ww_0);$$

l'auteur suppose dans la suite qu'elle est à coefficients entiers et appartient au type

$$uu_0 + vv_0 - ww_0,$$

où u, v, w sont des expressions linéaires en x et indépendantes

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$v = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$w = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

M. Picard introduit, d'après MM. Korkine et Zolotareff (*Mathematische Annalen*, t. VI), la notion de forme *définie* réduite : une forme ternaire définie à coefficients quelconques peut toujours, par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant égal à un, être transformée en une forme équivalente ayant pour expression

$$(2) \qquad \mu_1 \text{ norme } (x + \varepsilon_{12} y + \varepsilon_{13} z) + \mu_2 \text{ norme } (y + \varepsilon_{23} z) + \mu_3 \text{ norme } z,$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont des nombres positifs satisfaisant aux conditions

$$\mu_2 \geq \frac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geq \frac{1}{2}\mu_2.$$

et où les parties réelles et les coefficients de i, dans ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} ne surpassent pas $\frac{1}{2}$ en valeur absolue. La forme (2), sous ces conditions, est *réduite;* ceci posé, à la forme indéfinie F l'auteur associe la forme définie

$$\Phi = UU_0 + VV_0 + WW_0,$$

où

$$U = Mu + Pv + Rw,$$
$$V = M'u + P'v + R'w,$$
$$W = M''u + P''v + R''w$$

sont des fonctions linéaires en u, v, w, telles que l'on ait identiquement

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 = uu_0 + vv_0 - ww_0;$$

en raison des relations qui existent entre les coefficients M, ..., R'' et les quantités conjuguées M_0, ..., R''_0, la forme Φ peut s'écrire

$$\Phi = -F(M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0)$$
$$+ 2(M''u + P''v + R''w)(M''_0 u_0 + P''_0 v_0 + R''w_0),$$

ou

$$M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0 = -1.$$

La forme *indéfinie* F est *réduite* si, pour certaines valeurs de M'', P'', R'', la forme correspondante Φ est elle-même réduite. M. Picard établit tout d'abord cette proposition fondamentale : le nombre des formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme donnée est fini.

Ceci posé, on peut manifestement substituer à la forme Φ la forme, qui sera désignée sous le même nom,

$$-(uu_0 + vv_0 - ww_0)(\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - 1) + 2\,\text{norme}\,(u\xi + v\eta + w),$$

où ξ, η vérifient la condition

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

M. Picard désigne sous le nom de *point* l'ensemble des deux nombres (ξ, η); l'ensemble des points qui satisfont à l'inégalité précédente constitue le domaine S; l'ensemble des points (ξ, η) pour lesquels Φ est réduite est un domaine D, *qui n'a au plus qu'un point commun avec la limite de* S. Ce point n'existe que pour les réduites dans lesquelles a et b'' sont nuls. D'ailleurs il existe toujours, une forme indéfinie étant donnée, des réduites qui lui sont équivalentes et dans lesquelles a et b'' sont nuls; c'est ce qui résulte de ce que, contrairement à ce qui arrive dans les formes ternaires réelles, zéro peut être représenté par toute forme indéfinie à indéterminées conjuguées.

Admettons maintenant qu'on parte d'une forme indéfinie réduite F; la forme définie Φ sera réduite pour les points ξ, η du domaine D; si l'on fait mouvoir le point (ξ, η) de manière à le faire sortir de ce domaine, on devra, suivant les circonstances de la variation de ce point, employer certaines substitutions pour réduire la forme de nouveau, ce qui donne, en employant la totalité des substitutions propres à réduire de nouveau Φ, certaines réduites adjacentes à la réduite F, auxquelles correspondent des domaines D', D'', ... On continue ainsi à effectuer la réduction continuelle de la forme Φ jusqu'à ce qu'on ne

trouve plus de nouvelles réduites, ce qui arrivera nécessairement, puisque le nombre des réduites est limité. Soit δ le domaine total formé par les domaines D, D′, D″, ... Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine δ, on retombe sur une réduite déjà obtenue, à laquelle se trouve ainsi correspondre un nouveau domaine D_1. Cette réduite déjà obtenue, on peut supposer que ce soit la réduite F elle-même. Alors, en faisant passer ξ, η du domaine D dans le domaine D_1, on est conduit à une substitution (S) à coefficients entiers, de déterminant un, qui change la forme F en elle-même. A une telle substitution correspond une substitution linéaire faite sur u, v, w, soit

$$(u, v, w, \quad Au + Bv + Cw, \quad A'u + B'v + C'w, \quad A''u + B''v + C''w),$$

et cette substitution change en elle-même l'expression $uu_0 + vv_0 - ww_0$. En effectuant sur x, y, z la substitution (S), la forme Φ devient

$$(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)F + 2\,\text{norme}\,[(Au + Bn + Cw)\xi$$
$$+ (A'u + B'v + C'w)\eta + (A''n + B''v + C''w)\zeta];$$

en divisant par norme $(C\xi + C'\eta + C'')$ et posant

$$(3) \qquad \xi' = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \qquad \eta' = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''},$$

cette forme peut s'écrire

$$(1 - \xi'\xi'_0 - \eta'\eta'_0)F + 2\,\text{norme}\,(u\xi' + v\eta' + w).$$

On passe donc du domaine D au domaine D_1 en effectuant sur ξ, η la substitution (3). En continuant d'effectuer la réduction continuelle de la forme Φ, on obtiendra un groupe G d'une infinité de substitutions, telles que (3); ce groupe sera discontinu. Toute substitution de ce groupe s'obtient, comme on voit, en composant convenablement un nombre fini de substitutions, *les substitutions fondamentales du groupe*. Le domaine δ jouit de la propriété suivante : à tout point (ξ, η), intérieur à S, correspond par une substitution du groupe un nombre limité (non nul) de points à l'intérieur de δ. S'il y a plus d'un point, on pourra le diviser en domaines partiels tels que, dans chacun d'eux, il y ait un point et un seul correspondant par une substitution du groupe à un point quelconque de S; un tel domaine R est dit fondamental. Il a un nombre limité de points communs (au moins un) avec la surface de S. Trois substitutions laissent invariable chaque point de cette espèce.

Dans le Mémoire du premier Volume des *Acta*, M. Picard a montré que, en désignant par

$$\left(\xi, \eta, \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right)$$

une substitution quelconque du groupe G, la série

$$\sum R\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) \frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}},$$

où R est une fraction rationnelle à deux variables, où m est un entier plus grand que un et où enfin la sommation est étendue à toutes les substitutions du groupe, représente une fonction holomorphe à l'intérieur et sur la surface

de S; cette fonction jouit de la propriété

$$\Theta\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\,\Theta(\xi, \eta).$$

Le quotient de deux telles fonctions, qui ne se réduit pas nécessairement à une constante, est une fonction *hyperfuchsienne,* dans le sens donné plus haut à ce mot.

M. Picard étudie ensuite avec détail la façon dont se compose la fonction Θ aux environs d'un point A commun à un domaine fondamental R et à la surface de S.

La fonction $\Theta(\xi, \eta)$ peut, quelle que soit la fonction $R(\xi, \eta)$ qui a servi à la former, s'annuler pour certaines valeurs de ξ, η; ce sont des points situés sur la limite du domaine fondamental R et qui restent invariables par une substitution convenable du groupe. Sur la surface de R ils peuvent former des points isolés, en nombre limité (*sommets*), ou des suites continues (*arêtes*).

Si l'on considère les deux équations

$$\Theta(\xi, \eta) = 0, \qquad \Theta_1(\xi, \eta) = 0,$$

formées avec des fonctions rationnelles *arbitraires* $R(\xi, \eta)$, $R_1(\xi, \eta)$; elles ne peuvent avoir de points racines formant une suite continue dans le domaine R que les *arêtes* précédemment définies. A l'*intérieur* du domaine elles n'ont qu'un nombre limité de racines, indépendant des fonctions $R(\xi, \eta)$, $R_1(\xi, \eta)$. On conclut de là que, entre trois fonctions hyperfuchsiennes, il existe une relation algébrique.

M. Picard montre en outre qu'on peut trouver trois fonctions hyperfuchsiennes appartenant au groupe G, telles que toute autre fonction hyperfuchsienne appartenant au même groupe soit fonction rationnelle de celles-là.

Enfin les fonctions hyperfuchsiennes peuvent être obtenues par l'inversion des quotients de trois solutions communes d'un système d'équations aux dérivées partielles.

D'une façon précise, on a le théorème que voici :

« Soient

$$x = F_1(\xi, \eta), \qquad y = F_2(\xi, \eta), \qquad z = F(\xi, \eta)$$

les trois fonctions hyperfuchsiennes au moyen desquelles les autres s'expriment rationnellement, liées par la relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

on peut former un système de trois équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a_1\frac{\partial z}{\partial x} + b_1\frac{\partial z}{\partial y} + c_1 z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a_2\frac{\partial z}{\partial x} + b_2\frac{\partial z}{\partial y} + c_2 z,$$

où les a, b, c sont des fonctions rationnelles de x, y et z [z étant la fonction algébrique de x, y définie par l'équation (1)]; ces trois équations ont trois so-

lutions communes linéairement indépendantes z_1, z_2, z_3, et si l'on pose

$$\frac{z_2}{z_1} = \xi, \qquad \frac{z_3}{z_1} = \eta,$$

ces équations résolues par rapport à x et y donnent précisément

$$x = F_1(\xi, \eta), \qquad y = F_2(\xi, \eta). \text{ »}$$

Scheeffer. — Pour la théorie des fonctions continues d'une variable réelle. (183-194).

Rappelons tout d'abord la définition des quatre dérivées d'une fonction continue $f(x)$ (¹). Soit h un nombre positif. Les valeurs de

$$\frac{f(x+h') - f(x)}{h'}$$

pour l'ensemble des valeurs de h' comprises entre zéro et h admettent une limite supérieure D_h et une limite inférieure D'_h; si h diminue, D_h ne peut que diminuer, et D'_h ne peut qu'augmenter. La limite D^+ de D_h quand h tend vers zéro est la dérivée supérieure à droite, la limite D_+ de D'_h quand h tend vers zéro est la dérivée inférieure à droite. Les deux dérivées supérieure et inférieure à gauche D^- et D_- se définissent de la même façon.

Ceci posé, on a les théorèmes suivants, où D désigne l'un quelconque des quatre symboles D^+, D_+, D^-, D_-:

« Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux fonctions univoques et continues pour tous les points de l'intervalle x_0, x_1; si l'on a dans tout cet intervalle

$$DF(x) = Df(x), \tag{1}$$

où l'on suppose que les deux membres sont toujours finis, on a

$$F(x) = f(x) + \text{const.} \tag{2}$$

» Si les points de l'intervalle pour lesquels l'égalité (1) n'a pas lieu, ou pour lesquels quelqu'une des dérivées $DF(x)$, $Df(x)$ est infinie, forment un ensemble dénombrable, la conclusion (2) subsiste encore ». Par exemple, si l'égalité (1) a lieu pour toutes les valeurs irrationnelles de x, les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$ ne peuvent différer que par une constante; mais cette conclusion ne pourrait être affirmée si l'on savait seulement que l'égalité (1) a lieu pour toutes les valeurs rationnelles de x. Il existe en effet des fonctions continues de x qui ne sont point constantes, et qui, pour toutes les valeurs rationnelles de x, ont des dérivées nulles.

Des recherches sur des sujets analogues, dues à M. Hölder et à M. Harnack, ont paru dans le tome XXIV des *Mathematische Annalen*, en même temps que le travail de M. Scheeffer.

Le Paige. — Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre. (195-202).

(¹) Dini, *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 190.

Étude au moyen des homographies biquadratiques de la configuration (15_6, 20_3), à laquelle donnent lieu deux tétraèdres homologiques, inscrits dans une surface du troisième ordre S_3.

Signalons, en passant, le théorème suivant :

« On peut inscrire à une surface S_3 trois systèmes de douze pentaèdres dont on choisit arbitrairement une face et une arête dans cette face » ;

Et la solution de cette question :

« Étudier la surface engendrée par les intersections des plans concourants que l'on obtient en joignant quatre droites situées dans un plan ω respectivement aux points marqués sur quatre droites arbitraires par tous les plans de l'espace. »

Le lieu se compose du plan ω et d'une surface S_3 circonscrite au quadrilatère.

Zeuthen. — Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. (203-204).

Il y a douze pentaèdres complets inscrits à une surface cubique et dont une des faces et le quadrilatère complet qu'elle doit contenir sont déjà connus.

Schrœter. — Contributions à la théorie des fonctions elliptiques. (205-208).

Démonstration, par le théorème d'addition des fonctions elliptiques et par le théorème fondamental de Jacobi sur le produit de quatre fonctions $\mathfrak{D}$ de l'identité due à M. Cayley.

$$-k^2k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} c \operatorname{sn} d + k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cn} c \operatorname{cn} d - \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{dn} c \operatorname{dn} d + k'^2 = 0,$$

sous la condition

$$a + b + c + d = 0.$$

Indications relatives à certaines équations modulaires.

Poincaré. — Mémoire sur les fonctions zêtafuchsiennes. (209-278).

C'est le dernier de cette admirable série de Mémoires où l'auteur a introduit de nouvelles fonctions uniformes dont l'importance ne peut que grandir avec le développement de la Science et qui jouent, dans la théorie des équations différentielles linéaires, un rôle si essentiel.

Introduction. — « Considérons une équation linéaire quelconque d'ordre p

$$(1) \qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \sum_{k=1}^{k=p-1} \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0,$$

$$(2) \qquad \psi(x, y) = 0,$$

où les φ sont des fonctions rationnelles et où la relation (2) est algébrique.

Soit maintenant

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = \theta(x, y) v,$$

où $\theta(x, y)$ est une fonction rationnelle telle que *tous les points singuliers de l'équation* (1) *appartiennent à l'équation* (3). Soit a un point singulier appartenant à la fois aux deux équations; ce point singulier regardé comme appartenant à (1) nous conduira à une équation déterminante E de degré p ; regardé comme appartenant à (3), il nous conduira à une équation déterminante E' du second degré. Soit δ la différence des deux racines de E'. Je suppose que θ ait été choisi de telle sorte que δ *soit nul* ou bien que, δ *étant une partie aliquote de l'unité, toutes les racines de l'équation* E *soient des multiples de* δ. Dans le cas où *dans le voisinage du point a les intégrales de l'équation* (1) *seraient irrégulières*, δ *devrait être supposé nul.* Il faut enfin que, même pour les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à l'équation (1), δ soit nul ou soit une partie aliquote de l'unité et que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières.

» Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer θ. Supposons même que l'on choisisse arbitrairement les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à (1) et les équations déterminantes relatives à tous les points singuliers de (3) en satisfaisant toutefois aux diverses conditions que nous venons d'énoncer. Quand ce choix sera fait, θ ne sera pas encore entièrement déterminé, et il y restera un certain nombre de paramètres arbitraires. Dans divers Mémoires, antérieurement insérés aux *Acta mathematica,* j'ai démontré qu'on pouvait disposer de ces paramètres :

» 1° D'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle;

» 2° D'une infinité de manières, de telle façon que x et y soient fonctions kleinéennes de z n'existant pas dans tout le plan ;

» 3° D'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes ou kleinéennes de z existant dans tout le plan.

» Dans tous ces cas, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions uniformes de z.

» Nous supposerons, pour fixer les idées, que l'équation (3) ait été choisie de telle sorte que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont le centre est o et le rayon 1 (première, deuxième et sixième famille). Alors les intégrales de l'équation (1) pourront se mettre sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances de z et convergentes tant que z reste intérieur au cercle fondamental; elles sont donc *toujours* convergentes, puisque la variable z ne peut jamais sortir de ce cercle.

» Envisageons un cas particulier remarquable, celui où δ est nul pour tous les points singuliers de l'équation (3) et où par conséquent x et y sont des fonctions fuchsiennes de la deuxième famille. Dans ce cas, les intégrales de l'équation (1), de même que x et y, sont des fonctions holomorphes de z, à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions peuvent se développer en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et *toujours* convergentes, puisque le cercle de convergence est le cercle fondamental et que la variable ne sort jamais de ce cercle. Quant aux coefficients de ces séries, on

les calcule aisément par récurrence et par la méthode des coefficients indéterminés, dès que l'on connaît les coefficients des équations (1), (2) et (3).

» Ainsi on peut trouver des développements des intégrales qui sont toujours valables et, à ce point de vue, il est, dès à présent, permis de dire que nous savons intégrer toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

» Mais les développements ainsi obtenus ne sont pas satisfaisants pour l'esprit, parce que les différents termes ne se déduisent pas les uns des autres par une loi simple. Il faut donc chercher à exprimer les intégrales par des séries dont tous les termes soient donnés par une formule générale simple, comme l'étaient, par exemple, les termes des séries thêtafuchsiennes. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les séries que je vais chercher à obtenir seront moins propres peut-être au calcul numérique que les développements suivant les puissances de z, mais elles seront plus instructives et nous permettront de pénétrer plus profondément dans l'étude même des fonctions qu'elles représentent.

» Toutefois, dans ce qui va suivre, je serai obligé de supposer que l'équation (1) a toutes ses équations *régulières,* pour employer l'expression de MM. Fuchs, Thomé, Fröbenius, etc. »

Voici maintenant l'ordre suivi par M. Poincaré dans son Mémoire.

Il introduit tout d'abord la notion de *familles* et d'*espèces* pour les équations différentielles linéaires.

Les équations à coefficients rationnels en x, y

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0,$$

$$\frac{d^p u}{dx^p} + \sum \varphi'_k(x, y) \frac{d^k u}{dx^k} = 0,$$

où les quantités x, y sont liées par l'équation algébrique

$$\psi(x, y) = 0,$$

appartiennent à la même famille si l'intégrale générale de la seconde peut être mise sous la forme

$$u = \Lambda\left(F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx} + F_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \ldots + F_{p-1} \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}}\right),$$

où v est l'intégrale de (1), où les F sont des fonctions rationnelles de x, y, où Λ enfin est une fonction quelconque de x et de y. Elles appartiennent à la même espèce si $\Lambda = 1$. On prouve d'ailleurs plus loin que la dérivée logarithmique de Λ est nécessairement rationnelle en x, y.

L'auteur étudie la façon dont se correspondent les points singuliers de deux équations de la même famille, et s'arrête en particulier sur le cas de $p = 2$. Il montre ensuite comment, parmi les équations d'une même famille, il y en a un nombre fini qu'on peut regarder comme plus simples que les autres et comment, étant donnée une équation linéaire, on peut trouver la transformation qui la change en une équation réduite.

Après ces préliminaires, M. Poincaré définit les fonctions zêtafuchsiennes.

Soit g un groupe fuchsien quelconque de la première, de la deuxième ou de la sixième famille. Soient

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$$

p fonctions de z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Supposons que, lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, la fonction Z_i se change en une combinaison linéaire

$$\Sigma a_{ik} Z_k$$

des p fonctions Z.

Les substitutions

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k)$$

forment un groupe G isomorphe à g et que M. Poincaré appelle *zètafuchsien*. Supposons que ces fonctions Z soient uniformes et n'aient à l'intérieur du cercle fondamental d'autres singularités que des pôles.

Lorsque le groupe g est de la deuxième ou de la sixième famille, son polygone générateur R_0 aura un ou plusieurs sommets sur la circonférence du cercle fondamental; soit α un de ces sommets : les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g sont holomorphes en e^t, où $t = \frac{\beta}{z-\alpha}$, et où β est un coefficient convenablement choisi; on suppose que, dans le voisinage du point $z = \alpha$, les fonctions Z sont de la forme

$$P_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t} \Phi_q,$$

où les Φ sont holomorphes en e^t, où les λ sont des constantes, où les P enfin sont des polynômes dont les degrés $n_1, n_2, \ldots, n_q$ satisfont à la relation

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p - q;$$

toutes ces conditions étant vérifiées, on dit que les fonctions Z sont des fonctions zêtafuchsiennes.

Si l'on suppose maintenant que l'équation auxiliaire (3) ait été choisie de façon que x et y soient des fonctions fuchsiennes $f(z)$, $f_1(z)$ du rapport z des intégrales et que les intégrales des équations (1) soient partout régulières, ces intégrales deviendront des fonctions zêtafuchsiennes quand on remplacera x et y par $f(z)$ et $f_1(z)$. Ce résultat justifie la dénomination de *zêtafuchsiennes,* puisque les fonctions ainsi dénommées jouent un rôle pareil à celui des fonctions zêta dans la théorie des transcendantes elliptiques.

D'un système de fonctions fuchsiennes $z = f(z)$, $y = f_1(z)$ relatives au groupe g et de fonctions zêtafuchsiennes admettant le groupe zêtafuchsien G, on peut déduire une infinité de systèmes de fonctions zêtafuchsiennes admettant les mêmes groupes.

Toutes les fonctions zêtafuchsiennes qui ont même groupe satisfont à des équations linéaires à coefficients rationnels en x et y et qui sont toutes de même espèce.

Supposons ensuite que le groupe fuchsien g soit de la première famille, soit

$$s_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

une substitution de ce groupe; soit S_i la substitution correspondante du groupe G. Ce sera une substitution linéaire de déterminant 1 que l'on pourra représenter par le tableau de ses coefficients

$$a_{r,s}^{(i)} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, p).$$

La substitution S_i^{-1} sera représentée par le tableau de ses coefficients

$$A_{r,s}^{(i)},$$

mineurs du déterminant formé avec les $a_{r,s}^{(i)}$. L'auteur considère p séries

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p,$$

dont il établit la convergence, formée au moyen de p fonctions rationnelles

$$H_1, H_2, \ldots, H_p,$$

comme il suit

$$\xi_\mu = \sum_i \sum_\nu A_{\mu,\nu}^{(i)} H_\nu\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

et jouissant de la propriété

$$\xi_\mu\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \sum_\nu a_{\mu,\nu}^{(k)} \xi_\nu(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Ces p fonctions ξ divisées par une même fonction thêtafuchsienne forment un système zètafuchsien. L'auteur montrera plus tard que, réciproquement, toute fonction zètafuchsienne est le quotient d'une série ξ par une série thêtafuchsienne. Ainsi avec un groupe fuchsien g de la première famille et un groupe zètafuchsien G isomorphe au premier, on peut toujours construire une infinité de systèmes zètafuchsiens. Donc on peut toujours construire une infinité d'équations linéaires admettant un groupe donné, pourvu que ce groupe soit isomorphe à un groupe fuchsien de la première famille.

L'auteur obtient ensuite l'expression analytique générale des fonctions zètafuchsiennes, puis l'expression analytique des séries ξ au moyen des intégrales d'une équation différentielle linéaire, donnant naissance à un système de fonctions zètafuchsiennes.

Les fonctions

$$Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les Z désignent un système de *fonctions zètafuchsiennes* admettant même groupe fuchsien que la *fonction fuchsienne* $f(z)$, admettent un mode de décomposition en éléments simples que développe M. Poincaré.

Le reste du Mémoire de l'auteur est consacré à l'extension des résultats précédents aux fonctions zètafuchsiennes dont le groupe fuchsien est de la deuxième ou de la sixième famille. Parmi ces fonctions, M. Poincaré est amené à distinguer deux espèces. Pour la première, l'extension se fait entièrement; il n'y a aucune différence essentielle entre ces fonctions et celles qui sont engendrées par les groupes fuchsiens de la première famille; pour la seconde espèce, l'extension complète ne se fait pas, les séries ξ dont il a été question plus haut seraient divergentes; M. Poincaré montre alors comment il faut modifier la théorie pour l'étendre à ces nouvelles fonctions.

« Les fonctions zètafuchsiennes dont il a été question dans les paragraphes précédents, dit en terminant l'auteur, ne sont pas les seules que l'on peut imaginer. On peut construire, en effet, des fonctions zètafuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan, ce sont des fonctions qui subissent les substitu-

tions linéaires d'un groupe G quand la variable subit les substitutions d'un groupe fuchsien g de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille. On peut aussi remplacer le groupe g par un groupe kleinéen, et l'on obtiendra de la sorte des fonctions zètakleinéennes existant, soit dans toute l'étendue du plan, soit dans un certain domaine.

» Cela suffit pour faire comprendre que, dans les cinq Mémoires des *Acta mathematica* que j'ai consacrés à l'étude des trancendantes fuchsiennes et kleinéennes, je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste, qui fournira sans doute aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes. »

Scheeffer. — Pour la théorie des fonctions continues d'une variable réelle. (279-296).

Voir plus haut.

Hermite. — Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. (297-330).

M. Kronecker a donné, dans les *Monatsberichte* de Berlin pour 1875 (*Ueber quadratische Formen von negativen Determinante*), les théorèmes suivants :

« Si l'on suppose

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0(q) &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots,\\ \mathfrak{S}_2(q) &= 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots,\\ \mathfrak{S}_3(q) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,\end{aligned}$$

et que l'on désigne par $F(n)$ le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-n$ dont un au moins des coefficients extrêmes est impair, avec la convention d'écrire $F(n) - \frac{1}{2}$ au lieu de $F(n)$, lorsque n est un carré, on a les relations suivantes :

$$(A)\qquad 4\sum_0^\infty F(4n+2)\,q^{n+\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}_2^{\frac{2}{2}}(q)\,\mathfrak{S}_3(q),$$

$$(B)\qquad 4\sum_0^\infty F(4n+1)\,q^{n+\frac{1}{4}} = \mathfrak{S}_2(q)\,\mathfrak{S}_3^{\frac{2}{3}}(q),$$

$$(C)\qquad 8\sum_0^\infty F(8n+3)\,q^{2n+\frac{3}{4}} = \mathfrak{S}_2^{\frac{3}{2}}(q). »$$

M. Hermite établit ces relations par une voie toute différente de celle que suit M. Kronecker. Le principe de la méthode de M. Hermite avait été exposé succinctement par lui dans une Lettre adressée en 1862 à M. Liouville : il est essentiellement analytique et fait reposer la notion de classe sur la notion de forme réduite. Les théorèmes de M. Kronecker se déduisent des développements en séries de Fourier des fonctions

$$\frac{H(u)}{\Theta(u)},\quad \frac{\Theta(u)\,\Theta_1(u)}{H(u)},\quad \frac{\Theta(u)}{H(u)},\quad \frac{\Theta(u)}{\Theta_1(u)\,H(u)},\quad \frac{\Theta(u)\,\Theta_1(u)}{H(u)\,H_1(u)},\quad \frac{H(u)\,H_1(u)}{\Theta(u)},$$

où l'on suppose $u = \frac{2Kx}{\pi}$.

Dans une seconde Partie de son Mémoire, l'illustre géomètre déduit de la série d'Euler

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

et des divers développements donnés par Jacobi dans les *Fundamenta* pour

$$\frac{2K}{\pi}, \quad \frac{2kK}{\pi}, \quad \ldots$$

une suite de belles propositions; les unes connues, les autres nouvelles, et qui concernent la fonction numérique $E(x)$; la plupart de ces déductions s'obtiennent en appliquant aux fractions rationnelles qui figurent dans ces diverses séries la remarque si simple que voici :

Si l'on pose

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

et si l'on désigne par a un nombre entier positif quelconque, le coefficient de x^n dans

$$\frac{f(x^a)}{1-x}$$

est

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu,$$

où

$$\nu = E\left(\frac{n}{a}\right).$$

Les formules qu'il obtient par cette voie le conduisent en particulier à obtenir, au moyen des théorèmes de M. Kronecker que l'on a rappelés en commençant, diverses expressions des trois sommes

$$A = F(2) + F(6) + \ldots + F(4n+2),$$
$$B = F(1) + F(5) + \ldots + F(4n+1),$$
$$C = F(3) + F(11) + \ldots + F(8n+3).$$

On a, par exemple,

$$4A = \Sigma f(8c+2) + 2\Sigma f(8c+2)E(\sqrt{n-2c}),$$

où $f(u)$ désigne le nombre de solutions de l'équation $x^2+y^2=u$; dans le premier terme, il faut prendre $c=0, 1, \ldots, n$ et dans le second il faut prendre $c = 0, 1, 2, \ldots, E\left(\frac{n-1}{2}\right)$; on a encore

$$A = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} + \sum (-1)^{\frac{a'-1}{2}} E\left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right),$$

où les sommations s'étendent aux systèmes de valeurs de nombres entiers impairs positifs a et a' qui vérifient la condition

$$4n+2-a^2-a'^2 = 0.$$

Fiedler. — Sur l'intersection des hyperboloïdes de révolution équilatères à axes parallèles. (331-408, avec 2 pl.).

Les recherches de M. Fiedler se rapportent au domaine qu'il désigne sous le nom de *cyclographie*, et sur lequel il a publié en 1882 un intéressant Ouvrage [1].

Le rôle des hyperboloïdes de révolution a été signalé dans l'analyse que nous rappelons et l'important Mémoire inséré dans les *Acta* où l'auteur donne, avec beaucoup d'autres théorèmes, l'origine vraisemblable de la suite de propositions énoncées par Steiner dans le Mémoire intitulé : *Ueber einige neue Bestimmungs-Arten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven* (*Œuvres*, t. II, p. 446), montre bien la portée de la méthode de M. Fiedler.

J. T.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ [2]. — 3e série.

Tome VII; 1er semestre 1888.

Humbert (*G.*). — Sur les arcs des courbes planes. (5-8).

Extension à une courbe algébrique quelconque, par voie élémentaire, d'une proposition de Graves et Chasles, sur les arcs de coniques.

Marchand (*E.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1885. (8-14).

Problème relatif aux cordes d'un hyperboloïde à une nappe, qui sont vues du centre sous un angle droit.

Marchand (*E.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1886. (14-25).

Sur une surface du second ordre coupée par des sécantes issues d'un point donné.

Stieltjes (*T.-J.*). — Sur une généralisation de la formule des accroissements finis. (26-31).

Démonstration d'une proposition de M. A. Schwarz (*Annali di Matematica* de Brioschi, 2e série, t. X) sur le quotient de deux déterminants où figurent n fonctions réelles d'une même variable.

Faure (*H.*). — Sur un théorème de Chasles. (31-37).

---

(1) Voir *Bulletin*, VIII$_2$, 209.

(2) Voir *Bulletin*, XII$_2$, p. 165.

« Étant données trois coniques A, A′, A″ circonscrites à un quadrilatère et une conique U, si l'on décrit une conique B passant par les intersections de U et de A, les points d'intersection de B et A′ et ceux de U et A″ sont sur une même conique. »

Tel est l'énoncé de M. Faure; cette forme nouvelle de la proposition de Chasles le conduit à un grand nombre de conséquences qui semblent avoir échappé à l'illustre auteur de la Géométrie supérieure.

Astor (*A.*). — Théorème de Minding. (38-43).

Sur un corps solide sollicité en ses divers points par des forces indépendantes de l'orientation du corps.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1887. (Sujets donnés à quelques élèves qui n'ont pu composer que plus tard.) — Énoncés des compositions : Mathématiques, Géométrie descriptive. (43-44).

École forestière (Concours de 1887). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Trigonométrie et Calcul logarithmique. (44-45).

Concours pour les bourses de licence (Paris, 1887). — Énoncés des compositions. (45-46).

Concours d'admission a l'École Centrale en 1887 (Seconde session). — Énoncés des compositions : Géométrie analytique, Épure, Trigonométrie, Physique et Chimie. (46-48).

Concours pour l'agrégation des Sciences mathématiques en 1887. — Énoncés des compositions : Mathématiques spéciales, Calcul numérique et Épure. (48-49).

Cesaro (*E.*). — Sur la convergence des séries. (49-59).

Considérations intéressantes sur les critériums de convergence ou de divergence, notamment sur l'examen de l'expression $\lim nu_n$. Comparaison de la divergence de deux séries. Remarques sur l'inversion des termes; applications à des exemples.

Laurent (*H.*). — Sur la théorie de l'élimination. (60-65).

L'auteur s'est proposé, dans ce travail, de faire connaître une nouvelle méthode d'élimination, applicable à un nombre quelconque d'équations algébriques.

Pomey (*E.*). — Sur le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers. (66-90).

Dans ce Mémoire, l'auteur se propose, étant donnés deux polynômes entiers f et g, à une variable, de chercher : 1° les conditions nécessaires et suffisantes pour que f et g aient pour plus grand commun diviseur un polynôme de degré p; 2° l'expression explicite de ce polynôme; 3° les quotients respectifs de f et g, divisés par ce polynôme.

Le travail de M. Pomey se divise en deux parties, l'étude de ces questions pouvant être rattachée, comme il le remarque, soit au résultant d'Euler, soit à celui de Bézout-Cauchy.

Hofmann (*F.*). — Sur l'existence de trois racines réelles de l'équation qui détermine les axes principaux d'un cône. (90-97).

Il s'agit de l'équation *séculaire* de Laplace, réduite au cas du troisième degré. La réalité d'une racine étant établie, des considérations géométriques permettent, non seulement d'établir l'existence des deux autres, mais encore de les *construire*.

Worontzoff. — Sur un théorème de M. Weill. (97-99).

Démonstration élémentaire de la formule

$$C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2C_n^5 - \ldots = \pm 2^{n-1}.$$

Cesaro (*E.*). — Sur les cercles inscrits à un triangle. (99-103).

Application des coordonnées d'inertie, de l'auteur, lui permettant d'établir diverses propriétés relatives à l'hyperbole de Kiepert, à l'ellipse de Steiner, aux points de Steiner et de Tarry, et aux points de Brocard.

Renon (*A.*). — Solution géométrique de la question 1567. (104-105).

Propriété d'une conique C inscrite dans le quadrilatère circonscrit à deux autres coniques A et B.

Publications récentes. — (106-111).

Questions proposées. — 1573 à 1580. (111-112).

Fouret (*G.*). — Sur les pôles principaux d'inversion de la cyclide de Dupin. (113-116).

M. Hadamard a démontré que le seul lieu géométrique des pôles principaux d'inversion que puisse admettre une surface est une droite ou un système de droites en nombre limité. Dans le présent article, M. Fouret montre que, pour la cyclide de Dupin, on obtient un système de deux droites rectangulaires.

Laurent (*H.*). — Sur la théorie de l'élimination. (116-119).

Note se rattachant à l'article paru sous le même titre un peu auparavant

(*voir* ci-dessus). Considérant deux équations, l'auteur arrive à un théorème qui permet de mettre le premier membre de la résultante sous la forme d'une intégrale multiple.

Hofmann (*F.*). — La solution géométrique de l'équation du quatrième degré. (120-133).

L'auteur ramène la solution aux intersections de quatre droites OA, OB, OC, OD avec une parabole passant par O. Détermination d'une conique passant par les quatre points d'intersection. Exemples.

Coelingh (*D.*). — Transformation de figures analogues à la transformation par rayons vecteurs réciproques. (133-147).

L'auteur s'est en partie rencontré avec Laguerre (voir *Nouvelles Annales*, 1882, *Transformations par semi-droites réciproques*), ainsi qu'il l'indique lui-même; son travail se subdivise ainsi :

Propriété relative à une droite et à une circonférence. Définitions; théorèmes fondamentaux. Axes et centres de similitude. Longueur de tangentes communes à deux cycles; inversion de systèmes et de faisceaux. Systèmes de tangentes à un cycle.

Cesaro (*E.*). — Question de Géométrie intrinsèque. (147-152).

Problème antérieurement examiné par M. Pellet : Ayant porté sur les normales à une ligne (M), inclinées de α sur les normales principales, des longueurs $MM_1 = l$, on se propose d'étudier la ligne (M_1).

Cesaro (*E.*). — Sur la courbure des coniques. (152-159).

Généralisation d'une propriété des coniques, concernant le deuxième centre de courbure. Détermination de lieux de foyers. Équations intrinsèques de développées de coniques.

QUESTIONS PROPOSÉES. — 1581, 1582. (160).

Stieltjes (*T.-J.*). — Note sur l'intégrale $\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$. (161-171).

L'objet de cette Note est le développement de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,G_{2n}(x)\,dx$$

sous la forme

$$a_1\int_a^{x_1} G_{2n}(x)\,dx + a_2\int_{x_1}^{x_2} G_{2n}(x)\,dx + \ldots + a_{n+1}\int_{x_n}^{b} G_{2n}(x)\,dx.$$

Détermination des constantes $x_1, \ldots, x_n$ comprises entre a et b, et des constantes $a_1, \ldots, a_{n+1}$ comprises dans les intervalles formés par $f(a)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.

Cesaro (*E.*). — Sur deux classes remarquables de lignes planes. (171-190).

Étude des courbes planes douées d'un pôle tel que le deuxième rayon de courbure soit partagé dans un rapport constant avec le rayon vecteur. Lignes de Ribaucour. Spirales sinusoïdes de M. Haton de la Goupillière. Équations intrinsèques. Transformation, l'une en l'autre, de deux spirales sinusoïdes. Exemples tirés des valeurs les plus simples des indices.

Pomey (*E.*). — Sur quelques intégrales remarquables. (191-194).

Ces intégrales sont

$$\int \frac{x^2\,dx}{u^2}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{v^2}, \quad \int \frac{b x^2\,dx}{(au + bv)^2}, \quad \int \frac{a\,dx}{[a + (ax + b)\operatorname{tang} x]^2},$$

en posant

$$u = x \sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x \cos x.$$

Pomey (*E.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales. (194-196).

Cette équation est

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

M. Pomey l'intègre directement au moyen de quelques transformations simples.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur un théorème général de convergence. (196-198).

Théorème général, et d'une extrême simplicité, dont les règles de Cauchy, de Duhamel et Raabe, de Bertrand, etc., sont de simples corollaires. Il serait à désirer que la remarquable proposition de M. Jensen fût introduite dans l'enseignement.

Auric (*A.*). — Problème. (198-199).

n aiguilles tournant autour du même axe, dans le même sens, avec des vitesses p fois plus grandes l'une que l'autre, déterminer une position telle qu'il soit possible de permuter circulairement ces aiguilles.

Biehler (*Ch.*). — Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable. (200-203).

Démonstration simple de l'existence de la série dérivée, à l'intérieur du cercle de convergence.

CORRESPONDANCE. — Extrait d'une Lettre de M. Halphen : *Sur les*

polynômes A_n *qui se déduisent les unes des autres par la loi* $A_n = x^2 A_{n-2} - (2n-1) A_{n-1}$. (204).

Bibliographie. — *E. Caspari :* Cours d'Astronomie pratique, Ire Partie; Coordonnées vraies et apparentes; Théorie des instruments; Paris, 1888. (205-207).

Publications récentes. — (207-208).

Cesaro (*E.*). — Remarques sur la théorie des roulettes. (209-230).

Application des principes fondamentaux de la Géométrie intrinsèque. Théorèmes de Steiner et de Habich; formule de Savary. Roulement d'une conique sur une droite. Courbes de Delaunay; surface de Plateau. Roulement d'une spirale sinusoïde, d'une ligue de Ribaucour. A rapprocher du précédent article *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (*voir* plus haut).

B. (*Ch.*). — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours général de 1888 (¹). (231-236).

Propriétés du lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une ellipse.

Ferval (*H.*). — Solution de la question proposée au Concours d'agrégation en 1887. (236-243).

Lieu des points X, tels que les tangentes menées de X à une conique S soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées à une autre conique S'. Propriétés diverses.

Barisien (*E.*). — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1887. (244-248).

Sur un système de deux paraboles, tangentes l'une et l'autre à deux droites rectangulaires.

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Quelques remarques géométriques à propos de la question précédente. (248-252).

Nous avons eu souvent l'occasion d'attirer déjà l'attention du lecteur sur les articles très remarquables publiés sous ce pseudonyme, dont nous continuons à respecter le secret.

(¹) Nous nous demandons s'il n'y a pas une erreur de date, cet article figurant dans le numéro de mai 1888.

Niewenglowski (*G.-K.*). — Solution de la question proposée en Philosophie au Concours général de 1884. (252-255).

Propriétés d'un triangle, et d'une droite située hors de son plan.

Concours général de 1887. — Énoncés des compositions : Philosophie, Seconde, Troisième. (255-256).

Cesaro (*E.*). — Sur la potentielle triangulaire. (257-268).

On appelle ainsi la ligne que décrit un point P quand ses coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux $n^{\text{ièmes}}$ puissances des côtés correspondants. Elle a été étudiée par MM. Faure, Lemoine, Brocard, de Longchamps, et M. Cesaro applique à cette question les principes de la Géométrie intrinsèque.

D'Ocagne (*M.*). — Quelques propriétés de l'ellipse; déviation; écart normal. (268-282).

Suite des études suivantes du même auteur : *Étude géométrique sur l'ellipse* (*Revue maritime et coloniale,* p. 167; 1886); *De la déviation dans l'ellipse* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* p. 370-534; 1886). La *déviation* est l'angle de la tangente en un point avec la tangente correspondante au cercle principal; l'*écart normal* en un point est l'angle de la normale et du diamètre. De ces notions, et par une analyse simple, M. d'Ocagne obtient un grand nombre de propriétés de l'ellipse, et quelques constructions élégantes.

Juhel-Rénoy. — Sur la section d'une surface par un plan bitangent. (282-287).

Examen d'une surface du quatrième degré, présentant trois plans principaux rectangulaires, et un cône de directions asymptotiques doubles. Propriétés d'un plan bitangent, d'une quadrique bitangente. Cas du tore.

Bioche (*Ch.*). — Sur les minima de sommes de termes positifs dont le produit est constant. (287-288).

Démonstration très simple de la réciproque du théorème bien connu sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs.

Farjon (*F.*). — Note sur une propriété du cercle des neuf points. (288-292).

Génération nouvelle du cercle des neuf points, considéré comme lieu des centres de gravité d'un système de quadrilatères.

Fontaneau (*E.*). — Coniques polaires d'un point et d'une droite. (292-295).

Huit théorèmes, quelques-uns connus, sur les pôles et polaires, très simplement établis.

Un abonné. — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1887. (295-302).

Sur la surface *cylindroïde* ayant pour équation

$$z(x^2+y^2) - 2u(x^2-y^2) = 0 \qquad \text{(coordonnées rectangulaires)}.$$

Correspondance. — Extrait d'une Lettre d'un abonné : au sujet d'un article de M. J. Collin *Sur le théorème de Rolle* (juin 1887); rectification d'une erreur. (302-303).

Publications récentes. — (303-304). A. L.

SITZUNGSBERICHTE der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (¹).

1er semestre 1885.

Fuchs. — Propriété caractéristique des intégrales de certaines équations différentielles entre des variables imaginaires. (5-12).

Si $R(x)$ est un polynôme de degré n et si l'on a

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)},$$

on sait que, pour $n \leq 4$, x peut être envisagée comme une fonction analytique de u. Au contraire, pour $n > 4$, on ne peut envisager x comme fonction analytique de u. Il en est manifestement de même pour toutes les équations différentielles que l'on obtient en transformant l'équation précédente par des substitutions analytiques.

Mais, parmi les autres équations différentielles possibles entre x et u, parmi celles que l'on ne peut obtenir par transformations analytiques de l'équation différentielle $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$, où, ne l'oublions pas, x et u peuvent prendre, comme l'indique le titre du Mémoire, des valeurs *imaginaires*, y en a-t-il desquelles on ne puisse déduire entre x et u une relation fonctionnelle dans le sens ordinaire du mot?

Il est intéressant d'apprendre qu'il y a de telles équations différentielles pour chaque *ordre* et chaque *degré* possibles, et ce résultat joue un rôle très important dans l'exposition des principes de la théorie générale des équations différentielles.

M. Fuchs nous donne un exemple de deux classes d'équations différentielles de cette catégorie; elles sont l'une du premier et l'autre du second ordre.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI_2, p. 76.

Envisageons l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{z-a_k} + P(z)\right]\frac{dy}{dz} + \left[\sum_{k=1}^{3} \frac{\beta_k}{z-a_k} + Q(z)\right]y = 0,$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des fonctions rationnelles de z qui ne sont infinies ni pour $z = a_1$, ni pour $z = a_2$, ni pour $z = a_3$, où les β sont des constantes et où les points a_1, a_2, a_3 sont choisis, ce qui est toujours possible, de manière que l'équation différentielle admette une intégrale univoque, finie et continue aux environs de chacun de ces points. M. Fuchs démontre que, pour toute valeur de z, l'intégrale générale y de l'équation différentielle considérée peut prendre telle valeur que l'on voudra.

Si y désigne une branche déterminée de l'équation différentielle précédente et si nous posons

$$u = \frac{d \log y}{dz},$$

nous obtenons entre u et z une équation différentielle du *premier* ordre. Si nous prenons z comme variable indépendante, les points de ramification de l'intégrale u de cette équation différentielle du premier ordre ne se déplacent pas d'une façon continue avec les valeurs initiales (*comparez* à propos de cette notion les comptes rendus des *Sitzungsberichte* de l'année 1884). Si nous prenons, au contraire, u comme variable indépendante, les points de ramification de l'intégrale z de la même équation différentielle du premier ordre se déplacent d'une façon continue avec les valeurs initiales. Il n'y a donc pas de relation analytique entre les deux variables z et u reliées cependant par une équation différentielle du premier ordre.

Il résulte de ce dernier exemple que déjà, pour étudier les équations différentielles *algébriques* du *premier* ordre,

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0;$$

entre deux variables imaginaires y et z, il faut distinguer avec soin le cas où, soit que l'on prenne y, soit que l'on prenne z comme variable indépendante, les intégrales de l'équation différentielle n'ont pas de point de ramification se déplaçant d'une façon continue avec les valeurs initiales, du cas où, au contraire, soit pour z, soit pour y prise comme variable indépendante, les intégrales de l'équation différentielle ont des points de ramification se déplaçant d'une façon continue avec les valeurs initiales.

M. Fuchs démontre que, dans le *premier cas*, l'équation différentielle algébrique du premier ordre

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0$$

définit toujours y comme fonction analytique de z. A cet effet, il lui suffit, d'après les résultats établis dans son Mémoire de 1884, de démontrer que la fonction algébrique $\frac{dy}{dz}$ de y, ainsi que la fonction algébrique $\frac{dz}{dy}$ de z, sont de *rang nul* ou *un*.

Dans le *second cas* on ne peut énoncer de théorème général. Il faut d'abord considérer à part les équations différentielles qui, tout en ayant des intégrales

à points de ramification se déplaçant d'une façon continue avec les valeurs initiales, peuvent cependant être transformées, par une transformation algébrique, en équations différentielles dont les intégrales n'aient que des points de ramification fixes. Ces équations différentielles ne définiront pas des transcendantes essentiellement différentes de celles qui sont définies par les équations différentielles dans le premier cas considéré.

Pour les autres équations différentielles rentrant dans le *second cas,* il faudra rechercher si les valeurs de y correspondant à une même valeur arbitraire de z, et si les valeurs de z correspondant à une même valeur arbitraire de y, représentées géométriquement, couvrent une ou plusieurs surfaces d'une façon *continue* comme dans l'exemple cité plus haut de l'équation différentielle entre u et z, ou au contraire se répartissent en un nombre fini ou infini de points *discontinus* dans l'espace. Si ces valeurs couvrent une ou plusieurs surfaces d'une façon *continue,* on peut être certain que l'équation différentielle du premier ordre ne définit pas une fonction *analytique* de z. M. Fuchs obtient donc, pour ces équations différentielles du premier ordre, le même résultat que Jacobi avait obtenu pour une intégrale abélienne de première espèce.

Wilsing. — Sur les applications du pendule à la détermination de la densité moyenne de la Terre. (13-15).

Hausmaninger. — A propos de la théorie du choc longitudinal de corps cylindriques. (49-62).

Schering. — Remarques concernant la troisième démonstration de Gauss, du théorème de réciprocité des restes quadratiques.

Afin d'avoir en quelques lignes une idée nette de la marche suivie par M. Schering, ne considérons dans cette analyse que le cas où m et n sont deux entiers impairs, plus grands que l'unité et premiers relatifs; désignons alors par μ l'un des entiers $1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$. Soit q_μ l'entier le plus voisin du nombre $\frac{n\mu}{m}$. Enfin employons les notations symboliques de M. Kronecker en écrivant

$$\operatorname{sgn} x = +1 \quad \text{pour} \quad x > 0$$

et

$$\operatorname{sgn} x = -1 \quad \text{pour} \quad x < 0,$$

et en désignant par $R(x)$ le reste que l'on obtient en retranchant de x le nombre entier le plus voisin de x, de sorte que $-\frac{1}{2} < R(x) < \frac{1}{2}$.

M. Schering commence par démontrer que l'on a toujours

$$(-1)^{q_\mu} \operatorname{sgn} R\left(\frac{n\mu}{m}\right) = \operatorname{sgn} \prod_\nu \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right)$$

$$\left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right).$$

En écrivant cette égalité pour $\mu = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ et faisant le produit des

$\frac{m-1}{2}$ égalités ainsi obtenues, il vient, en observant que $\sum_{(\mu)} q_\mu \equiv 0 \pmod 2$,

$$\operatorname{sgn} \prod_{(\mu)} \mathrm{R}\left(\frac{n\mu}{m}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{(\mu,\nu)} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right);$$
$$\left(\mu = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}; \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right).$$

Mais alors si, α désignant le nombre des valeurs négatives de $\mathrm{R}\left(\frac{n\mu}{m}\right)$, on définit le symbole de Legendre par la caractéristique de Gauss en posant

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^\alpha = \operatorname{sgn} \prod_{(\mu)} \mathrm{R}\left(\frac{n\mu}{m}\right),$$

il vient immédiatement

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}.$$

M. Schering démontre également la loi de réciprocité dans les autres cas et établit ensuite comme corollaires une suite d'égalités dont plusieurs ont servi de point de départ à des démonstrations de la loi de réciprocité.

Kronecker. — Remarque faite au sujet de la démonstration précédente de M. Schering. (117-118).

M. Kronecker fait suivre la démonstration de M. Schering d'une nouvelle manière de présenter la démonstration qu'il a donnée dans la séance du 22 juin 1876, de la loi de réciprocité des restes quadratiques d'après la *troisième* démonstration de Gauss.

m et n désignant des entiers positifs impairs quelconques, et h, h^0, h' des entiers positifs plus petits que $\frac{m}{2}$, on a pour tout nombre h^0 un nombre h', que

$$n(2h^0 - 1) \equiv (-1)^{\left[n\frac{2h^0-1}{m}\right]}(2h' - 1) \pmod m,$$

où l'on représente par $[a]$ l'entier le plus voisin de a et plus petit que

Comme il est aisé de vérifier que

$$\left[n\frac{2h^0-1}{m}\right] + \left[n\frac{m-2h^0+1}{m}\right] = n - 1,$$

qui est un nombre *pair*, on peut, en posant $h = 2h^0 - 1$ lorsque l'on a

$$2h^0 - 1 < \frac{m}{2}$$

et $h = m - 2h^0 + 1$ lorsque l'on a

$$2h^0 - 1 > \frac{m}{2}$$

mettre la congruence précédente sous la forme

$$n(2h^0 - 1) \equiv (2h' - 1)(-1)^{\left[\frac{nh}{m}\right]} \pmod{m}$$

ou encore

$$n(2h^0 - 1) \equiv (2h' - 1)\,\mathrm{sgn}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right).$$

Prenons successivement, pour h, les nombres $1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ et faisons le produit des $\frac{m-1}{2}$ congruences ainsi obtenues. Si m est un nombre premier, on aura, en supprimant dans les deux membres le facteur commun, pour le symbole $\left(\frac{n}{m}\right)$ de Legendre, la relation

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \mathrm{sgn}\prod_{h,k}\left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right)$$
$$\left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2} \\ k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2} \end{array}\right),$$

d'où résulte immédiatement la loi de réciprocité.

Röntgen. — Recherches sur l'action électromagnétique de la polarisation diélectrique. (195-198).

Kronecker. — Sur la fonction arithmétique $R(a)$. (383-396).

Dans ce Mémoire, M. Kronecker se propose de mettre bien en évidence les rapports qui ont lieu entre celles des démonstrations du théorème de réciprocité des restes quadratiques qui se basent sur le lemme de Gauss. A cet effet, il ramène ces différentes démonstrations aux diverses propriétés fondamentales de la *fonction arithmétique* $R(a)$. J'ai rappelé dans l'analyse du précédent Mémoire la définition de $R(a)$ ainsi que celle de $\mathrm{sgn}(a)$ et celle de $\mathrm{sgn}[a]$.

D'après le lemme de Gauss, on a

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \mathrm{sgn}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{km}{n}\right),$$

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \mathrm{sgn}\prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} R\left(\frac{hn}{m}\right),$$

où m et n sont des nombres premiers et où $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$ sont les symboles de Legendre.

Pour démontrer le théorème de réciprocité des restes quadratiques, il suffit

donc de chercher une relation réciproque entre les deux signes

$$\operatorname{sgn}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{km}{n}\right)$$

et

$$\operatorname{sgn}\prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} R\left(\frac{hn}{m}\right).$$

A cet effet, M. Kronecker démontre de trois manières différentes que, si m et n sont deux entiers impairs premiers relatifs quelconques, le nombre des valeurs négatives de

$$\operatorname{sgn} R\left(\frac{hn}{m}\right), \qquad \operatorname{sgn} R\left(\frac{km}{n}\right),$$

où $h = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ et $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, n'est *impair* que lorsque l'on a

$$m \equiv n \equiv -1, \qquad (\operatorname{mod} 4);$$

dans tout autre cas ce nombre est *pair*.

La première des trois démonstrations de M. Kronecker est la plus simple au point de vue de la *forme*. Elle se base sur l'équation

$$\operatorname{sgn} R(a) = \operatorname{sgn}\prod_{(g)}\left(\frac{g}{2} - a\right),$$

où la quantité a est supposée positive et où le produit est étendu aux valeurs entières successives de l'indice g, $g = 1, 2, \ldots, [2a]$. C'est au fond une simplification de la troisième démonstration de Gauss.

Si l'on ne s'attache pas à la simplicité de la forme, mais bien à la simplicité des propositions dont on fait usage, la seconde des trois démonstrations de M. Kronecker est à coup sûr la plus simple que l'on puisse concevoir. Elle se base *uniquement* sur les relations évidentes

$$R(a+1) = R(a),$$
$$R(-a) = -R(a).$$

C'est au fond la cinquième démonstration de Gauss, donnée à l'aide du symbole R.

Avant de donner la troisième démonstration, on commence par établir une équation réciproque entre les deux fonctions arithmétiques

$$R(hw) \qquad \text{et} \qquad R(kv),$$

où v et w sont deux quantités réelles positives réciproques quelconques, de sorte que

$$vw = 1.$$

On démontre qu'à tout *entier* h correspond un *entier* k, tel que l'on ait

$$\frac{R(hw)}{\sqrt{w}} + \frac{R(kv)}{\sqrt{v}} = 0.$$

Appliquons ce résultat au cas où $v = \frac{m}{n}$ et par suite $w = \frac{n}{m}$, m et n étant des entiers quelconques et, par exemple, $m < n$. A chacun des entiers

$$h = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2},$$

correspondra *un* des nombres

$$k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$$

tel que l'on ait

$$m\,\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) + n\,\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = 0.$$

C'est de cette équation réciproque et de relations qui se déduisent *immédiatement* de la définition de la fonction R que l'on fait uniquement usage dans cette troisième démonstration. Il est intéressant de constater que cette troisième démonstration est au fond identique à celle de M. Zeller (*Monatsberichte*, 1872), et ne diffère pas non plus essentiellement de la démonstration de M. Petersen (*American Journal of Mathematics*, t. II, 1879). Mais, présentée à l'aide de la fonction arithmétique R, on aperçoit nettement qu'elle consiste au fond, pour $m < n$, à ne pas considérer *simultanément* tous les restes $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$, mais au contraire à considérer d'*abord*, à part, ceux des restes $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ qui sont liés aux restes $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ par l'équation réciproque

$$m\,\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) + n\,\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = 0,$$

et de grouper *ensuite*, deux à deux, les autres restes $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$. Les signes se déterminent à l'aide des relations mentionnées tout à l'heure, qui se déduisent immédiatement de la définition de la fonction arithmétique R.

Après avoir donné cette vue d'ensemble sur les démonstrations de la loi de réciprocité des restes quadratiques qui se basent sur le lemme de Gauss, après avoir mis à nu le mécanisme de ces démonstrations par l'emploi judicieux de la fonction arithmétique $\mathrm{R}(x)$, M. Kronecker montre que le théorème de réciprocité des restes quadratiques peut également être facilement ramené à la démonstration d'un simple théorème de multiplication concernant une certaine fonction arithmétique $\theta(m, n)$ de deux entiers impairs m et n, premiers relatifs, d'ailleurs positifs ou négatifs. Mais la démonstration *directe* de ce théorème de multiplication lui échappe encore.

Enfin, dans le courant de ses démonstrations, M. Kronecker donne aussi des représentations analytiques très intéressantes de fonctions arithmétiques, basées sur la représentation de la fonction arithmétique $\mathrm{R}(a)$ par la série

$$\sum_{m=1}' (-1)^m \frac{\sin 2ma\pi}{m\pi},$$

le cas $R(a) = -\frac{1}{2}$ excepté. En voici un exemple. On a

$$m \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sgn} R\left(\frac{hn}{m}\right) = \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{tang}\frac{h\pi}{m} \operatorname{tang}\frac{hn\pi}{m}.$$

Il est naturel que la fonction arithmétique R soit l'instrument choisi par M. Kronecker dans cet ordre de recherches arithmétiques. C'est en effet $R\left(\frac{k}{n}\right)$ qui est l'invariant arithmétique, tout comme $\operatorname{tang}\frac{k\pi}{n}$ est l'invariant analytique, de tous les entiers k congrus suivant le module n, de sorte que la congruence

$$k \equiv k' \pmod{n}$$

peut être remplacée entièrement par l'égalité

$$R\left(\frac{k}{n}\right) = R\left(\frac{k'}{n}\right)$$

tout aussi bien que par l'égalité

$$\operatorname{tang}\frac{k\pi}{n} = \operatorname{tang}\frac{k'\pi}{n}.$$

C'est par cette remarque fondamentale que M. Kronecker commence son Mémoire.

Hölder. — Sur une nouvelle condition suffisante pour qu'une fonction puisse être représentée par une série de Fourier. (419-434).

Soit x une variable réelle, et $y = f(x)$ une fonction de x définie univoquement et continue dans l'intervalle

$$a \leqq x \leqq b.$$

Considérons une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$ situés sur le lieu des points $y = f(x)$; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$ les abscisses de ces points; nous supposons que les points ont été désignés de manière que les différences de leurs abscisses

$$\Delta_1 = a_2 - a_1, \qquad \Delta_2 = a_3 - a_2, \qquad \ldots, \qquad \Delta_r = a_{r+1} - a_r$$

soient des quantités positives.

Désignons par s_p le nombre positif qui mesure l'aire du segment limité par le lieu $y = f(x)$ de A_p à A_{p+1} et la corde $A_p A_{p+1}$. Alors, quelle que soit la fonction $f(x)$, s_p sera toujours égal au produit de Δ_p et d'un nombre qui devient infiniment petit en même temps que Δ_p. Il peut arriver, pour certaines fonctions $f(x)$, que la limite de la somme

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{s_p}{\Delta_p}$$

soit, en outre, *nulle*, lorsque, fixant A_1 et A_{r+1}, on diminue indéfiniment les nombres Δ_p. Dans ce cas la fonction $f(x)$ peut être représentée, pour chaque valeur de x comprise entre a et b, par la série de Fourier

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x')\,dx' + \frac{2}{b-a}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b f(x')\cos\frac{2\nu\pi(x-x')}{b-a}\,dx'.$$

Ce théorème a d'abord été *énoncé* par M. Weierstrass.

Si la fonction $y=f(x)$ n'est pas continue, mais admet cependant une intégrale, on a, sous certaines restrictions, un théorème analogue.

Supposons que, dans l'hypothèse faite maintenant pour $y=f(x)$, la même somme que tout à l'heure

$$\sum_{(p)} \frac{s_p}{\Delta_p}$$

reste, pour a_1 et a_{r+1} invariables, toujours plus petite qu'un certain nombre déterminé; l'expression considérée admet alors une limite finie d'indétermination pour les Δ_p infiniment petits. Supposons aussi que, si l'on fait tendre l'intervalle $a_1 a_{r+1}$ vers un point déterminé x_0 compris dans cet intervalle, cette limite finie d'indétermination diminue indéfiniment. Alors la série de Fourier est convergente pour $x=x_0$, sa somme est égale à $f(x_0)$ et x_0 est un point où la fonction est continue.

En supposant en outre que la somme

$$\sum_{(p)} \frac{s_p}{\Delta_p}$$

reste toujours plus petite qu'un nombre déterminé, quel que soit le choix primitif des points $a_1, a_2, \ldots$ dans l'intervalle considéré, M. Hölder démontre les deux théorèmes suivants :

« 1. La somme des n premiers termes de la série écrite plus haut oscille, pour chaque valeur déterminée de x, entre des limites finies, et il n'y a alors qu'un nombre fini m_δ de points pour lesquels les limites d'indétermination de la série de Fourier diffèrent soit l'une de l'autre, soit de $f(x)$, d'une quantité plus grande qu'un nombre δ donné arbitrairement. »

» 2. La série de Fourier converge pour chaque valeur de x pour laquelle on obtient pour l'expression

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{2}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)]$$

une valeur finie et déterminée, et cette limite représente alors la valeur de la série. »

Les *fonctions à oscillations limitées* considérées par M. Jordan dans le tome XCII des *Comptes rendus* rentrent dans le critérium donné par M. Hölder.

2e semestre, 1885.

Weierstrass. — Sur la représentation analytique des fonctions dites *arbitraires d'une variable réelle*. (Premier Mémoire.) (633-639).

Soit $f(x)$ une fonction qui, pour chaque valeur *réelle* de la variable x, est univoque, finie, continue et dont la valeur absolue reste plus petite qu'une quantité finie donnée; $f(x)$ sera dite *fonction arbitraire de x.*

On sait que l'on peut toujours représenter $f(x)$ par une limite d'une intégrale définie de la manière suivante :

$$f(x) = \lim_{k=0} \left[\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du \right].$$

Dans cette expression u est une variable réelle et k une quantité positive indépendante de x et de u.

M. Weierstrass généralise ce théorème, en démontrant que l'on peut aussi représenter $f(x)$ par la limite

$$f(x) = \lim_{k=0} \left[\frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \right],$$

où $\psi(x)$ est une fonction *quelconque* jouissant des mêmes propriétés que $f(x)$ et, en outre, des suivantes : $\psi(x)$ est une fonction paire, $\psi(x)$ ne change pas de signe, et l'intégrale

$$\omega = \int_0^{\infty} \psi(x)\, dx$$

a une valeur finie. Pour $\psi(x) = e^{-x^2}$, on retombe sur le premier théorème.

En choisissant convenablement la fonction $\psi(x)$, on peut tirer de ce théorème des conséquences remarquables.

I. Prenons, pour $\psi(x)$, une fonction transcendante *entière*, telle que la fonction

$$\frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

que nous en déduisons et que nous désignerons par

$$F(x, k),$$

soit développable en une série entière uniformément convergente de x pour toute valeur déterminée que l'on donne à k. Il y a une infinité de fonctions transcendantes entières $\psi(x)$ pour lesquelles cela a lieu. On peut donc représenter, d'une infinité de manières, la fonction *arbitraire* $f(x)$ par la limite, pour $k = 0$, d'une fonction transcendante *entière* de x qui contient un paramètre positif k.

II. Si la variable réelle x est limitée à un intervalle *fini* et si l'on fixe une quantité positive quelconque δ, on peut, et cela d'une infinité de manières, trouver une fonction *rationnelle entière* $G(x)$, telle que, si l'on fait varier x dans l'intervalle fini considéré, la valeur absolue de la différence

$$f(x) - G(x)$$

reste plus petite que δ.

Il suffit, pour établir ce second théorème, de prendre pour $\psi(x)$ certaines fonctions transcendantes entières sans que la fonction qui en résulte pour $F(x, k)$ soit nécessairement entière.

Il est ainsi établi en toute rigueur qu'il existe des fonctions rationnelles entières qui diffèrent, aussi peu que l'on veut, d'une fonction arbitraire donnée $f(x)$ en tous les points d'un intervalle réel fini, arbitrairement fixé. On peut aussi chercher à déterminer ces fonctions rationnelles entières devant servir de fonctions approchées pour $f(x)$. On obtient alors, pour toute quantité positive δ, une quantité k et un nombre entier n pour lesquels la valeur absolue de la différence

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,\omega k^\nu} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} du \right] x^\nu$$

est plus petite que δ. Mais, lorsqu'on fait décroître δ indéfiniment, k décroît aussi indéfiniment et l'on ne voit pas, dans l'expression précédente si le coefficient de x^ν reste fini. Or cette condition est tout à fait indispensable pour que la somme que nous retranchons de $f(x)$ puisse, dans la pratique, nous servir de fonction approchée de $f(x)$ pour une valeur de δ aussi petite que l'on veut. Il reste donc un point important à élucider. Ce sera en partie l'objet d'un second Mémoire.

III. Chaque fonction arbitraire $f(x)$ peut être représentée d'une infinité de manières par une série dont les termes sont des fonctions *rationnelles entières* de x, cette série étant absolument convergente pour toute valeur finie de x et uniformément convergente dans tout intervalle fini dans lequel on considère la variable x.

Kronecker. — Sur l'intégrale de Dirichlet. (641-665).

Soient x une variable réelle variant de o à X et $f_0(x)$ une fonction univoque, réelle, intégrable, toujours plus petite en valeur absolue qu'une quantité finie déterminée, et telle que

$$\lim_{x=0} f_0(x) = 0.$$

Si l'on désigne par ξ et x^0 deux quantités positives déterminées quelconques, on démontre que

$$\lim_{\sigma=0} \int_{\sigma}^{\xi} f_0(\sigma x) \sin \pi x \, d \log x = 0;$$

d'où l'on conclut que, si l'on peut démontrer que la limite

$$\lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin \frac{\pi x}{\sigma} \, d \log x$$

est nulle, il en résulte que l'on a aussi

$$(I) \qquad \lim_{\sigma=0} \int f_0(x) \sin \frac{\pi x}{\sigma}\, d \log x = 0,$$

où l'intégrale est étendue à une partie *quelconque* de l'intervalle (o, ..., X) considéré.

D'après ce théorème, il *suffit*, pour démontrer l'équation (I), de montrer que l'on a, par exemple,

$$\lim_{\sigma=0} \int_\sigma^1 f_0(x) \sin \frac{\pi x}{\sigma}\, d \log x = 0,$$

ou, ce qui revient au même, que l'on a

$$\lim_{x_0=0}\ \lim_{\xi=\infty}\ \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin \frac{\pi x}{\sigma}\, d \log x = 0.$$

Or cette dernière équation est manifestement vérifiée lorsque l'intégrale

$$\int_0^x f_0(x)\, d \log x$$

est *absolument convergente*. Voilà donc une condition suffisante pour que l'équation (I) ait lieu. (*Comparez* P. Du Bois-Reymond, *Comptes rendus*, p. 915 et 962; 1881.)

Mais l'équation (I) a aussi lieu dès que l'on a, pour un entier quelconque m et pour une quantité quelconque x_0,

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \sum_{(h)} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)\, d \cos \pi x = 0,$$

ou, ce qui est équivalent, dès que l'on a

$$(II) \qquad \lim_{x^0=0}\ \lim_{m=\infty}\ \lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \sum_{(h)} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)\, d \cos \pi x = 0,$$

$$m \leq \frac{1}{2}(h-1) \leq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],$$

où l'on a écrit pour abréger $\varphi(x) = \dfrac{f_0(x)}{x}$, où $[a]$ est l'entier le plus voisin de a et plus petit que a, et où le premier et le dernier terme de la somme indiquée $\sum_{(h)}$ sont à multiplier par le facteur $\frac{1}{2}$. Cette dernière condition suffisante peut être interprétée géométriquement. Elle indique que l'*enlacement* de la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$y = \varphi(x) + [\varphi(x) - \varphi(x+\sigma)] \sin \frac{\pi x}{\sigma},$$

x variant de $(2m+1)\sigma$ à x_0, autour de la courbe

$$y = \varphi(x),$$

devient toujours plus étroit lorsque σ diminue indéfiniment, de manière que l'aire algébrique totale comprise entre les deux courbes devienne plus petite que toute quantité donnée.

On ramène d'ailleurs au cas considéré jusqu'ici celui où, au lieu de la fonction $f_0(x)$, on a une fonction $f(x)$ jouissant des mêmes propriétés que $f_0(x)$, sauf que

$$\lim_{x=0} f(x) = f(0),$$

où $f(0)$ est une quantité finie déterminée, en général différente de zéro. Il vient alors, au lieu de (I), cette autre équation qui comprend (I),

$$\lim_{\sigma=0} \int f(x) \sin \frac{\pi x}{\sigma} \, d \log x = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Nous arrivons maintenant à montrer que la condition

$$\text{(III)} \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \left[\sigma \sum_{(h)} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) \right] = 0,$$

ou, ce qui est équivalent, que la condition

$$\lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_{(h)} (-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} = 0,$$

$$m \leq \frac{1}{2}(h-1) \leq \left[\frac{x^0}{2\sigma} \right], \qquad 0 \leq x \leq 1$$

est *suffisante* pour que l'équation (I) ait lieu. En effet, si l'équation (III) a lieu, l'équation (II) est manifestement vérifiée.

Cette condition (III) est plus générale que celles que l'on connaissait jusqu'ici. Nous en déduisons d'abord le théorème général suivant :

« IV. Pour conclure que, pour toute quantité x' plus petite que X, on a

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin w x \pi \, d \log x = \frac{\pi}{2} f(0),$$

il *suffit* de montrer que l'on peut trouver un entier positif N et deux quantités σ^0, x^0, de manière que la valeur absolue de la série

$$-\frac{1}{2} f(\sigma x + \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma) - f(\sigma x + 3\sigma) + \ldots$$

$$+ f(\sigma x + 2r\sigma) - \frac{1}{2} f(\sigma x + 2r\sigma + \sigma),$$

$$(0 \leq x \leq 1)$$

soit plus petite que N pour tout σ plus petit que σ^0 et pour tout r plus petit que $\dfrac{x^0}{2\sigma}$.

Géométriquement, lorsque σ diminue indéfiniment, la somme algébrique des aires des triangles dont les sommets successifs sont donnés par les abscisses

$$\sigma x + 2\sigma k - \sigma, \quad \sigma x + 2\sigma k, \quad \sigma x + 2\sigma k + \sigma$$

et par les ordonnées

$$f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma), \quad f(\sigma x + 2\sigma k), \quad f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma),$$

divisée par 2σ, c'est-à-dire par la projection de chacun de ces triangles sur l'axe des abscisses, reste inférieure à une limite finie et déterminée.

Cette condition IV, donc aussi la condition III dont elle est déduite, comprend celle que Lejeune-Dirichlet avait supposée avoir lieu dans le premier Mémoire qu'il a publié sur ce sujet (*Crelle*, t. 4).

Cette même condition IV, donc aussi la condition III, comprend également et celle de M. Weierstrass et celle plus générale que M. Hölder en a tirée (*Sitzungsberichte*, 1885, premier semestre) et, par suite, celle de M. Camille Jordan (*Comptes rendus*, 1881).

La condition III comprend aussi celle que M. Lipschitz a donnée dans le tome 63 du *Journal de Crelle*.

M. Kronecker le démontre. Puis il déduit de ses formules générales d'autres conditions qui sont également suffisantes.

Il trouve ainsi qu'il suffit de démontrer que la limite

$$\lim_{\sigma=0} \sum_{(h)} (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x + h},$$

où la somme est étendue aux entiers h tels que

$$2m < h \leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]; \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

tende vers zéro lorsque m augmente indéfiniment et lorsque x^0 diminue indéfiniment, pour être certain que l'équation (I) concernant la fonction $f(x)$ a lieu.

Il vérifie ensuite *directement* ce résultat important.

Enfin il généralise encore les conditions précédentes en y reliant m à σ par une équation

$$2m = \frac{\theta(\sigma)}{\sigma},$$

où la fonction θ est choisie convenablement, au lieu de faire croître m indéfiniment et décroître σ indéfiniment en laissant ces deux quantités indépendantes l'une de l'autre comme il a été fait jusqu'ici.

M. Kronecker n'a pas encore comparé entièrement à son critérium général, celui donné par M. Ulysse Dini (1880), et il ne sait pas si les conditions données par M. P. Du Bois-Reymond dans le premier Chapitre de son Ouvrage : *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln*, pour *certaines* fonctions particulières $f(x)$, sont ou ne sont pas contenues dans l'équation (III).

Quoi qu'il en soit, la condition *suffisante* donnée par M. Kronecker pour

que l'on ait

$$\lim_{w=\infty}\int_0^{x'} f(x)\sin wx\pi\, d\log x = \frac{1}{2}\pi f(0)$$

contient *moins de restrictions* pour la fonction $f(x)$ que celles que l'on a données jusqu'ici, et elle comprend la plupart de ces dernières, tout en n'étant guère plus compliquée.

Il est d'ailleurs manifeste que toutes ces conditions peuvent être transformées en conditions pour le développement d'une fonction en série de Fourier.

Kronecker. — Sur la théorie des fonctions elliptiques (suite). (761-784).

Soit $L(a_0, c_0)$ une fonction définie par la limite

$$\lim_{\rho=0}\left\{-\frac{1}{\rho}+\sum_{m,n}[2\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)]^{-1-\rho}\right\},$$

où

$$b_0^2-4a_0c_0=-1$$

et où la somme est étendue à tous les couples d'entiers m, n, excepté le couple $0, 0$.

M. Kronecker commence par montrer que cette limite a une valeur finie, quelles que soient les quantités positives réelles a_0, c_0.

Il envisage ensuite le cas important où l'on a

$$a_0 : b_0 : c_0 = a : b : c,$$

a, b, c étant des nombres *entiers*, a et c *positifs*. Posons alors

$$a = a_0\sqrt{\Delta},\qquad b = b_0\sqrt{\Delta},\qquad c = c_0\sqrt{\Delta},$$

d'où

$$\Delta = 4ac - b^2 > 1;$$

prenons $\sqrt{\Delta}$ positif et posons ensuite

$$w_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\qquad w_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}.$$

Nous obtiendrons d'abord, en faisant usage des résultats obtenus dans la Communication précédente de M. Kronecker sur les fonctions elliptiques (*Sitzungsberichte,* 1883), des formules de *transformation* pour les fonctions Λ et $\log\Lambda$ qui y sont définies. Puis, combinant ces formules de transformation avec celle-ci

$$\lim_{\rho=0}\sum_{m,n}[2\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)]^{-1-\rho}=1,$$

qui résulte de ce que la limite qui définit $L(a_0, c_0)$ est finie, et introduisant un second système de quantités

$$a',\ b',\ c'$$

analogues à a, b, c et telles que l'on ait

$$4a'c'-b'^2=\Delta=4ac-b^2,$$

et, en même temps, posant

$$w'_1 = \frac{-b' + i\sqrt{\Delta}}{2c'}, \qquad w'_2 = \frac{b' + i\sqrt{\Delta}}{2c'},$$

nous obtenons la relation remarquable

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\rho=0} \sum\limits_{m,n} \left[\dfrac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}} - \dfrac{1}{(a'm^2 + b'mn + c'n^2)^{1+\rho}} \right] \\ = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \dfrac{c[\mathfrak{S}'(0, w'_1)\,\mathfrak{S}'(0, w'_2)]^{\frac{2}{3}}}{c'[\mathfrak{S}'(0, w_1)\,\mathfrak{S}'(0, w_2)]^{\frac{2}{3}}}, \end{cases}$$

où, je le rappelle,

$$\mathfrak{S}'(0, w) = 2\pi e^{\frac{w\pi i}{4}} \prod_{(n)} (1 - e^{2nw\pi i})^3.$$

De cette équation nous déduisons immédiatement que le second membre est un *invariant* des classes de formes quadratiques représentées par (a, b, c), (a', b', c'); le premier membre est, en effet, manifestement un tel invariant.

Mais nous déduisons aussi de cette même équation bien d'autres conséquences remarquables. Et d'abord, nous en déduisons, dans le cas où

$$a_0^2, \quad a_0 c_0, \quad c_0^2$$

sont des nombres *rationnels,* une expression curieuse qui représente la fonction $\mathrm{L}(a_0, c_0)$ définie en commençant.

A cet effet, considérons, pour Δ invariable, l'expression

$$\log c[\mathfrak{S}'(0, w_1)\,\mathfrak{S}'(0, w_2)]^{-\frac{2}{3}},$$

comme une fonction de w_1, w_2 et représentons alors cette expression par

$$l(w_1, w_2).$$

On démontre, à l'aide de l'équation (I), que la différence

$$l\left(\frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right) - \mathrm{L}(a_0, c_0)$$

a une même valeur pour *toutes* les formes quadratiques (a, b, c) à discriminant $-\Delta$; cette différence peut donc être désignée par

$$\mathrm{M}(\Delta_0),$$

si $-\Delta_0$ est le *discriminant fondamental* qui correspond au discriminant $-\Delta$. Mais on peut calculer directement cette fonction $\mathrm{M}(\Delta_0)$ en remplaçant dans l'équation (I) la forme (a', b', c') successivement par les formes

$$(a'', b'', c''), \quad \ldots, \quad (a^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)}),$$

qui représentent chacune une des K classes du discriminant fondamental $-\Delta_0$, et en ajoutant les équations ainsi obtenues; après diverses transformations

importantes où il est fait usage de la définition de $L(a_0, c_0)$ et d'une équation que l'on obtient en discutant le nombre des solutions (mod $4A$) de la congruence

$$B^2 \equiv -\Delta_0 \pmod{4A},$$

il vient

$$M(\Delta_0) = \frac{1}{K}\sum_{l=1}^{K} l\left(\frac{-b^{(l)}+i\sqrt{\Delta_0}}{2c^{(l)}}, \frac{b^{(l)}+i\sqrt{\Delta_0}}{2c^{(l)}}\right)$$

$$-C + \log\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}} + \frac{\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)\frac{\log h}{h}}{\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)\frac{1}{h}},$$

où C est une constante d'Euler et où $\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)$ est le symbole de Legendre.

On a ainsi mis, dans le cas considéré, la fonction $L(a_0, c_0)$ sous la forme

$$L(a_0, c_0) = l\left(\frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right) - M(\Delta_0),$$

où le second membre est donné par ce qui précède.

M. Kronecker établit maintenant une suite de formules remarquables, parmi lesquelles je cite d'abord l'équation *fondamentale*

$$(\text{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\tau}{|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}\sum_{r_1,r_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\sin 2\pi\left(\frac{k_2 r_2}{D_2} - \frac{k_1 r_1}{D_1}\right)F(r_1, r_2)\\ &= \sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right]\sum_{m,n}F(am^2+bmn+cn^2).\end{aligned}\right.$$

Dans cette équation D_1 et D_2 sont deux *discriminants fondamentaux* quelconques, c'est-à-dire deux nombres entiers qui sont chacun ou bien impair et alors congru à 1 (mod 4), ou bien le quadruple d'un nombre impair et alors congru à -4 (mod 16), ou bien huit fois un nombre impair; ce nombre impair n'ayant dans tous les cas que des *facteurs premiers inégaux*.

De plus, D_1 est négatif et D_2 est positif; $D = D_1 D_2$.

Pour $D_1 = -3$, on doit prendre $\tau = 6$; pour $D_1 = -4$, on doit prendre $\tau = 4$; pour $D_1 < -4$, on doit prendre $\tau = 2$.

La première somme est à effectuer par rapport à $k_1 = 1, 3, 5, \ldots, -2D_1 - 1$ et $k_2 = 1, 3, 5, \ldots, 2D_2 - 1$.

La deuxième somme est à effectuer par rapport à tous les entiers positifs r_1 et tous les entiers positifs r_2.

La dernière somme est à effectuer pour tous les couples d'entiers positifs et négatifs (m, n), excepté le couple $(0, 0)$.

Enfin, pour (a, b, c), il faut prendre successivement des formes représentant toutes les classes différentes à discriminant D pour lesquelles a est premier relatif à D.

Si l'on pose

$$F(h) = [1-(-1)^h]\, q^{\frac{h}{2}}.$$

les deux membres de l'équation précédente sont convergents lorsque q est une quantité réelle ou imaginaire dont la valeur absolue est plus petite que l'unité. On déduit ainsi de l'équation fondamentale II, comme cas particulier, cette autre équation qui est tout à fait remarquable

$$\text{III.} \qquad \frac{\tau\,\mathfrak{S}_1'(0)}{2\pi\,|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\frac{\mathfrak{S}_1\left(\dfrac{k_2}{D_2}-\dfrac{k_2}{D_1}\right)}{\mathfrak{S}_0\left(\dfrac{k_1}{D_1}\right)\mathfrak{S}_0\left(\dfrac{k_2}{D_2}\right)} = \sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n} q^{\frac{1}{2}(am^2+bmn+cn^2)},$$

où $k_1 = 1, 3, 5, \ldots, -D_1 - 1$; $k_2 = 1, 3, 5, \ldots, D_2 - 1$; m et n sont tous les couples d'entiers positifs et négatifs pour lesquels $am^2 + bmn + cn^2$ est impaire, et $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$ sont les deux fonctions

$$\mathfrak{S}_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-q)^{n^2} \cos 2nz\pi,$$

$$\mathfrak{S}_1(z) = q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2+n} \sin(2n+1)z\pi.$$

L'équation III est remarquable parce que la somme double du premier membre est une série de Gauss généralisée. Posons en effet $D_2 = 1$ et cette somme double se réduit à une série de Gauss dans laquelle la fonction *sinus* est remplacée par la fonction *sinus amplitude.* Dans ce cas particulier et lorsque $-\frac{1}{4}D_1$ est un nombre premier de la forme $4n+3$, la formule III est identique à une formule que Lejeune-Dirichlet avait communiquée à M. Kronecker en 1858.

Si nous divisons les deux membres de l'équation III par q et si nous intégrons ensuite par rapport à q *depuis* $q = 0$, nous obtenons dans le second membre une série dont la limite pour $q = 1$ s'exprime par des fonctions circulaires et s'exprime aussi, chose étrange, par des fonctions elliptiques à modules singuliers. De plus, multipliée par $\frac{1}{\pi}\sqrt{-D}$, cette limite est égale au logarithme d'une *unité* de la forme

$$t + u\sqrt{D_2},$$

de sorte que finalement *l'intégrale prise entre les limites* 0 *et* 1 *de la série de Gauss généralisée, s'exprime par le logarithme d'une unité de la forme* $t + u\sqrt{D_2}$.

Je cite aussi cette formule bien intéressante

$$\prod_{k=1}^{D_2-1}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{D_2}}\right)^{3\left(\frac{D_2}{k}\right)K\left(\frac{-\Delta}{D_2}\right)}$$

$$= \prod_{a,b,c}\left[\frac{1}{c^3}\,\mathfrak{S}'\left(0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)^2 \mathfrak{S}'\left(0, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)^2\right]^{\left(\frac{D_2}{a}\right)}$$

(*comparez* KRONECKER, *Monatsberichte*, janvier 1863), qui donne une relation entre des nombres provenant de la théorie des fonctions circulaires et des nombres provenant de la théorie des fonctions elliptiques.

Nous retrouverons la suite de ces profondes recherches de M. Kronecker dans les *Sitzungsberichte* de 1886.

Kronecker. — Sur le théorème de Cauchy. (785-787).

Cette démonstration semble à M. Kronecker préférable au point de vue de l'enseignement à celle qu'il a donnée dans les *Monatsberichte* de juillet 1880.

« *Théorème.* — Supposons que la fonction $f(x, y)$ des deux variables réelles x et y ait des dérivées premières et secondes univoques et finies dans tout un domaine limité par une courbe donnée. L'intégrale

$$\int df(x, y),$$

prise le long de cette courbe, est alors nulle et la fonction $f(x, y)$ est, par suite, univoque dans le domaine considéré. »

Démonstration. — Comme dans le domaine considéré les secondes dérivées de $f(x, y)$ sont supposées finies, il est certain que si, partant de l'intérieur du domaine, nous nous approchons du contour, les valeurs des dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'approchent uniformément des valeurs qu'elles ont sur le contour lui-même. On peut donc, pour la démonstration, substituer au contour curviligne un polygone inscrit dans ce contour et, comme tout polygone peut être décomposé en triangles rectangles ayant les côtés de l'angle droit parallèles aux axes coordonnés, il suffit de démontrer le théorème pour un contour formé par un tel triangle rectangle quelconque.

A cet effet, il suffit d'effectuer l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy,$$

d'une part, en intégrant d'abord par rapport à x, d'autre part, en intégrant d'abord par rapport à y, et d'identifier ensuite les résultats ainsi obtenus.

Si (ξ, η), (ξ', η), (ξ', η') sont les trois sommets du triangle rectangle considéré, l'hypoténuse peut être représentée par

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi' + t(\xi - \xi') \\ y &= \eta' + t(\eta - \eta') \end{aligned}\right\} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Intégrons d'abord par rapport à y entre les limites η et $\eta' + t(\eta - \eta')$ où $t = \frac{x - \xi'}{\xi - \xi'}$; puis par rapport à x entre les limites ξ et ξ'. Nous aurons ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy \\ &\quad = -\int_{\xi}^{\xi'} \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{y=\eta} dx + \int_{\xi}^{\xi'} \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{y=\eta'+t(\eta-\eta')} dx. \end{aligned}\right.$$

Intégrons au contraire d'abord par rapport à x entre les limites $\xi' + t(\xi - \xi')$

et ξ' où $t = \frac{y-\eta'}{\eta-\eta'}$; puis par rapport à y entre les limites η et η'. Nous aurons ainsi

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \displaystyle\iint \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy \\ \displaystyle\quad = \int_{\eta}^{\eta'} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{x=\xi'} dy - \int_{\eta}^{\eta'} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{x=\xi'+t(\xi-\xi')} dy. \end{cases}$$

On a donc, en égalant les seconds membres des équations (I) et (II),

$$\int_{\xi}^{\xi'} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{y=\eta} dx + \int_{\eta}^{\eta'} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{x=\xi'} dy$$
$$+ \int_{\xi'}^{\xi} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{y=\eta'+t(\eta-\eta')} dx + \int_{\eta'}^{\eta} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{x=\xi'+t(\xi-\xi')} dy = 0,$$

équation que l'on peut écrire

$$\int_{\xi}^{\xi'} [df(x,y)]_{y=\eta} + \int_{\eta}^{\eta'} [df(x,y)]_{x=\xi'} + \int_{t=0}^{t=1} [df(x,y)]_{\substack{x=\xi'+t(\xi-\xi') \\ y=\eta'+t(\eta-\eta')}} = 0.$$

Mais le premier membre est visiblement égal à l'intégrale

$$\int df(x,y)$$

étendue au contour représenté par les trois côtés du triangle considéré, et le théorème est démontré.

Corollaire. — L'intégrale

$$\int d\mathrm{F}(x+yi),$$

prise le long d'un contour quelconque, est nulle lorsque la première et la seconde dérivée de $\mathrm{F}(x+yi)$ sont partout finies et univoques dans l'intérieur du contour. En effet, la partie réelle et la partie purement imaginaire de cette intégrale sont alors nulles séparément.

Weierstrass. — Sur la représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle. (Second Mémoire). (789-805).

I. Le second des trois théorèmes du premier Mémoire peut être énoncé de la manière suivante :

Soient a et δ deux quantités positives dont la première peut être choisie aussi grande et la seconde aussi petite que l'on veut. Une fois ces quantités fixées, il est toujours possible de trouver une quantité k et un entier n, tels que dans l'intervalle réel

$$(-a, \ldots, +a),$$

dans lequel on considère la variable x, la valeur absolue de la différence

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(k)\mathrm{P}^{(\nu)}(x)$$

ne soit pas plus grande que δ. Ici les $P^{(\nu)}(x)$ désignent les fonctions *sphériques* et l'on a

$$\varphi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du,$$

où

$$f_\nu(u) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x'+u)\,P^{(\nu)}(x')\,dx'.$$

La fonction *rationnelle entière* approchée de la fonction arbitraire considérée est ici mise sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(k)\,P^{(\nu)}(x);$$

elle est ordonnée suivant les fonctions sphériques $P^{(\nu)}(x)$, ce qui a certains avantages sur la forme donnée pour cette fonction approchée dans le premier Mémoire, entre autres celui de lever la difficulté dont il a été question à propos de la certitude que l'on désire avoir de pouvoir former, pour tout δ même quand δ diminue indéfiniment, une fonction rationnelle entière approchée dont on puisse faire usage dans la pratique. En effet, les coefficients $\varphi_\nu(k)$ des fonctions sphériques se présentent sous une forme qui permet de reconnaître qu'ils sont des fonctions continues du paramètre k, et qu'à chacun d'eux correspond une limite qu'il ne dépasse pas en valeur absolue, *quel que soit* k, tandis que

$$\lim_{\nu=a} \varphi_\nu(k) = 0$$

pour chaque valeur déterminée de k.

M. Weierstrass observe ensuite que, tant qu'il ne s'agit que de ce second théorème, on peut laisser de côté la condition de l'existence d'une limite supérieure finie pour la fonction $f(x)$ et que l'on peut donc appliquer ce théorème aux fonctions univoques $f(x)$ dont on sait seulement qu'elles ont une valeur finie pour toute valeur *réelle finie* de la variable x, et qu'elles varient d'une façon continue lorsque la variable réelle x varie d'une façon continue.

Il reste à étendre, en le modifiant, ce théorème aux fonctions univoques $f(x)$ qui ne sont pas partout continues. Ce sera l'objet d'un troisième Mémoire.

II. Considérons maintenant le cas particulier où la fonction arbitraire a une période $2c$, de sorte que

$$f(x+2c) = f(x).$$

On peut alors mettre la fonction

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du.$$

qui correspond à $f(x)$, sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients sont des fonctions continues du paramètre k, savoir

$$F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\left(A_n \cos\frac{n\pi}{c}x + A_n \sin\frac{n\pi}{c}x\right).$$

où

$$\varphi(v) = \frac{1}{\omega}\int_0^\infty \psi(u)\cos(vu)\,du,$$

$$A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\cos\frac{n\pi}{c}x'\,dx'$$

$$A'_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\sin\frac{n\pi}{c}x'\,dx',$$

et l'on a toujours

$$f(x) = \lim_{k=0} F(x, k).$$

Ici une question se pose. Ne peut-on pas toujours passer à la limite en posant $k = 0$ dans *chacun* des termes de l'expression que nous venons d'écrire pour $F(x, k)$ et obtenir ainsi $f(x)$? Non, on ne le peut pas. Car, en posant $k = 0$ dans chacun des termes de $F(x, k)$, cette fonction se réduit à

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{c}x + A'_n\sin\frac{n\pi}{c}x\right);$$

or c'est là le développement connu de la fonction $f(x)$ par la série de Fourier, et M. Paul du Bois-Reymond a donné un exemple d'une fonction $f(x)$ qui, quoique vérifiant les hypothèses faites ici pour $f(x)$, ne peut, pour une infinité de valeurs de la variable x, être représentée par la série connue de Fourier. Il y a donc des cas où il faut d'abord former $F(x, k)$ et puis passer à la limite en faisant diminuer k indéfiniment.

Considérant toujours les mêmes fonctions *périodiques* réelles $f(x)$, M. Weierstrass cherche ce que deviennent le deuxième et le troisième théorème de son premier Mémoire pour ces fonctions $f(x)$. Il obtient ainsi les deux théorèmes suivants :

Quelque petite que soit choisie la quantité δ, on peut trouver, d'une infinité de manières, une série de Fourier formée d'un nombre *fini* de termes

$$A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\varphi\left(\frac{\nu k\pi}{c}\right)\left(A_\nu\cos\frac{\nu\pi}{c}x + A'_\nu\sin\frac{\nu\pi}{c}x\right),$$

telle que la valeur absolue de la différence entre la fonction périodique $f(x)$ et cette série de Fourier ne dépasse δ pour aucune valeur réelle de x.

On peut mettre la fonction périodique considérée $f(x)$ sous la forme d'une série dont chacun des termes est une série de Fourier, à même période $2c$ que $f(x)$, formée d'un nombre fini de termes. Cette série, qui représente $f(x)$, est absolument convergente pour toute valeur de x et elle est uniformément convergente dans tout intervalle fini dans lequel on considère la variable x.

Donnons un exemple. Prenons pour $\psi(x)$ la fonction

$$\psi(x) = e^{-x^2};$$

il vient alors

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

puis

$$\varphi(v) = e^{-\frac{v^2}{4}};$$



donc, en désignant par $\mathfrak{I}_3(x, q)$ la fonction de Jacobi

$$\mathfrak{I}_3(x, q) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

on obtient

$$F(x, k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\mathfrak{I}_3\left(\frac{x - x'}{2c}\pi,\ e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}\right)dx'.$$

Fourier avait obtenu exactement la même intégrale, en cherchant à déterminer une fonction φ de deux variables réelles x et t qui :

1° Vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

où μ est une constante positive;

2° Soit périodique et admette une quantité donnée $2c$ comme période;

3° Soit, pour $t = 0$, dans l'intervalle $-c \leq x \leq c$, égale à une fonction arbitraire donnée $F(x)$, où $F(x)$ est supposée continue et $F(-c) = F(c)$. (*Comparez* Fourier, *Théorie analytique de la chaleur,* Chap. X.)

Il obtient, pour cette fonction φ, une expression qui coïncide avec celle de $F(x, k)$ écrite plus haut, si nous y posons $k = 2\sqrt{\mu t}$ et si nous supposons que la fonction arbitraire $f(x)$ coïncide avec la fonction arbitraire $F(x)$ dans l'intervalle considéré.

Pour montrer que, pour $t = 0$, φ coïncide avec $F(x)$ dans l'intervalle considéré, Fourier pose $t = 0$ *dans chacun des termes* de l'expression obtenue, qui devient ainsi

$$\frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')\cos\left(\nu\frac{x - x'}{c}\pi\right)dx';$$

or, dans l'intervalle considéré, la fonction $F(x)$ est représentée par cette dernière expression. Il est intéressant d'observer que, quelque peu rigoureuse que soit la marche précédente suivie par Fourier, l'expression qu'il obtient pour φ est exacte dans tous les cas. Cela résulte du théorème démontré par M. Weierstrass dans le Mémoire actuel. En effet, comme nous venons de le voir,

$$\varphi = F(x, 2\sqrt{\mu t});$$

on voit donc, sans faire usage du théorème de Fourier, que

$$\lim_{t=0}\varphi = f(x);$$

or $f(x)$ est supposée coïncider avec $F(x)$ dans l'intervalle considéré. De plus, chacun des termes de la série qui représente φ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

il en est de même de φ; en effet, la série qui représente φ est une fonction analytique univoque de x et t, si l'on soumet la variable t à la condition que sa partie réelle soit positive, et cette série est uniformément convergente dans

tout domaine fini des variables x et t. Enfin la valeur de la série ne change pas si nous y remplaçons x par $x+2c$.

Ainsi, voici un problème de Physique mathématique *où l'on cherche à déterminer une fonction de deux variables qui,* d'après la nature de la question traitée, *ne peuvent avoir que des valeurs réelles, de manière que, si l'on donne à l'une des variables une valeur réelle déterminée, cette fonction de deux variables soit identique à une fonction* arbitrairement *donnée de l'autre variable. Et l'on obtient une fonction analytique* et, par suite, une expression conservant un sens pour des valeurs *imaginaires* des variables. Ce fait est extrêmement remarquable.

III. D'après le théorème de Fourier, on peut écrire

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x')\, \chi_1\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx',$$

où

$$\chi_1(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{n} \cos \nu x.$$

Cette équation *n'est pas exacte pour toutes les fonctions dites arbitraires* $f(x)$.

Dans une recherche qui termine ce second Mémoire, M. Weierstrass montre comment, à l'aide des considérations générales qui précèdent, on peut substituer à ce théorème de Fourier un autre théorème d'après lequel on peut écrire l'équation suivante, *qui est exacte pour toutes les fonctions dites arbitraires* $f(x)$,

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x')\, \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx',$$

où

$$\chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{n} (n, \nu) \cos \nu x.$$

Dans cette expression, on a désigné, pour abréger, par (n, ν) pour $\nu = 0$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, la quantité positive

$$(n+1)^{-\frac{m\nu^2}{(n+1)^2}},$$

où m est une quantité positive plus grande que l'unité ou égale à l'unité.

Comme, pour tout entier ν, on a

$$\lim_{n=\infty} (n, \nu) = 1,$$

on peut prendre n assez grand pour que les $(\nu+1)$ premiers termes de la fonction $\chi(x, n)$ soient aussi peu distincts que l'on veut des $(\nu+1)$ premiers termes correspondants de la fonction $\chi_1(x, n)$.

Kronecker. — Sur les conséquences que l'on peut tirer d'une formule générale d'intégration par parties. (841-862).

Il s'agit de la formule générale d'intégration par parties

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx$$
$$= \sum_{h=1}^{n} \int_{x_0}^{x} d\left[f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right],$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions univoques de la variable réelle x et où $f^{(k)}(x)$, $g^{(k)}(x)$ sont les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de ces fonctions.

1. En remplaçant x par z et posant

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz,$$
$$g(z) = \frac{(x+z)^n}{n!},$$

la formule générale d'intégration par parties devient

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{h=1}^{n} \frac{(x-x_0)^h}{h!} F^{(h)}(x_0) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n F^{(n+1)}(z)\,dz,$$

ce qui n'est autre que la série de Taylor.

2. Les $(n-1)$ premières dérivées de $f(x)$ étant supposées continues, si l'on pose

$$g(x) = e^{ux},$$

la formule générale devient

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)\,e^{-ux}\,dx - u^n \int_{x_0}^{x} f(x)\,e^{-ux}\,dx$$
$$= \sum_{h=1}^{n} u^{n-h}\left[f^{(h-1)}(x)\,e^{-ux} - f^{(h-1)}(x_0)\,e^{-ux_0}\right].$$

3. Les $(n-1)$ premières dérivées de $f(x)$ étant toujours supposées continues, si l'on pose

$$g(x) = [(x+x_0)(x+x_1)]^n$$

et si l'on prend x_1 comme limite supérieure d'intégration, il vient

$$\int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)\,[(x-x_0)(x-x_1)]^n\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}\,dx$$

ce qui montre que, si $f(x)$ *désigne une fonction entière de degré* $(n-1)$, *l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}\,dx$$

s'annule. Comparez JACOBI : *Ueber Gauss' neue Methode, die Werte der Integrale näherungsweise zu finden.*

4. Prenons pour les limites d'intégration

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1;$$

pour $g(x)$, la fonction

$$g(x) = \cos 2k(x+y)\pi,$$

où k est un entier quelconque et y une variable; pour $f(x)$, une fonction quelconque continue ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, de $x=0$ à $x=1$ et ayant même valeur aux deux limites, $x=0$ et $x=1$. On voit alors que, si l'on fait sur la $n^{\text{ième}}$ dérivée l'unique hypothèse qu'elle puisse être représentée par une série de Fourier, *on obtient $f^{(n)}(x)$ en différentiant n fois, terme par terme, le développement de $f(x)$ en série de Fourier*. [*Comparez* P. Du Bois-Reymond, *Ueber die Integration der trigonometrischen Reihen*, *Math. Annalen*, t. XXII]. On fait souvent usage de ce résultat.

5. Soit $f(x)$ une fonction finie et continue, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, dans l'intervalle de x_0 à x_r; et soit $g(x)$ une fonction dont la dérivée d'ordre $(n-1)$ est discontinue, mais finie aux points

$$-x = x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{r-1},$$

où $x_0 < x_1 < \ldots < x_{r-1} < x_r$; et dont la dérivée d'ordre n existe et est finie dans les intervalles où la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée est continue.

Appliquons, dans cette hypothèse, la formule générale. Il viendra

$$\begin{aligned}
&-f(x_0)g^{n-1}(-x_0) \\
&\quad+\sum_{k=1}^{r-1} f(x_k)\lim_{\varepsilon=0}\left[g^{(n-1)}(\varepsilon^2-x_k)-g^{n-1}(-\varepsilon^2-x_k)\right]+f(x_r)g^{(n-1)}(-x_r) \\
&\quad=\int_{x_0}^{x_r} f^n(x)g(-x)\,dx-\int_{x_0}^{x_r} f(x)g^{(n)}(-x)\,dx \\
&\quad+\sum_{h=2}^{n} f^{(h-1)}(x_0)g^{(n-h)}(-x_0)-\sum_{h=2}^{n} f^{(h-1)}(x_r)g^{(n-h)}(-x_r).
\end{aligned}$$

Définissons donc r fonctions continues φ admettant des dérivées par la condition

$$g^{(n-1)}(x) = \varphi_k(x) \quad \text{pour } x_{k-1} < x < x_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

et prenons $g^{(h-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} g^{(h)}(x)\,dx$; nous aurons alors la formule générale

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{r}\left[\varphi_k(x_k)-\varphi_{k+1}(x_k)\right]f(x_k) \\
&\quad=\int_{x_0}^{x_r} f(x)\varphi'(x)\,dx+\int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)g(-x)\,dx-\sum_{h=2}^{n} f^{(h-1)}(x_r)g^{(n-h)}(-x_r),
\end{aligned}$$

où $\varphi_0(x_0) = 0$, $\varphi_{r+1}(x_r) = 0$, et où, pour $x_{k-1} < x < x_k$,

$$\varphi'(x) = \varphi'_k(x). \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

6. En particulier, pour $\varphi_k(x) = x - x'_{k-1}$, $x_{k-1} \leqq x'_{k-1} \leqq x_k$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$, on obtient une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx,$$

savoir

$$(x'_0 - x_0) f(x_0) + (x'_1 - x'_0) f(x_1) + \ldots + (x_r - x'_{r-1}) f(x_r),$$

et la différence entre la valeur approchée et la valeur de l'intégrale est

$$-\sum_{h=1}^{n} f^{(h)}(x_r)\, g^{(n-h-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\,dx,$$

où l'on peut trouver les fonctions $g^{(n-2)}(x)$, $g^{(n-3)}(x)$, ..., par des intégrations successives.

7 à 11. M. Kronecker établit maintenant une formule *générale* de sommation qu'il désigne par (S'), page 849, et de laquelle il déduit, comme cas particulier, la formule de Poisson (*Mémoires de l'Institut*, t. VI; 1827)

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(r-1) + \tfrac{1}{2} f(r) \\ &= \int_0^r f(x)\,dx + \sum_{h=1}^{m} [f^{(2h-1)}(0) - f^{(2h-1)}(r)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{(2k\pi)^{2h}} \\ &\quad + (-1)^m \int_0^r f^{(2m)}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2m}}\,dx, \end{aligned}$$

où f et ses $(2m-1)$ premières dérivées sont supposées continues et où r est un nombre entier.

Il est bon d'observer que la formule établie par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 12) et qu'il nomme *formula memorabilis*, quoique obtenue par une méthode différente et se présentant sous une forme différente, est au fond identique à celle de Poisson.

Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que les fonctions *entières* dont les coefficients contiennent les nombres de Bernoulli, introduites par Jacobi, représentent chacune, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^m}\,dx, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

dans un certain intervalle déterminé. Cela résulte immédiatement de l'équation

$$\frac{w e^{2wx\pi i}}{1 - e^{2w\pi i}} = \frac{w}{2\pi i} \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{\nu} \frac{e^{2kx\pi i}}{k - w}.$$

[*Comparez* Kronecker : *Sur les fonctions elliptiques* (*Sitzungsberichte*, 1883]. Et cette dernière équation, qui a lieu pour x réel et > 0, et w réel ou imaginaire quelconque, peut être établie de différentes manières : soit à l'aide

des formules (13) et (14) du Mémoire cité de Poisson, soit à l'aide du développement de

$$\cos 2w x\pi + i \sin 2w x\pi,$$

suivant les sinus et les cosinus des multiples de $2x\pi$, soit encore en représentant la $w^{\text{ième}}$ puissance d'une variable imaginaire ζ à l'aide de l'intégrale de Cauchy.

On a pris généralement l'habitude, depuis Jacobi, de substituer à la forme donnée par Poisson, celle où la série des cosinus est remplacée par les fonctions *entières*. M. Kronecker fait observer que, loin de gagner, la formule ainsi modifiée perd plutôt de son élégance (*Comparez* Malmsten, *Journal de Crelle*, t. 35, et *Acta mathematica*, t. 5) et qu'en outre elle s'éloigne davantage de la formule générale (S′) mentionnée plus haut. Il conviendrait donc de revenir à la forme donnée par Poisson.

Enfin, M. Kronecker fait voir que cette formule générale (S′), qu'il a établie, n'est pas seulement une généralisation banale de la formule de Poisson, mais qu'elle est plus avantageuse à certains égards que cette dernière.

12 et 13. M. Kronecker établit aussi une formule qui comprend comme cas particulier le théorème des *valeurs moyennes* de M. P. du Bois-Reymond (*Crelle*, t. 69). Il semble que le rôle de ce théorème soit mis davantage en évidence par la formule plus générale de M. Kronecker.

En l'appliquant à l'intégrale-reste

$$\int f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx$$

de la formule *générale* mentionnée (S′), on tire de cette dernière le résultat important que voici :

La partie du second membre de (S′) que l'on obtient en effaçant l'intégrale, reste représente la somme du premier membre avec une approximation d'autant plus grande que n croît davantage, pourvu que d'une part la valeur de la fonction g reste comprise entre deux limites déterminées et que d'autre part les fonctions f, dont chacune est la dérivée de la précédente, tendent de plus en plus vers une constante, au moins dans l'intervalle auquel se rapporte la sommation à effectuer.

Si, en outre, les fonctions $g(-x)$, dont chacune est l'intégrale de la précédente, diminuent toujours de valeur, l'exactitude de l'approximation précédente augmente également.

La diminution de la valeur de l'intégrale-reste lorsque n augmente a aussi lieu lorsque les dérivées $f^{(n)}(x)$ diminuent elles-mêmes de valeur, pourvu que la variabilité des fonctions $g(-x)$ n'augmente pas en même temps.

M. Kronecker généralise ensuite un des résultats intéressants obtenus par M. Malmsten dans son Mémoire cité à l'instant, sur un certain nombre de maxima et de minima concernant les séries

$$\sum_{k=1}^{k} \frac{a_k}{(2k\pi)^{2n}} \cos 2kx\pi. \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Enfin il établit une dernière formule

$$\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\ldots+f(r-1)+\frac{1}{2}f(r)$$

$$=\int_0^r f(x)\frac{\sin(2s-1)\pi x}{\sin\pi x}\,dx+\sum_{h=1}^{m}\left[f^{(2h-1)}(0)-f^{(2h-1)}(r)\right]\sum_{k=s}^{\infty}\frac{(-1)^h 2}{(2k\pi)^{2h}}$$

$$+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\sum_{k=s}^{\infty}\frac{2\cos 2k x\pi}{(2k\pi)^{2m}}\,dx,$$

où s est un entier positif quelconque. Elle est bien remarquable, car elle relie la formule de sommation de Poisson à la formule, si intéressante par ses applications, donnée par Lejeune-Dirichlet (*Crelle*, t. 17) dans son Mémoire sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies. On obtient en effet la première en posant $s=1$, et la seconde en passant à la limite $s=\infty$.

Kirchhoff. — Sur l'état d'équilibre électrique de deux sphères conductrices. (1007-1013).

Kronecker. — Sur la fonction arithmétique R (*suite*). (1045-1049).

Il s'agit toujours des deux démonstrations (la troisième et la cinquième) de Gauss, basées sur le même lemme qui porte son nom, du théorème de réciprocité des restes quadratiques.

Nous avons vu que la démonstration revient à montrer que, m et n étant deux entiers quelconques premiers relatifs, le nombre de valeurs négatives de

$$\operatorname{sgn} R\left(\frac{hn}{m}\right),\quad \operatorname{sgn} R\left(\frac{km}{n}\right)$$

n'est impair que pour $m\equiv n\equiv -1 \pmod 4$; dans tout autre cas il est pair. Ici, comme dans les relations qui suivent,

$$h=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2};\qquad k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}.$$

Cette condition est identique, et à l'égalité

(1) $$\operatorname{sgn}\prod_{(h)} R\left(\frac{hn}{m}\right)\prod_{(k)} R\left(\frac{km}{n}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}},$$

qui contient au fond la *troisième* démonstration de Gauss, et à la congruence

$$\frac{1}{2}\sum_{(h)}\left[1-\operatorname{sgn} R\left(\frac{hn}{m}\right)\right]+\frac{1}{2}\sum_{(k)}\left[1-\operatorname{sgn} R\left(\frac{km}{n}\right)\right]\equiv\frac{1}{4}(m-1)(n-1)\pmod 2,$$

qui contient au fond la *cinquième* démonstration de Gauss.

M. Kronecker observe maintenant que l'on peut mettre cette dernière relation

sous la forme

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn}\prod_{(h)} R\left(\frac{hn}{m}\right)\prod_{(k)} R\left(\frac{km}{n}\right) \equiv \frac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod{2}.$$

Si, après l'avoir mise sous cette forme, on la compare à la relation (1), on voit bien qu'elle n'est que la transformée logarithmique de (1).

Voilà la source du fait observé dans le premier article sur la fonction R, que la *cinquième* démonstration de Gauss est plus simple en réalité que la *troisième*. Au lieu d'un produit, nous avons à considérer le logarithme de ce produit, c'est-à-dire une somme, d'où simplification.

M. Genocchi a donné en 1852 une démonstration du théorème de réciprocité dont il a été reparlé dans ces dernières années (*Comptes rendus*, t. XC, p. 300, et t. CI, p. 425). En analysant la démonstration de M. Genocchi, M. Kronecker observe qu'elle aussi peut être caractérisée comme une transformation logarithmique de la troisième démonstration de Gauss. La base de la démonstration de M. Genocchi peut d'ailleurs aussi être mise sous la forme d'une congruence qui résulte immédiatement des développements donnés par Eisenstein (*Crelle*, t. 29, p. 178). Mais il ne faut pas oublier que M. Genochi a trouvé la base de sa démonstration par une voie purement arithmétique, sans pouvoir la tirer des recherches d'Eisenstein, qu'il ne connaissait pas en rédigeant son Mémoire.

Weierstrass. — A propos du Mémoire de M. Lindemann sur le nombre π. (1067-1085).

M. Lindemann a démontré (*Sitzungsberichte*, 1882, et *Mathematische Annalen*, t. 20) l'impossibilité de la construction, à l'aide de courbes et de surfaces algébriques, d'un carré de même aire qu'un cercle donné, en démontrant que π n'était pas un nombre algébrique.

Ce théorème est intéressant, car il nous donne un second exemple d'une quantité numérique que l'on ne peut se dispenser d'introduire en Mathématiques et qui n'est pas algébrique. On sait que M. Hermite en avait donné un premier exemple en démontrant le même théorème pour l'exponentielle e. Les quantités numériques, non algébriques, construites *a priori*, sont manifestement d'un intérêt moindre.

M. Weierstrass présente la démonstration de M. Lindemann sous une forme aussi élémentaire que possible. Il ne suppose pas, comme M. Lindemann, que l'on connaisse le célèbre Mémoire de M. Hermite sur la fonction exponentielle; il n'emprunte à ce Mémoire, en les démontrant d'ailleurs à nouveau, que ceux des résultats dont il a besoin pour l'objet qu'il a en vue.

Voici le théorème emprunté aux recherches de M. Hermite et qui sert de lemme à la démonstration de M. Weierstrass :

« Soit $f(z)$ une fonction entière de la variable z de degré $(n+1)$, à coefficients *entiers* donnés et tels que les $(n+1)$ racines de l'équation $f(z)=0$,

$$z_0,\quad z_1,\quad \ldots,\quad z_n,$$

soient toutes différentes. Soit δ une quantité positive choisie arbitrairement, d'ailleurs aussi petite que l'on veut. On peut alors déterminer d'une infinité de manières un système de $(n+1)$ fonctions entières de z, à coefficients *entiers*,

$$g_0(z),\quad g_1(z),\quad \ldots,\quad g_n(z),$$

dont les degrés ne dépassent pas n, et telles que, d'une part, la valeur absolue de chacune des différences,

$$g_\nu(z_0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_0} \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n),$$

soit plus petite que δ, et que, d'autre part, la valeur du déterminant

$$| g_\nu(z_\lambda) | \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ne soit pas nulle.

Voici maintenant la démonstration de M. Weierstrass de la *transcendance* de π :

Comme la fonction e^x n'est égale à (-1) que pour $x = (2k+1)\pi i$, où k est un entier, il suffit de démontrer que la fonction (e^x+1) ne peut s'annuler lorsqu'on y remplace x par un nombre *algébrique* quelconque x_1 défini comme racine d'une équation

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = 0,$$

dont les coefficients $c_1, \ldots, c_r$ sont des nombres *rationnels*. Si $x_2, x_3, \ldots, x_r$ sont les racines conjuguées de x_1, il faut donc et il suffit que l'on démontre l'inégalité

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda}+1) \gtrless 0.$$

A cet effet, désignons par $\xi_1, \ldots, \xi_r$, r variables indépendantes. On a manifestement

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{\xi_\lambda}+1) = \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)} e^{\varepsilon_1\xi_1+\ldots+\varepsilon_r\xi_r} \qquad (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r = 0, 1).$$

En posant $2^r = p$ et en désignant par $\zeta_0, \ldots, \zeta_{p-1}$ les p fonctions

$$\varepsilon_1\xi_1 + \ldots + \varepsilon_r\xi_r \qquad (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r = 0, 1),$$

prises dans un ordre quelconque, on a donc

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{\xi_\lambda}+1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{\zeta_\mu}.$$

Si pour $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_r = x_r$, on a pour $\zeta_0, \ldots, \zeta_{p-1}$ les valeurs

$$\zeta_0 = z_0, \qquad \zeta_1 = z_1, \qquad \ldots, \qquad \zeta_{p-1} = z_{p-1},$$

il vient donc

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda}+1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu}.$$

Supposons qu'il y ait $(n+1)$ quantités *différentes* $z_0, \ldots, z_{p-1}$; nous pouvons toujours prendre les p fonctions $\zeta_0, \ldots, \zeta_{p-1}$ dans un ordre tel que $z_0, z_1, \ldots, z_n$ soient différents et que $z_0 = 0$.

Ceci posé, on forme sans difficulté une fonction $f(z)$ d'une indéterminée z

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots$$

de degré $n+1$, à coefficients *entiers*, qui s'annule pour $z = z_0, z_1, \ldots, z_n$.

A l'aide de cette fonction $f(z)$, on forme ensuite, pour tout δ donné, en appliquant le lemme de M. Hermite, $(n+1)$ fonctions $g(z)$ entières, à coefficients entiers, de degrés $\leqq n$, telles que, si l'on pose

$$g_\nu(0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda) = \varepsilon_{\lambda,\nu}\delta \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n),$$

on ait

$$|\varepsilon_{\lambda,\nu}| < 1.$$

Choisissons δ assez petit pour que l'on ait

$$|(p-1)a_0^n \delta| < 1;$$

nous tirons alors des inégalités précédentes ces autres inégalités

$$a_0^n g_\nu(0) \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = \sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) + \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

où $|\varepsilon_\nu| < 1$. Mais, pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$,

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)$$

est un nombre *entier*, comme on le voit en appliquant le théorème des fonctions symétriques à l'expression

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(\zeta_\mu).$$

Ces $(n+1)$ entiers *ne sont pas tous nuls.* En effet, comme

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) = \sum_{\lambda=0}^{n} N_\lambda g_\nu(z_\lambda),$$

où $N_0, N_1, \ldots, N_n$ sont des entiers *positifs*, si les $(n+1)$ entiers envisagés étaient tous nuls, le déterminant

$$|g_\nu(z_\lambda)| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n),$$

serait nul, contrairement au lemme de M. Hermite.

On peut donc fixer au moins un entier ν, tel que

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)$$

soit un nombre *entier* différent de zéro, et par suite tel que l'expression

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) + \varepsilon_\nu = a_0^n g_\nu(0) \prod_{\lambda=1}^{r} (e^{\alpha_\lambda} + 1)$$

ne soit pas nulle. Mais alors chacun des facteurs

$$e^{x_\lambda}+1$$

du produit que nous venons d'écrire est nécessairement différent de zéro, ce qu'il fallait démontrer.

M. Weierstrass fait suivre cette démonstration de considérations générales concernant la fonction exponentielle.

Si $x_1, \ldots, x_r$ ont la même signification que tout à l'heure, et si $N_1, \ldots, N_r$ sont des nombres entiers quelconques donnés dont l'un au moins est différent de zéro, la quantité

$$\sum_{\rho=1}^{r} N_\rho e^{x_\rho}$$

a toujours une valeur différente de zéro.

Le théorème de M. Hermite, que l'exponentielle n'est pas un nombre algébrique, se déduit immédiatement de ce théorème en prenant pour $x_1, \ldots, x_r$, r entiers quelconques inégaux.

M. Weierstrass démontre aussi le théorème général que M. Lindemann avait simplement énoncé et qui termine les recherches commencées par M. Hermite sur la fonction exponentielle :

« Si $x_1, \ldots, x_r$ sont r nombres *algébriques* différents et si $X_1, \ldots, X_r$ sont r nombres *algébriques* quelconques, l'équation

$$\sum_{\rho=1}^{r} X_\rho e^{x_\rho}=0$$

est impossible, à moins que les nombres algébriques $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ne soient *tous* nuls. »

On en déduit, comme cas particuliers, les beaux théorèmes suivants, sur l'importance desquels M. Lindemann avait déjà particulièrement insisté :

1. Si x est un nombre *algébrique* quelconque différent de zéro, e^x est nécessairement un nombre *transcendant*.

2. Le logarithme naturel d'un nombre *algébrique* quelconque X qui diffère de l'unité est toujours un nombre *transcendant*.

Enfin M. Weierstrass déduit du théorème général cité ce résultat remarquable :

On ne peut obtenir, à l'aide de constructions faites à l'aide de courbes et surfaces algébriques, ni la rectification d'un arc de cercle dont la corde rapportée au rayon du cercle a une longueur exprimable par un nombre *algébrique*, ni la quadrature du secteur circulaire correspondant à cet arc.

J. M.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE [1].

Tome II; 1887.

Bioche. — Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces réglées. (A. 7).

Dans les surfaces réglées (S) à plan directeur et à paramètre de distribution constant, les lignes asymptotiques sont les lieux des milieux des segments compris entre la ligne de striction et les trajectoires orthogonales des génératrices. L'auteur donne l'équation générale de ces surfaces (S) et de leurs lignes asymptotiques. Il considère aussi les surfaces dont la ligne de striction est ligne asymptotique.

Painlevé. — Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. (B. 136).

PREMIÈRE PARTIE : *Étude d'une fonction dans le voisinage d'une coupure.* — M. Painlevé commence par énumérer les diverses singularités que peut présenter une fonction uniforme dans une portion du plan. L'ensemble des points singuliers peut être *ponctuel, linéaire* ou *superficiel*. Des remarques analogues s'appliquent aux fonctions uniformes à trois variables qui vérifient l'équation $\Delta V = 0$. Il donne ensuite une série de propositions générales, parmi lesquelles nous signalerons la suivante : soit une série $\Sigma f_n(z) = F(z)$ et une aire S à contour quelconque s; si les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes dans S et continues sur s, et si la série $F(z)$ converge sur s uniformément : 1° la série $F(z)$ converge uniformément dans toute aire S' intérieure à S et sans point commun avec s; 2° les séries formées par les dérivées successives des termes de $F(z)$ convergent uniformément dans S' et représentent les dérivées successives de $F(z)$, dont l'existence est ainsi démontrée.

S'occupant ensuite de la possibilité de *continuer* une fonction, il établit la proposition que voici : soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire S de contour s et prenant sur l'arc AB de s les valeurs $f_0(s)$. S'il existe une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un espace S' extérieur à S et attenant à AB, qui prenne sur AB les valeurs $f_0(s)$, la fonction $F(z)$ égale à $f(z)$ dans S, à $\varphi(z)$ dans S', est holomorphe dans l'aire totale Σ formée par les deux aires S et S'. Il en résulte que, pour qu'une fonction $f(z)$ définie du côté C de AB et holomorphe dans le voisinage de AB soit continuable au delà de cette ligne, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de z, $\varphi(z)$, définie du côté opposé C' de AB, uniforme dans le voisinage de AB et prenant la même valeur que $f(z)$ en chaque point de cette ligne (à l'exception peut-être des points d'un ensemble ponctuel). L'auteur donne des applications de ces théorèmes aux fonctions implicites, et aux fonctions définies par des équations différentielles, et parvient à d'intéressants théorèmes sur la possibilité de continuer de telles fonctions ainsi que sur la nature de leurs points singuliers.

---

[1] Voir *Bulletin*, XII, 48.

M. Painlevé montre, sur des cas particuliers, la portée de ces théorèmes; il établit, par exemple, que toute équation différentielle du premier ordre entre z et x, dont le coefficient différentiel est uniforme dans le plan des z et des x, dont l'intégrale générale est également uniforme, est une équation de Riccati. Enfin, on peut reconnaître, par des opérations purement algébriques, si l'intégrale de l'équation de Riccati est une fraction rationnelle, et, dans ce cas, obtenir l'intégrale par des opérations linéaires. Voici encore une des propositions qu'obtient M. Painlevé.

Soit

$$G(u', u, z, U_1, \ldots, U_{n-1}, V_1, \ldots, V_{p-1}, W_1, \ldots, W_{q-1} = 0) \tag{1}$$

une équation différentielle où G est un polynôme en u', et en U_i, V_j, W_h; U_i, V_j, W_h sont respectivement des fonctions algébriques de u, de u' et de z définies par les relations

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_\alpha(u, U_1, \ldots, U_{n-1}) = 0,\\ \psi_\beta(u', V_1, \ldots, V_{p-1}) = 0,\\ \chi_\gamma(z, W_1, \ldots, W_{q-1}) = 0,\end{array}\right. \tag{2}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, p;\ \gamma = 1, 2, \ldots, q).$$

Quand une intégrale $u = \varphi(z)$ de cette équation est uniforme, les W_h sont des fonctions uniformes de z, et les relations qui lient U_i à U_j ou à u, V_i à V_j ou à u', sont du genre 0 ou 1, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, le système d'équations (2) et l'équation $G = 0$ n'aient, quel que soit z, plusieurs systèmes de solutions communes. Si l'intégrale générale de $G = 0$ est uniforme, les conditions précédentes sont vérifiées, à moins que, pour tout système z_0, u_0, et pour une valeur u'_0 vérifiant l'équation

$$f(u'\ u, z) = 0,$$

obtenue par l'élimination des U, V, W entre (1) et (2), ledit système n'admette plusieurs systèmes de solutions communes, ce qu'on reconnait par des opérations purement algébriques.

Les conditions pour qu'une fonction soit continuable au delà d'une courbe AB prennent une forme plus simple, lorsque cette courbe est analytique. L'auteur retrouve dans ce cas le théorème de M. Schwarz : « Pour que la fonction $f(z)$ définie du côté C de AB soit continuable au delà de AB, il faut et il suffit que sa partie réelle P (ou sa partie imaginaire Q) prenne sur AB une suite de valeurs $P_0(t)$ fonction analytique de t. »

Après avoir discuté, à ce point de vue, le genre de quelques coupures, par exemple de celles que présentent les intégrales de la forme

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(z, t)}{G(z, t)}\, dt$$

considérées par M. Hermite, M. Painlevé donne quelques exemples des principales singularités qu'une fonction peut présenter dans le domaine d'une coupure, et termine cette première Partie de son travail en indiquant l'extension des théorèmes sur la continuation des fonctions d'une variable complexe z aux fonctions de deux (ou de trois) variables qui vérifient l'équation $\Delta V = 0$.

SECONDE PARTIE : *Développement en séries des fonctions à singularités quelconques.* — Pour parvenir à de tels développements, on a tout d'abord à résoudre la question suivante : Développer en série une fonction holomorphe dans une aire donnée quelconque S limitée par une courbe s. Une première solution repose sur la représentation conforme; mais M. Painlevé en donne d'autres, qui n'exigent la connaissance d'aucune fonction particulière relative à la ligne s.

Supposons, en particulier, que S soit l'aire intérieure à une courbe s, n'ayant en chacun de ses points qu'un contact simple avec sa tangente. Traçons un cercle C tangent à s au point M et contenant S à son intérieur. Si a est le centre de C, z l'affixe de M, x un point intérieur à s, l'expression $\frac{1}{z-x}$ pourra se développer ainsi

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^3} + \ldots = \mathrm{A}(z).$$

Faisons parcourir au point z la courbe s; a variera avec z d'une manière continue, sauf aux points anguleux de s. La série $\mathrm{A}(z)$ converge sur s uniformément et représente $\frac{1}{z-x}$. D'autre part, si $\mathrm{F}(x)$ est holomorphe dans S et sur s, on a

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z-x},$$

par suite

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_s \frac{\mathrm{F}(z)(x-a)^n\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{P}_n(x),$$

$\mathrm{P}_n(x)$ désignant un polynôme en x de degré n. On voit donc qu'une fonction $\mathrm{F}(x)$, holomorphe dans S, peut se développer dans cette aire en série de polynômes. Divers autres modes de développements, dont la légitimité exige parfois une discussion assez délicate, sont déduits par M. Painlevé de ce résultat si simple et si élégant. Ces modes de développement, qui sont au fond la généralisation de ceux que M. Appell avait signalés pour une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour formé d'arcs de cercle, se généralisent pour les fonctions de trois variables qui satisfont à l'équation $\Delta \mathrm{V} = 0$.

L'auteur est maintenant en mesure d'étendre aux fonctions uniformes les plus générales les formes de décomposition en sommes et en produits donnés dans la théorie des fonctions à points singuliers. Lorsque la fonction $\mathrm{F}(z)$ n'admet qu'un nombre fini de singularités, on peut la mettre sous la forme d'une somme de fonctions n'admettant dans le plan qu'une seule singularité. Dans le cas d'une infinité de singularités, des théorèmes dus à M. Mittag-Leffler et à M. Picard permettent de mettre la fonction sous la forme d'une série infinie, ou d'un produit de facteurs. L'auteur démontre à nouveau ces théorèmes et termine en donnant l'expression la plus générale des fonctions simplement et doublement périodiques.

Hermite. — Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques. (C. 12).

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction uniforme aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, dont les pôles, à l'intérieur du parallélogramme des périodes, sont $a, b, c, \ldots$; l'auteur part

de la formule bien connue, dont la Science lui est redevable,

$$F(x) = C + \Sigma A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \Sigma A' D_x \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \Sigma A'' D_x^2 \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots,$$

et la transforme de manière qu'il n'y figure plus que des termes manifestement périodiques. Pour cela, il établit d'abord, par un calcul facile, la formule

$$\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta(a)}{\Theta'(a)};$$

il suffit ensuite de substituer, en tenant compte de la condition $\Sigma A = 0$ et de la relation

$$D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

pour parvenir au résultat cherché

$$\begin{aligned} F(x) = C &+ \Sigma A f(x, a) \\ &+ \Sigma A' D_x f(x, a) - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \Sigma A'' D_x^2 f(x, a) - S'' k^2 D_x \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où S', S'', ... sont des constantes et où

$$f(x, a) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}.$$

A la vérité, on introduit un pôle apparent $x = iK'$, mais cette circonstance ne se présente pas quand tous les pôles sont simples, et dans d'autres cas intéressants.

Considérant, en particulier, les fonctions à périodes $2K$ et $2iK'$ qui jouissent respectivement des propriétés

$$\begin{aligned} F_1(x + iK') &= -F_1(x), \\ F_2(x + K + iK') &= -F_2(x), \\ F_3(x + K) &= -F_3(x), \end{aligned}$$

l'auteur montre qu'elles sont respectivement des fonctions linéaires et homogènes des quantités

$$D_x \log \operatorname{sn}(x-a), \quad D_x \log \operatorname{cn}(x-a), \quad D_x \log \operatorname{dn}(x-a)$$

et de leurs dérivées.

Ces fonctions, ainsi que leur somme, vérifient l'équation

$$F(x) + F(x + iK') + F(x + K + iK') + F(x + K) = 0;$$

inversement, toute fonction doublement périodique qui vérifie cette équation est la somme de fonctions F_1, F_2, F_3. Son intégrale indéfinie s'obtient donc au moyen des fonctions élémentaires; en remplaçant $\operatorname{sn} x$ par ξ, on obtient ainsi des types d'intégrales pseudo-elliptiques. Ces recherches, comme on le voit, se rattachent aux résultats obtenus antérieurement par M. Hermite (*Journal de*

Liouville, 1879), ainsi qu'à ceux que l'on doit à M. Raffy et à M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XII et t. XV).

L'auteur passe ensuite aux fonctions admettant les périodes $4K$ et $4iK'$ pour montrer qu'elles peuvent être regardées comme les sommes de quatre fonctions qui, relativement aux périodes $2K$, $2iK'$, sont, l'une doublement périodique de première espèce, et les autres doublement périodiques de seconde espèce avec les multiplicateurs

$$-1, \quad +1; \quad -1, \quad -1; \quad +1, \quad -1;$$

pour ces dernières, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ jouent respectivement le rôle d'élément simple, d'où l'on conclut finalement que les fonctions considérées sont des fonctions rationnelles de ces trois éléments.

Tisserand. — Sur une équation différentielle du second ordre qui joue un rôle important dans la Mécanique céleste. (D. 15).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z[n^2 + 2\alpha\cos(lv + b)] = 0,$$

où

$$U = \Sigma_i A_i \cos V_i, \qquad V_i = l_i v + b_i$$

et où n, α, l, b, A_i, l_i, b_i sont des constantes données. Cette équation a déjà été l'objet d'un très grand nombre de travaux : c'est de la comparaison des recherches de MM. Lindstedt et Gyldén que s'occupe particulièrement M. Tisserand, et il a spécialement en vue l'application à la théorie de la Lune exposée d'après M. Gyldén, par M. Andoyer, dans le volume précédent du Recueil que nous analysons. M. Tisserand montre qu'en se bornant à un degré de précision, qui permet d'ailleurs de rendre parfaitement compte des principales inégalités du mouvement de la Lune, les deux méthodes conduisent au même résultat.

Baillaud. — Recherches complémentaires sur le développement de la fonction perturbatrice. (E. 21).

Dans un Mémoire inséré au tome II des *Annales de l'observatoire de Toulouse,* l'auteur a donné deux formules, pour le développement de la fonction perturbatrice, applicables, l'une pour de faibles inclinaisons, l'autre pour des inclinaisons quelconques. Dans le présent travail, M. Baillaud montre d'abord comment on peut, pour ces formules et d'autres analogues, calculer le nombre de termes que fournirait le développement. On aperçoit ainsi très nettement dans quelle mesure les formules sont applicables. Cette recherche conduit d'ailleurs à d'intéressants développements analytiques.

Kœnigs. — Contributions à la théorie du cercle dans l'espace. (F. 19).

L'étude du cercle dans l'espace, au point de vue où se place M. Kœnigs, est une matière nouvelle qui n'a guère été touchée, sur un point particulier mais très intéressant, que par M. Stephanos. M. Kœnigs rappelle d'ailleurs les principaux résultats obtenus par ce dernier.

Si l'on désigne par x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) les coordonnées pentasphériques d'un point, toute sphère sera représentée par une équation linéaire, tout cercle sera représenté par deux équations linéaires

$$\Sigma a_i x_i = 0, \qquad \Sigma b_i x_i = 0;$$

les quantités

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

peuvent être regardées comme les *coordonnées* de ce cercle; elles sont au nombre de dix, si l'on tient compte des relations

$$p_{ii} = 0, \qquad p_{ik} = -p_{ki}.$$

Ces dix coordonnées ne peuvent d'ailleurs être indépendantes, puisqu'un cercle ne dépend que de six quantités, et en effet, si l'on pose

$$\Omega_\alpha = p_{\beta\gamma} p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta} p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon} p_{\gamma\delta},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ désignent les nombres 1, 2, 3, 4, 5 dans l'ordre de présentation naturelle *à partir* de l'un d'eux α, on trouve que l'on doit avoir identiquement

$$\Omega_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5);$$

ces cinq équations ne sont pas d'ailleurs indépendantes : les dix quantités p peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à neuf dimensions; les équations précédentes y déterminent alors cinq espaces quadratiques à huit dimensions, lesquels ont en commun un espace à six dimensions qui est du cinquième degré. A chaque point de ce dernier espace correspond un cercle dans l'espace ordinaire.

Si l'on fait

$$\Omega_i(p, p') = \frac{1}{2} \sum_{\omega, \rho} \frac{\partial \Omega_i}{\partial p_{\omega\rho}} p'_{\omega, \rho},$$

l'équation

$$\sum_i [\Omega_i(p, p')]^2 = 0$$

exprime que les deux cercles dont les coordonnées sont p_{ij}, p'_{ij} se rencontrent en un point et les équations

$$\Omega_1(p, p') = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_5(p, p') = 0.$$

qui se réduisent à deux distinctes, exprimant les conditions pour que ces deux cercles aient deux points communs. Le rayon ρ du cercle dont les coordonnées sont p_{ij} est donné par la formule

$$\rho^2 = \frac{\sum_{ij} p_{ij}^2}{\sum_j \left(\sum_i \frac{p_{ij}}{R_i} \right)^2},$$

où les R sont les rayons des sphères de référence.

La forme quadratique

$$\sum_{i,j} p_{ij}^2,$$

que l'auteur représente par $\Xi(p)$, joue un rôle important dans la théorie du cercle. Elle conduit à la notion des cercles en involution; si l'on pose

$$\Xi(p, p') = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \Xi(p)}{\partial p_{ij}} p'_{ij},$$

deux cercles seront dits en involution si l'on a

$$\Xi(p, p') = 0;$$

par chacun d'eux on peut alors faire passer un cercle orthogonal à l'autre. La même forme conduit, par un procédé bien connu, à la notion de l'*angle* de deux cercles.

Ces notions acquises, M. Kœnigs passe à l'étude des systèmes linéaires de cercles qu'il désigne par A_5, A_4, A_3, A_2, A_1, A_0, selon leur degré d'indétermination.

C'est le système A_0 qui a été l'objet principal des recherches de M. Stephanos; il se compose de cinq cercles, c'est un *pentacycle*. Les cercles d'une congruence linéaire A_2 sont en involution avec cinq cercles formant un pentacycle.

C'est sur le système A_5 que M. Kœnigs appelle particulièrement l'attention. Un tel système est formé par l'ensemble des cercles dont les coordonnées p_i vérifient une équation linéaire, telle que

$$\sum_{i,j} a_{ij} p_{ij} = 0,$$

où il est commode de supposer

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

L'étude de ceux de ces cercles qui sont situés sur une sphère S donne lieu aux résultats suivants :

Tous ces cercles sont orthogonaux à une sphère S', dite conjuguée de S.

Toutes les sphères conjuguées des sphères de l'espace sont orthogonales à une sphère fixe K, dite *sphère centrale*.

Toutes les sphères qui coupent la sphère centrale suivant un même cercle ont même conjuguée.

Tous les cercles du système A_5 qui coupent deux fois un cercle quelconque de la sphère centrale sont orthogonaux à une même sphère.

L'auteur cherche ensuite des sphères qui coïncident avec leurs conjuguées. Une telle sphère, on le voit sans peine, a son rayon nul et son centre sur la sphère centrale. M. Kœnigs montre qu'il y a quatre points-sphères de cette nature. Leur détermination dépend d'une équation bicarrée dont les coefficients sont les invariants du système A_5 : l'un est la forme adjointe de la forme $\Xi(p)$, avec les quantités a pour variables, l'autre est la somme des carrés des formes adjointes des formes Ω, toujours avec les mêmes variables. Ces invariants paraissent devoir jouer, dans la théorie des systèmes linéaires de cercles, un rôle essentiel.

Hermite. — Sur la transformation de l'intégrale elliptique de troisième espèce. (G. 6).

Si l'on considère l'intégrale

$$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}},$$

où G, A, R sont des polynômes en x, et si l'on détermine les polynômes P et Q par la condition

$$G = AP - A'RQ$$

et que l'on pose

$$Q_1 = P - RQ' - \frac{1}{2} R'Q,$$

on aura

(1) $$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1\,dx}{A\sqrt{R}};$$

c'est un cas particulier d'une méthode de réduction que M. Hermite donne dans son enseignement (*Cours d'Analyse*, rédigé par M. Andoyer, 3ᵉ éd., p. 28). Dans la Note que nous analysons, l'illustre géomètre applique la précédente formule à la recherche de l'expression de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\lambda^2 y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}},$$

où $y = \frac{U}{V}$ est la formule de transformation de Jacobi qui satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

La relation (1) donne alors

$$\int \frac{\lambda^2 U^2\,dx}{V^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{V} + \int \frac{Q_1\,dx}{V\sqrt{R}},$$

en faisant

$$R = (1-x^2)(1-k^2x^2), \qquad G = \lambda^2 U^2, \qquad A = V;$$

M. Hermite établit, d'abord par une méthode due à M. Fuchs, puis par voie algébrique, que Q_1 est divisible par V. Le quotient est un simple binôme

$$nk^2 M^2 x^2 + 2B'M^2,$$

où B′ est le coefficient de x^2 dans V, supposé écrit dans la forme de Jacobi

$$V = 1 + B'x^2 + \ldots + B^{(m)} x^{2m};$$

finalement, on arrive ainsi au résultat de Jacobi

$$\frac{1}{M}\int \frac{\lambda^2 y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = -\frac{V'\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{V} + \int \frac{(nk^2x^2+2B')\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Destrem. — Déplacement du cuivre par le zinc et le cadmium dans quelques solutions de sels de cuivre. (II, 7).

Stieltjes. — Sur la transformation linéaire de la différentielle el-

liptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$. Première partie. Considérations préliminaires (K. 26).

Il s'agit, comme on voit, d'un problème bien rebattu. Mais, grâce à sa connaissance approfondie de l'Algèbre, l'auteur est parvenu à l'éclairer d'un jour tout nouveau.

Soit

$$X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4;$$

si y est une nouvelle variable, liée à x par la relation homographique

$$(1) \qquad p + qx + ry + sxy = 0,$$

et si l'on pose

$$Y = b_0 x^4 + 4 b_1 x^3 + 6 b_2 x^2 + 4 b_3 x + b_4,$$

on aura, comme on sait,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}};$$

il est aisé de voir que, si l'on désigne par S et T les deux invariants de X, savoir

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$
$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,$$

les deux invariants correspondants de Y auront les mêmes valeurs. D'un autre côté, le rapport anharmonique des racines de X est égal au rapport anharmonique des racines correspondantes de Y.

Réciproquement M. Stieltjes montre que, si les deux formes X et Y ont des invariants égaux, le rapport anharmonique des racines de la première est le même que le rapport anharmonique des racines de la seconde; cela résulte aisément de la façon dont les racines de X, par exemple, s'expriment au moyen des racines de l'équation

$$4u^3 - Su - T = 0$$

et de ce que l'équation du sixième degré qui détermine le rapport anharmonique des racines de X contient le seul paramètre $\frac{S^3}{T^2}$.

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

par une relation telle que (1) consiste en ce que les invariants S et T des fonctions X, Y soient égaux. Le calcul des coefficients p, q, r, s s'effectue sans peine, si l'on connaît les racines de X et de Y.

M. Stieltjes désigne sous le nom d'*intégrale linéaire de l'équation différentielle* une relation

$$p + qx + ry + sxy = 0,$$

qui permet d'y satisfaire quand les conditions précédentes sont vérifiées. Il

vient donc de donner un moyen de trouver ces intégrales linéaires, qui sont au nombre de quatre. Toutefois les calculs précédents impliquent plus d'opérations algébriques que n'en exige la résolution d'une équation du quatrième degré. Il est clair que le problème doit dépendre d'une telle équation, et c'est cette équation que M. Stieltjes va en effet former, en s'appuyant sur les résultats obtenus par M. Hermite dans ses Mémoires *Sur la théorie des formes homogènes à deux indéterminées* (*Crelle*, t. 52).

Désignons par H_x le hessien de X

$$H_x = \frac{1}{144}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial x'} \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial x'} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x'^2} \end{vmatrix},$$

où x' est la variable d'homogénéité. M. Hermite a montré qu'en faisant

$$u = -\frac{H_x}{X}$$

on avait

$$\frac{2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\pm\, du}{\sqrt{4u^3 - Su - T}};$$

il suit de là que, en employant pour Y des notations analogues à celles qui ont été adoptées pour X, la relation

$$XH_y - YH_x = 0$$

doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

L'examen de la fonction

$$XH_y - YH_x,$$

dans le cas où l'on a

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2),$$
$$Y = (1 - y^2)(1 - k^2y^2),$$

montre que l'on a

$$XH_y - YH_x = \frac{1}{4}(1 - k^2)(x - y)(x + y)(1 - kxy)(1 + kxy),$$

en sorte que, dans ce cas, le premier membre se décompose en quatre facteurs qui, égalés à zéro, donnent précisément les quatre intégrales linéaires de l'équation différentielle. Il est aisé d'en conclure qu'il en est toujours ainsi.

On est donc amené à l'étude, dans le cas général, de la décomposition en facteurs de l'expression

$$XH_y - YH_x.$$

Soient u', u'', u''' les racines de l'équation

$$4u^3 - Su - T = 0;$$

M. Hermite a prouvé que les fonctions

$$H_x + uX,$$

où l'on remplace u par u', u'', u''' étaient des carrés parfaits φ_x^2, $\varphi_x'^2$, $\varphi_x''^2$;

M. Stieltjes établit que l'expression

$$(u''-u''')\varphi'_x\varphi'_y+(u'''-u')\varphi''_x\varphi''_y+(u'-u'')\varphi'''_x\varphi'''_y$$

est, sauf un facteur constant, le carré de l'un des facteurs de $XH_y - YH_x$. On obtient ainsi la solution du problème posé.

Appliquant ces résultats à l'équation d'Euler

$$\frac{dx^2}{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}=\frac{dy^2}{a_0y^4+3a_1y^3+6a^2y^2+4a_3y+a_4},$$

M. Stieltjes parvient au résultat suivant : les intégrales linéaires de cette équation, autres que $x-y=0$, s'obtiennent en posant

$$h+uf+\left(\frac{1}{12}S-u^2\right)(x-y)^2=0,$$

où

$$h=\frac{1}{12}\left(y^2\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 H_x}{\partial x\,\partial x'}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial x'^2}\right)$$

$$f=\frac{1}{12}\left(y^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial x'}+\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2}\right)$$

sont les secondes polaires de H_x et de X, et où u doit être remplacé par les racines u', u'', u''' de l'équation

$$4u^3-Su-T=0.$$

Sauf un facteur constant, le premier membre est alors un carré exact, et la relation entre x et y se réduit bien à la forme

$$p+qx+ry+sxy=0.$$

Ces résultats peuvent s'obtenir en partant de la forme que M. Cayley a donnée à l'intégrale générale de l'équation d'Euler, savoir

$$h+Cf+\left(\frac{1}{12}S-C^2\right)(x-y)^2=0,$$

et cette forme même met bien en évidence le lien entre les deux questions. En général, il doit y avoir un lien aussi intime entre la recherche des intégrales linéaires de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

et l'intégration générale de cette équation. Cette étude est renvoyée à une seconde partie, non encore parue.

Duhem. — Étude historique de la théorie de l'aimantation par influence. (40 p.).

Les conclusions de cette importante étude, qui fait partie des travaux bibliographiques que publient les *Annales de la Faculté de Toulouse,* sont reproduites en tête de l'analyse du Mémoire suivant de M. Duhem, analysé dans la première Partie du *Bulletin.* Elle est terminée par une liste de soixante et un Mémoires sur la matière. J. T.

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI, 4e série, Rendiconti, t. III, 1887, 1er semestre. In-4° (1).

Tacchini (*P.*). — Sur les phénomènes de la chromosphère solaire observés à l'observatoire royal du Collège romain dans le quatrième trimestre de 1886. (13).

Tacchini (*P.*). — Observations de taches et facules solaires. (14).

Ricci (*G.*). — Sur la dérivation covariante à une forme quadratique différentielle. (15-18).

Millosevich (*E.*). — Observations de la comète Finlay, faites à l'équatorial de 25^{m} d'ouverture de l'observatoire royal du Collège romain (18-19).

Millosevich (*E.*). — Observations et calculs sur la nouvelle planète découverte par C.-H.-F. Peters le 22 décembre 1886. (19).

Ricco (*A.*). — Résultats des observations des protubérances solaires faites à l'observatoire royal de Palerme en 1885. (21-22).

Chistoni (*C.*). — Valeurs absolues de la déclinaison magnétique et de l'inclinaison, déterminées en quelques points de l'Italie septentrionale dans l'été de 1886. (22-24).

Tacchini (*P.*). — Sur la distribution des protubérances hydrogéniques à la surface du Soleil pendant l'année 1886. (117-118).

Visalli (*P.*). — Sur les corrélations (en deux espaces de trois dimensions) qui satisfont à douze conditions élémentaires. (118-124).

L'auteur passe en revue tous les cas de douze conditions élémentaires que l'on peut imaginer par combinaison des suivantes :

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XII$_2$, p. 88.

1 et 2. Qu'un point (plan) donné soit le pôle (plan polaire) d'un plan (point) donné ;
3. Que deux points donnés soient conjugués ;
4. Que deux droites données soient conjuguées;

Pour chacun de ces cas, il recherche le nombre de corrélations exceptionnelles de troisième ordre.

Visalli (*P.*). — Sur les figures engendrées par deux formes fondamentales de deuxième espèce, entre lesquelles a lieu une correspondance multiple $(1, \nu)$ de degré n. (124-127).

Millosevich (*E.*). — Observations sur la nouvelle planète (264) entre Mars et Jupiter. (127).

Chistoni (*C.*). — Valeurs absolues de la déclinaison magnétique et de l'inclinaison déterminées dans l'Italie méridionale en novembre et décembre 1886. (140).

Tacchini (*P.*). — Sur la distribution en latitude des facules, taches et éruptions solaires en 1886. (185-186).

Pieri (*M.*). — Sur le principe de correspondance dans un espace linéaire quelconque de n dimensions. (196-199).

L'auteur démontre les deux formules

$$N_{2m} = \alpha_0^\star + \alpha_0 + \alpha_1^\star + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}^\star + \alpha_{m-1} + \alpha_m^\star \quad (\text{étant } \alpha_m^\star = \alpha_m),$$
$$N_{2m+1} = \alpha_0^\star + \alpha_0 + \alpha_1^\star + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}^\star + \alpha_{m-1} + \alpha_m^\star + \alpha_m,$$

dont la première s'applique aux espaces d'un nombre pair de dimensions, et la seconde aux espaces d'un nombre impair de dimensions. N_i est le nombre de coïncidences dans une correspondance algébrique entre deux espaces de i dimensions superposés S_i, $S_i^\star$, $\alpha_r^\star$ est l'ordre des lieux (de r dimensions) correspondant aux espaces linéaires de r dimensions renfermés en S_i, α_r l'ordre des lieux qui correspondent aux espaces linéaires de r dimensions appartenant à $S_i^\star$.

La démonstration est faite par induction mathématique.

Enfin l'auteur applique les deux formules à la détermination du nombre de points constituant le *groupe jacobien* de deux surfaces ($n-1$ dimensions) des ordres p et q dans un espace de n dimensions.

Millosevich (*E.*). — Sur la nouvelle planète découverte par le Dr Palisa à Vienne. (200).

Chistoni (*C.*). — Valeurs absolues de l'intensité du magnétisme terrestre déterminées en 1886 en divers points d'Italie. (200-202).



Sandrucci (*A.*). — Sur la concordance de la théorie cinétique des gaz avec la Thermodynamique, et sur un principe de la cinétique admis jusqu'ici comme vrai. (205-211).

Brioschi (*F.*). — Sur les fonctions sigma hyperelliptiques. (245-250) et (311-315).

Bianchi (*L.*). — Sur les systèmes doublement infinis de rayons (congruences). (369-370).

Pincherle (*S.*). — Construction de nouvelles expressions analytiques qui servent à représenter des fonctions ayant un nombre infini de points singuliers. (370-375).

Volterra (*V.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (393-396).

L'auteur montre un nouveau lien qui existe entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des substitutions. Il introduit deux opérations infinitésimales relatives à une substitution, et qu'il appelle *dérivation* et *intégration* d'une substitution. Après quoi il démontre que l'intégration d'une équation différentielle linéaire homogène d'un ordre quelconque peut se réduire à l'intégration d'une substitution.

Millosevich (*E.*). — Sur l'orbite de la planète (264) Libussa. (476-480).

Millosevich (*E.*). — Observation sur la nouvelle petite planète Aline (266) découverte par le Dr J. Palisa le 17 mai. (480).

Millosevich (*E.*). — Observations de la nouvelle comète Barnard. (481).

Sandrucci (*A.*). — Sur l'équation fondamentale et sur la pression intérieure des vapeurs saturées. (489-493).

Tome III ; 1887, 2e semestre.

Segre (*C.*). — Sur la géométrie sur une surface réglée algébrique. (3-6).

Sur une surface réglée d'ordre n et de genre p soit donnée une courbe γ d'ordre ν et de genre π qui soit h^{uple} pour la surface, et qui rencontre chaque génératrice en k points. On aura alors le nombre x des génératrices tangentes

à γ et le nombre η des points de γ par lesquels passent deux génératrices coïncidentes donnés par les formules suivantes :

$$y = 2\nu h(k-1) - k(k-1)n,$$
$$\eta_1 - y = 2k(p-1) - 2h(\pi - 1).$$

Toute surface réglée algébrique de genre p et d'ordre $n > 2p+1$ appartient à un espace de plus de $n-2p$ dimensions ou bien est une projection d'une surface réglée de même genre et ordre appartenant à un tel espace.

Riccò (*A.*). — Résultats des observations des protubérances solaires faites à l'observatoire royal de Palerme en 1886. (53-54).

Volterra (*V.*). — Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions. Note I (97-105), Note II (141-146), Note III (153-158).

L'auteur dit qu'une fonction y *dépend d'une autre fonction* $\varphi(x)$ *dans l'intervalle* (A, ..., B) lorsque y dépend de *toutes* les valeurs de $\varphi(x)$ en cet intervalle. Il étudie les variations de ces fonctions et donne une extension de la formule de Taylor à ces mêmes fonctions. Dans la Note II, il examine le cas où il y a des points exceptionnels, et dans la Note III il s'occupe de quelques questions particulières. Le but de ces recherches est principalement, comme l'auteur le dit, une extension de la théorie de Riemann sur les fonctions de variables complexes.

Segre (*C.*). — Sur les variétés algébriques composées d'une série simplement infinie d'espaces. (149-153).

Siacci (*F.*). — Sur les angles de plus grande jetée. (211-216).

Tacchini (*P.*). — Observations de taches et facules solaires faites dans le deuxième et le troisième trimestre de 1887. (217).

Tacchini (*P.*). — Sur les phénomènes de la chromosphère solaire dans le deuxième et le troisième trimestre de 1887. (218).

Millosevich (*E.*). — Sur les dernières planètes découvertes entre Mars et Jupiter; observations et statistique. (220-223).

Millosevich (*E.*). — Éphéméride de la planète (264) Libussa pour la deuxième opposition. (223-225).

Volterra (*V.*). — Sur les fonctions qui dépendent de lignes. Note I (225-230), Note II (274-281).

Pizzetti (*P.*). — Sur la compensation des observations suivant la

méthode des moindres carrés. Note I (230-235), Note II (288-293).

Volterra (*V.*). — Sur une extension de la théorie de Riemann sur les fonctions de variables complexes. (281-287).

Lockyer (*N.*). — Recherches sur les météorites. Conclusions générales. (307-310).

Pincherle (*S.*). — Sur la comparaison des singularités de deux fonctions analytiques. (310-315).

L'auteur appelle *semblables* deux fonctions entières $G(x)$, $G_1(x)$ lorsqu'on a

$$G_1(x) = a(x)\,G(x) + b(x),$$

$a(x)$ et $b(x)$ étant deux fonctions ayant un caractère rationnel dans un intervalle comprenant $x = \infty$.

Tacchini (*P.*). — Photographies de la couronne atmosphérique autour du Soleil, faites à Rome en septembre 1887 par P. Tacchini. (315-316).

Millosevich (*E.*). — Occultations d'étoiles derrière la Lune pendant l'éclipse totale de Lune du 18 janvier 1888. (317-320).

S. R.

MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-4°.

2e série, t. XXV, 1871.

Richelmy (*P.*). — Recherches théoriques et expérimentales sur l'écoulement des liquides par de courts tubes coniques divergents. (31-52).

De Saint-Robert (*P.*). — Sur la résolution de certaines équations à trois variables au moyen d'une règle glissante. Caractère par lequel on reconnaît qu'une telle résolution est possible. Graduation de la règle. (53-62).

De Saint-Robert (*P.*). — Nouvelles Tables hypsométriques. (63-79, VIII Tables).

Curioni (*G.*). — Sur la poussée des terres dans le cas le plus général qui puisse se présenter à l'ingénieur constructeur. (81-122, 2 pl.).

Cavalli (*J.*). — Supplément à la théorie du choc des projectiles d'artillerie, donnée dans le Mémoire de 1866, 2e série, t. XXIV des « Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin ». (123-140).

Menabrea (*L.-F.*). — Étude de Statique physique. Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique. (141-180).

Voici le principe dont il s'agit :

Lorsqu'un système élastique quelconque se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail développé par les forces intérieures est un *minimum*.

L'auteur, après avoir exposé quelques considérations préliminaires sur ce principe, traite cinq problèmes sur la distribution des pressions et des tensions. Puis il donne la démonstration générale du principe dans le cas d'un système libre, et son extension au cas où le système contient des points fixes ou des parties rigides.

Cavalli (*G.*). — Sur la résistance des tubes au choc de l'eau. (241-255).

Tome XXVI; 1871.

Genocchi (*A.*). — Démonstration d'une formule de Leibnitz et Lagrange et de quelques formules affines. (61-77).

La formule de Leibnitz, traitée ensuite par Lagrange, est celle qui exprime les différentielles successives d'un produit. L'auteur en donne pour le cas que l'indice soit entier et négatif, c'est-à-dire pour les intégrales, une démonstration très simple, fondée sur la formule

$$\int_a^x f(x)\,dx^n = \frac{1}{\Pi(n-1)}\int_a^x (x-z)^{n-1}\,dz,$$

dont le premier membre est une intégrale de l'ordre n. Il donne aussi une extension au cas des indices négatifs d'une formule plus générale établie par Pfaff, une généralisation d'une formule donnée par Winckler, et la démonstration et généralisation d'une autre formule de Pfaff. Enfin, il fait remarquer que les théorèmes qu'il a démontrés pour les intégrales à indice entier peuvent être étendus aux intégrales à indice fractionnaire, en prenant la formule citée ci-dessus comme définition de ces intégrales.

Catalogue des 634 principales étoiles visibles sous la latitude moyenne de 45°, avec les coordonnées de leurs positions moyennes pour 1880; et atlas de douze cartes, contenant ces étoiles projetées stéréographiquement sur l'horizon, de deux en deux heures sidérales, avec les cercles et parallèles de déclinaison de 10 en 10 degrés; présentés à l'Académie royale des Sciences de Turin par le Directeur de l'observatoire. (223-281).

Basso (*G.*). — Nouvelle boussole rhéométrique. (283-289).

Codazza (*G.*). — Transmission pneumatique de la force. (291-302).

Tome XXVII; 1873.

Dorna (*A.*). — Description des instruments et des méthodes en usage à l'observatoire de Turin pour la mesure du temps. Première Communication. (1-32).

Tome XXVIII; 1876.

Genocchi (*A.*). — Études sur les cas d'intégration sous forme finie. Deuxième Mémoire. (1-18).

Curioni (*G.*). — L'élasticité dans la théorie de l'équilibre et de la stabilité des voûtes. (339-360, 1 pl.).

Tome XXIX; 1878.

Genocchi (*A.*). — Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes. (365-404, 1 pl.).

Le Mémoire de Foncenex est relatif à la composition des forces. Les deux démonstrations données par Foncenex et reportées par l'auteur sont faites independamment de la théorie des parallèles, l'une au moyen du Calcul infinitésimal, l'autre sans le secours de ce calcul. L'auteur traite ensuite la question de l'équilibre du levier en reportant la démonstration de Foncenex, qui croyait que l'équation

$$[f(x)]^2 = f(2x) + 2,$$

à laquelle il était conduit par ses considérations n'avait pas d'autre solution que

$f(x) = 2$. L'auteur observe qu'elle a aussi la solution

$$f(x) = a^x + a^{-x},$$

a étant une constante. Si l'on pose $a = e^{ih}$, h étant constante, la solution de Foncenex est donnée par $h = 0$ $(a = 1)$, et elle porte à conclure que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, c'est-à-dire à établir la géométrie euclidienne. Le cas de $h = \frac{i}{r}$, r étant réel, correspond à la géométrie de Lobatschefski ou hyperbolique, et celui de $h = \frac{1}{r}$ (r réel) à la géométrie elliptique. L'auteur est ainsi porté sur le terrain des géométries non euclidiennes et, dans les considérations qu'il fait suivre, il montre ne pas croire beaucoup à l'utilité de ces géométries, ni à celle des espaces de plusieurs dimensions. Suit un appendice sur l'existence de la pseudosphère et sur l'impossibilité de démontrer le *postulatum* d'Euclide.

Tome XXX; 1878.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématique ni d'Astronomie.

Tome XXXI; 1879.

Dorna (A.). — Indications, formules et Tables numériques pour le calcul des éphémérides astronomiques de Turin avec les éléments de la « Connaissance des Temps, de Paris » et du « Nautical Almanac, de Greenwich ». (1-114).

Curioni (G.). — L'élasticité dans la théorie de l'équilibre et de la stabilité des voûtes. Réduction de la méthode générale pour les applications pratiques. (115-135, 1 pl.).

Siacci (F.). — Nouvelle méthode pour déterminer la résistance de l'air sur les projectiles. Ire Partie (137-156); IIe Partie (201-245).

Dorna (A.). — Application des principes de la Mécanique analytique à des problèmes. (247-311).

Note I (249-268). — Sur le mouvement absolu d'un point matériel lié.
Note II (269-288). — Sur le mouvement relatif d'un point matériel lié.
Note III (289-299). — Sur les intégrales elliptiques de première espèce et sur leur application au mouvement d'un point.
Note IV (301-311). — Sur les intégrales elliptiques de première espèce et sur leur application au mouvement rectiligne oscillatoire de deux graves liés.

Tome XXXII; 1880.

D'Ovidio (*E.*). — Étude sur les cubiques gauches par la notation symbolique des formes binaires. (1-75).

La cubique gauche. Ses plans sécants, tangents et osculateurs. Cordes et tangentes. La développable de troisième classe osculatrice de la cubique gauche. Correspondance entre la cubique et la développable. Axes de la développable. Rapport anharmonique de quatre points de la cubique ou de quatre plans de la développable. Foyers et plans focaux. Correspondance analytique des éléments de l'espace au moyen de la cubique. Involutions de points de la cubique ou de plans de la développable. Surfaces du second degré circonscrites à la cubique ou inscrites à la développable. Droites associées. Sur certains faisceaux ou certains systèmes de surfaces du second degré. Cônes conjoints. Coniques conjointes. Autres cônes conjoints. Quelques systèmes particuliers de surfaces du second degré. Surfaces polaires par rapport à la développable ou à la cubique. Sur certains complexes.

Curioni (*G.*). — L'élasticité dans la théorie de l'équilibre et de la stabilité des voûtes.

Voûtes symétriques et sollicitées symétriquement. (135-185, 2 pl.).

Voûtes symétriques non symétriquement sollicitées. (137-262, 2 pl.).

Sang (*E.*). — Nouveau calcul des mouvements elliptiques. (187-199).

Dorna (*A.*). — Application des principes de la Mécanique analytique à des problèmes.

Note V. — Sur les fonctions elliptiques et les intégrales elliptiques de première espèce et sur leur application au mouvement circulaire d'un point non libre attiré ou repoussé avec une force constante par un centre fixe. (201-236).

Sang (*E.*). — Addition au Mémoire sur le calcul des mouvements elliptiques. (305-307).

Gerbaldi (*F.*). — Sur les systèmes de cubiques gauches ou de développables de la troisième classe, déterminés par deux cubiques projectives. (309-357).

La projectivité est déterminée par trois couples arbitraires de points et par l'égalité des rapports anharmoniques. Les droites joignant les points correspondants forment une surface gauche du sixième degré. Par un point de cette

surface passe en général une seule cubique gauche située sur la surface. Ces systèmes ∞ de cubiques sont ceux que l'auteur a étudiés. Il traite d'abord de cette surface de sixième degré et de quelques propriétés qui s'y rattachent. Puis il démontre que le système renferme quatre cubiques planes et à point double et, après avoir donné l'équation du plan osculateur à une cubique du système, il fait voir que les plans osculateurs de même paramètre à toutes les cubiques du système sont aussi osculateurs à une nouvelle cubique. On a ainsi un nouveau système de cubiques gauches. Après avoir traité plusieurs autres questions et donné les équations en coordonnées de plans de la surface du sixième degré, de sa développable et d'une cubique quelconque du système, il considère une certaine surface gauche du quatrième degré, lieu des coniques inscrites aux développables osculatrices de toutes les cubiques du système. Ensuite, il expose les propriétés de la surface du sixième ordre enveloppe de tous les plans osculateurs, et d'un système de surfaces de la troisième classe lié à cette surface; puis, il examine particulièrement certaines quadriques et coniques en relation aux cubiques du système. Après l'exposition de quelques autres propriétés, il termine par la considération du cas où, au lieu de deux cubiques projectives, on prend pour établir le système une cubique en involution.

Tome XXXIII; 1881.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématiques ni d'Astronomie.

Tome XXXIV; 1883.

Basso (*G.*). — Phénomènes de polarisation chromatique en des agrégats de corps biréfringents. (3-24, 1 pl.).

Tome XXXV; 1884.

Dorna (*A.*). — Sur la réfraction. Interprétation mathématique de l'hypothèse par laquelle Dominique Cassini détermina la réfraction astronomique, et théorie exacte qui en suit, libre de toute supposition arbitraire sur la constitution de l'atmosphère, par une propriété de cette dernière qui n'avait pas encore été indiquée. (129-155).

Jadanza (*N.*). — Quelques problèmes de Géodésie. (157-185).

Tome XXXVI; 1885.

Segre (*C.*). — Étude sur les quadriques dans un espace linéaire d'un nombre quelconque de dimensions. (3-86).

Généralités sur les espaces linéaires. Polarité par rapport à une quadrique

de l'espace de $n-1$ dimensions. Transformation projective d'une quadrique en une autre. Espaces linéaires tangents. Équations tangentielles d'une quadrique. Espaces linéaires de points tracés sur la quadrique. Projection stéréographique de la quadrique sur un plan, et son application à la recherche des relations ayant lieu entre les deux systèmes d'espaces de p dimensions qui sont sur une quadrique de $2p$ dimensions. Faisceaux de quadriques et classification des quartiques d'intersection à l'aide du théorème de Weierstrass sur les formes bilinéaires et quadratiques, dont voici l'énoncé :

« La condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de formes bilinéaires ou quadratiques puisse être transformé en un autre couple est que ces deux couples aient les mêmes diviseurs élémentaires. »

Système (Schiera) de quadriques. Développable circonscrite à ce système et ses singularités. Quartiques tracées sur une quadrique.

Segre (*C.*). — Sur la Géométrie de la droite et de ses séries quadratiques. (87-157).

Ce Mémoire fait suite au précédent, et contient l'application des résultats de ce dernier à la géométrie de la droite, cette géométrie étant considérée comme celle d'une quadrique à quatre dimensions dans un espace linéaire de cinq dimensions.

De Berardinis (*G.*). — Sur l'écartement de la ligne géodésique des sections normales d'une surface. (159-179).

Guidi (*C.*). — Sur les arcs élastiques. (181-197, 4 pl.).

Loria (*G.*). — Recherches sur la géométrie de la sphère et leur application à l'étude et à la classification des surfaces du quatrième ordre ayant pour ligne double le cercle imaginaire de l'infini. (199-297).

La géométrie de l'espace de points est celle d'une quadrique de 3 dimensions dans un espace à 4 dimensions (l'espace de sphères). Le groupe des transformations qui transforment en elle-même cette quadrique est constitué par le groupe des transformations de la géométrie métrique ordinaire et celui des transformations par rayons vecteurs réciproques. Interprétation géométrique des coordonnées d'une sphère. Étude des systèmes linéaires et quadratiques de sphères. Classification des cyclides à l'aide du théorème de Weierstrass précédemment cité, ayant défini la cyclide comme lieu des points-sphères d'un complexe quadratique de sphères. Il y a 18 espèces de cyclides non réductibles par transformations projectives ou par rayons vecteurs réciproques.

Tome XXXVII; 1886.

Ferraris (*G.*). — Recherches théoriques et expérimentales sur le générateur secondaire Gaulard et Gibbs. (97-167).

Ferria (*G.-G.*). — Ergomètre pour l'étude de la stabilité des constructions et de l'élasticité des matériaux. (207-217, 2 pl.).

Roiti (*A.*). — Sur un électrocalorimètre et sur quelques mesures faites avec cet appareil sur le générateur secondaire Gaulard et Gibbs. (367-394).

Segre (*C.*). — Recherches sur les homographies et sur les corrélations en général, et en particulier sur celles de l'espace ordinaire considérées dans la géométrie de la droite. (395-425).

Homographies d'un espace linéaire qui transforment en elle-même une quadrique donnée (de $n-1$ dimensions). Homographies de l'espace ordinaire dans la géométrie de la droite. Les corrélations en des espaces linéaires quelconques. Corrélations dans l'espace ordinaire. Transformations homographiques et réciproques d'un complexe linéaire de droites en soi-même. Sur les invariants des homographies et des corrélations dans la géométrie de la droite.

Guidi (*C.*). — Sur la courbe des pressions dans les arcs et les voûtes. (625-642, 1 pl.).

Tome XXXVIII, 1888.

Segre (*C.*). — Les couples d'éléments imaginaires dans la géométrie projective synthétique. (3-24).

La méthode suivie par l'auteur est fondée sur le théorème suivant :

« Si deux correspondances ou transformations univoques P, P_1 en des variétés quelconques sont telles que P soit transformée en elle-même par P_1, P_1 sera aussi transformée en elle-même par P, et le produit de ces deux transformations est commutatif, c'est-à-dire que la transformation obtenue en appliquant les transformations données dans l'ordre P, P_1 est identique à celle qu'on obtient en les appliquant dans l'ordre P_1, P. Réciproquement, la commutativité des deux transformations entraîne la propriété que P soit transformée en elle-même par P_1, et P_1 par P. »

L'auteur fait aussi des applications à la théorie métrique des couples imaginaires, aux coniques, à l'hexagramme de Pascal, aux théorèmes de Carnot et de Sturm. Il considère enfin les couples gauches de droites imaginaires.

Loria (*G.*). — Le passé et le présent des principales théories géométriques. (329-376).

La Géométrie avant la moitié du XIXe siècle. Théorie des courbes planes. Théorie des surfaces. Théorie des courbes à double courbure. Représentations, correspondances, transformations. Géométrie de la droite. Géométrie non euclidienne. Géométrie à n dimensions.

Ferraris (*G.*). — Sur les différences de phase des courants, sur le retard de l'induction et sur la dissipation d'énergie dans les transformateurs. Recherches expérimentales et théoriques. (415-464, 1 pl.). S. R.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8°.

Tome XXI, 1885-86 (1).

Padova (*E.*). — Sur le mouvement de rotation d'un corps rigide. (38-47).

L'auteur résout deux cas de ce problème. Dans le premier, les équations du mouvement sont

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr - \lambda A p,$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp - \lambda B q,$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq - \lambda C r,$$

et, dans le second,

$$A\frac{dp}{dt} = -\lambda A p + (A - C)qr - P s \gamma_2,$$

$$A\frac{dq}{dt} = -\lambda A q + (C - A)pr + P s \gamma_1,$$

$$C\frac{dr}{dt} = -\lambda C r.$$

Charrier (*A.*). — Éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes principales, calculées pour Turin en temps moyen civil de Rome pour 1886. (61-83).

Charrier (*A.*). — Observations météorologiques. (84-88).

Dorna (*A.*). — Sur la visée méridienne de l'observatoire de Turin à Cavoretto, et formule pour déduire sa position de sa hauteur et des constantes de l'instrument des passages. (92-94, 1 pl.).

Segre (*C.*). — Sur les variétés normales à trois dimensions composées de séries simples rationnelles de plans. (95-115).

---

(1) Voir *Bulletin*, X_2, p. 183.

L'auteur donne plusieurs propriétés de ces variétés, leur distinction en classes et enfin leur représentation sur l'espace ordinaire. De cette représentation il déduit une transformation univoque de l'espace ordinaire, par laquelle aux plans correspondent des surfaces réglées d'ordre quelconque.

Jadanza (*N.*). — Nouvelle méthode pour raccourcir les lunettes terrestres. (118-132, 1 pl.).

Siacci (*F.*). — Sur la rotation d'un corps autour d'un point. (261-265).

L'auteur suppose qu'une surface tracée dans le corps soit constamment tangente à une surface fixe et démontre deux propositions relatives à ces surfaces.

Bruno (*G.*). — Sur un point de la théorie des fractions continues. (273-277).

Une fraction intermédiaire comprise entre les deux fractions principales d'ordres i et $i+2$ d'une fraction continue est plus rapprochée de cette réfraction continue que toute autre fraction à termes plus simples, à l'exception, en certains cas, de la fraction principale d'ordre $i+1$.

Dorna (*A.*). — Notions sur l'équatorial à réfracteur Merz de $0^m,30$ d'ouverture et $4^m,50$ de distance focale. (304-310). Note II (357-365). Note III (379-399). Note IV (698-715).

Charrier (*A.*). — Travaux de l'observatoire royal de Turin (Observations météorologiques). (311-312).

Dorna (*A.*). — Recherches pour reconnaître si la déviation de la visée méridienne de l'observatoire de Turin à Cavoretto du plan du méridien est sensiblement nulle comme en 1828. Note II (433-442). Note III (489-500).

Jadanza (*N.*). — Sur le calcul de la distance de deux points dont les positions géographiques sont connues. (469-488).

Basso (*G.*). — Sur la loi de répartition de l'intensité lumineuse entre les rayons biréfractés par des lamelles cristallines. (586-602).

Loria (*G.*). — Représentation sur un plan des congruences $[2, 6]_2$ et $[2, 7]$. (621-632).

Peano (*G.*). — Sur l'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre. (677-685).

L'auteur démontre l'existence des intégrales de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

en supposant seulement la continuité de la fonction $f(x, y)$.

Zanotti Bianco (*O.*). — L'hexagramme de Pascal. (686-697).

En 1820 Bessel retrouva la propriété de l'hexagramme sans connaître le théorème de Pascal. Il communiqua sa découverte à Olbers, qui ne connaissait pas non plus ce théorème.

Charrier (*A.*). — Éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes principales, calculées pour Turin en temps moyen civil de Rome pour 1887. (725-749).

Porro (*F.*). — Observations des comètes Fabry, Barnard et Brooks (Ire 1886), faites à l'équatorial de Merz de l'observatoire de Turin. (750-757).

Segre (*C.*). — Recherches sur les surfaces réglées elliptiques d'ordre quelconque. (868-891).

Les surfaces réglées rationnelles d'ordre n dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions peuvent être regardées comme des projections de celles qui appartiennent à un espace S_{n+1}. L'auteur démontre qu'une propriété analogue a lieu pour les réglées de genre 1 et pour celles de genre 2. Puis il s'occupe des réglées de genre 1 (considérées comme des projections de celles qui appartiennent à S_{n-1}), de leur classification, de plusieurs propriétés relatives aux courbes tracées sur elles, et de la représentation de ces réglées sur le cône cubique ordinaire.

Morera (*G.*). — Sur la représentation des fonctions d'une variable complexe par des expressions analytiques infinies. (892-899).

Il s'agit d'établir des conditions pour qu'une expression analytique infinie (série, produit infini, etc.) représente une fonction *monogène*. Nous citerons le théorème suivant obtenu par l'auteur, et qui contient comme des cas particuliers les théorèmes connus sur les séries et sur les produits infinis.

Si les expressions $\varphi(n_1, n_2, \ldots, z)$ restent monodromes finies et continues dans un champ T, au moins pour toutes les valeurs des n_i supérieures à certains nombres finis, et si en T l'expression $\varphi(n_1, n_2, \ldots, z)$ est uniformément convergente, l'expression

$$w = \lim_{n = \infty} \varphi(n_1, n_2, \ldots, z)$$

représente une fonction monodrome, finie et continue de z en T.

Novarese (*E.*). — Sur une analogie entre la théorie des vitesses et la théorie des forces. (900-911).

Tome XXII, 1886-87.

Porro (*F.*). — Observations des comètes Finlay et Barnard-Hartwig, faites à l'équatorial de Merz de l'observatoire de Turin. (5-11).

Jadanza (*N.*). — Influenee des erreurs du théodolite sur la mesure des angles horizontaux. (12-27).

Emery (*G.*). — Sur la condition de réciprocité et sur les cas d'identité entre des courbes qui représentent une distribution continue de forces parallèles et les courbes funiculaires correspondantes; et disquisition particulière sur les clinoïdes. (176-198).

Porro (*F.*). — Nouvelles observations des comètes Finlay et Barnard-Hartwig, à l'équatorial de Merz de l'observatoire de l'Université royale de Turin. (218-223).

Zanotti Bianco (*O.*). — Quelques théorèmes sur les coefficients de Legendre. (225-239).

Guidi (*C.*). — Sur le calcul de certaines poutres composées. (240-246).

Siacci (*F.*). — Commémoration d'Alexandre Dorna. (247-252).

Charrier (*A.*). — Travaux de l'observatoire astronomique de Turin. (274-278).

Segre (*C.*). Nouveaux résultats sur les surfaces réglées algébriques de genre quelconque. (362-363).

L'auteur énonce sans démonstration quelques propriétés en les empruntant à un Mémoire dont il annonce la prochaine publication dans les *Mathematische Annalen*.

Charrier (*A.*). — Résumé des observations météorologiques faites dans le second semestre de 1886 à l'observatoire astronomique de Turin. (364-368).

Porro (*F.*). — Détermination de la latitude de la station astronomique de Termoli par des passages d'étoiles au premier vertical. (399-419).

D'Ovidio (*E.*). — Sur deux points de la *Theorie der binaren algebraischen Formen* de Clebsch. (427-437).

Les deux points en question sont relatifs à la formule de Gordan pour le développement d'une forme à deux séries de variables suivant les puissances de (x, y), et à la discussion des solutions de l'équation biquadratique.

Peano (*G.*). — Intégration par séries des équations différentielles linéaires. (437-446).

Jadanza (*N.*). — Sur une question d'optique et sur un nouvel appareil pour redresser les images dans les lunettes terrestres. (447-452).

Porro (*F.*). — Troisième et dernière série d'observations des comètes Finlay et Barnard-Hartwig, à l'équatorial de Merz de l'observatoire de Turin. (557-561).

Brambilla (*A.*). — Un théorème dans la théorie des polaires. (787-790).

Segre (*C.*). — Sur la variété cubique à dix points doubles de l'espace de quatre dimensions. (791-801).

Exposé sans démonstrations.

Novarese (*E.*). — Sur une transformation des questions d'équilibre des courbes funiculaires. (801-808).

Bertini (*E.*). — Sur la décomposition de certaines homographies en homologies. (865-806).

Extrait d'une lettre à M. Segre.

Charrier (*A.*). — Ephémérides du Soleil, de la Lune et des planètes principales calculées pour Turin en temps moyen civil de Rome pour 1888. (867-889).

Del Re (*A.*). — Sur les homographies qui transforment en elle-même une certaine courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce, et sur les corrélations qui la transforment en la développable de ses plans osculateurs. (901-922).

L'auteur trouve deux séries différentes de ces homographies. Les formules

pour la première sont les suivantes :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = b^4 x_1 : -b^3 c x_2 : -bc^3 x_3 : c^4 x_4$$

et celles de la seconde

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = a^4 x_4 : -a^3 d x_3 : -ad^3 x_2 : d^4 x_1.$$

Il étudie des propriétés et des cas particuliers remarquables des deux séries, l'application successive (produit) de deux homographies, et enfin les corrélations mentionnées dans le titre, dont il trouve aussi deux espèces.

Basso (*G.*). — Sur la loi optique de Malus dite du *cosinus carré*. (923-930). S. R.

ACTA MATHEMATICA.

Tome VI; 1885 ([1]).

Molk (*J.*). — Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. (1-106).

L'objet de ce Mémoire est de servir d'introduction à la lecture des belles théories arithmétiques publiées par M. Kronecker à l'occasion du cinquantième anniversaire du doctorat de M. Kummer ([2]).

Dans un premier Chapitre, M. Molk fixe le domaine commun à l'Arithmétique et à l'Algèbre; il expose la méthode qui lui semble devoir être suivie dans tout exposé des théorèmes fondamentaux de ces deux sciences; il faut, s'il est possible, rester dans le domaine des nombres entiers, des fonctions entières à coefficients entiers. Il ne faut pas craindre des longueurs inévitables; ce qui seul est essentiel, c'est qu'on aperçoive bien la chaîne des transformations identiques qui permettent de passer du point de départ au point d'arrivée; c'est alors que les démonstrations, malgré leur longueur apparente, tiennent le moins de place dans l'esprit. La démonstration d'un théorème d'Arithmétique ou d'Algèbre est d'autant plus nette et définitive qu'elle évite davantage l'emploi des symboles étrangers à ces sciences, tels que les incommensurables, depuis les radicaux jusqu'aux nombres transcendants. Il y a encore quelque chose d'*essentiel* à faire pour perfectionner une démonstration, même si l'on n'y fait usage ni de nombres, ni de fonctions transcendantes, tant qu'elle exige l'emploi de radicaux ou de quantités algébriques quelconques. Ce n'est toutefois pas changer le domaine de l'Arithmétique et de l'Algèbre que d'y faire entrer les nombres négatifs et les nombres rationnels. A côté de ces nombres il faut considérer les quantités *indéterminées;* ce sont ces symboles qui sont les vrais auxiliaires dans toute recherche, comme l'a déjà montré Gauss, et comme M. Kronecker l'a mis en pleine lumière dans le Mémoire cité.

([1]) Voir *Bulletin*, XIII_2, p. 93.

([2]) Voir *Bulletin*, XIII_1, p. 145.

Ce sont ces symboles qui simplifient les démonstrations en permettant de grouper dans un ordre déterminé les systèmes d'entiers ou de fonctions entières que l'on a à considérer.

Il y a encore une autre abstraction qui joue un grand rôle dans les recherches d'Arithmétique et d'Algèbre, c'est le passage des égalités aux congruences suivant un module donné. Les congruences ont l'avantage de laisser de côté ce qui dans une recherche déterminée ne joue aucun rôle; elles ne font d'ailleurs quitter en rien le domaine de l'Algèbre.

L'emploi des nombres imaginaires de la forme $a+bi$, où a et b sont rationnels, est un cas particulier de l'emploi des indéterminées, c'est celui où i est considéré comme une indéterminée et où, à chaque égalité que l'on écrit, on doit substituer par la pensée une congruence suivant le module i^2+1. Il est d'ailleurs bien souvent avantageux de remplacer le module i^2+1 par tout autre module qui correspond aux recherches que l'on a à effectuer.

Le second Chapitre est consacré à l'étude de l'*irréductibilité* d'une fonction entière quelconque dans un domaine naturel de rationalité donné.

Tous les cas qui peuvent se présenter sont passés successivement en revue et l'on donne pour chacun d'eux une *méthode* permettant de trouver les facteurs irréductibles de la fonction entière donnée ou de montrer qu'elle n'est pas décomposable en facteurs dans le domaine de rationalité donné. Bien entendu, on ne fait pas usage du théorème que toute équation algébrique a une racine au moins; car ce serait introduire les quantités algébriques dans une recherche fondamentale d'Algèbre où elle n'a rien à faire.

La théorie du résultant de deux fonctions entières est ensuite exposée avec de grands détails. On cherche successivement la condition *suffisante* et la condition *nécessaire* pour que les deux fonctions entières données aient un diviseur commun; on montre ensuite que ces deux conditions sont identiques. A l'aide de l'algorithme du plus grand commun diviseur seulement, le résultat peut être obtenu dans chaque cas particulier.

On définit ensuite ce que l'on entend par *domaine général de rationalité*, et l'on donne enfin la théorie de la réductibilité des fonctions entières dans un domaine général.

Lorsqu'on se propose d'étudier parallèlement aux fonctions entières les *systèmes de fonctions entières* et lorsqu'on cherche à les décomposer en systèmes irréductibles, on s'aperçoit bientôt qu'il est commode de généraliser, d'une façon déterminée, la notion de divisibilité. Cette généralisation est l'objet du troisième Chapitre, tandis que la décomposition des systèmes de fonctions est elle-même abordée, dans toute sa généralité, dans le quatrième Chapitre du Mémoire.

Après avoir étendu la théorie du résultant à la recherche des résultants pris suivant un module déterminé, on montre aussi dans le troisième Chapitre comment, à l'aide des systèmes de modules, on peut, sans faire usage des nombres et fonctions algébriques, décomposer une fonction entière dans un domaine général de rationalité. En comparant cette recherche à celle qui termine le second Chapitre, on voit bien nettement l'avantage des méthodes purement algébriques sur celles qui ne le sont pas.

Dans le quatrième Chapitre, le cas général de la décomposition d'un système formé par un nombre quelconque m de fonctions d'un nombre quelconque μ de variables est précédé du cas particulier de la décomposition des systèmes formés d'abord de deux et ensuite d'un nombre quelconque de fonctions de deux variables seulement.

Enfin, dans un dernier Chapitre, les recherches précédentes sont appliquées à la *théorie générale de l'élimination*, c'est-à-dire à l'étude d'un système formé par un nombre quelconque m d'équations entre un nombre également quelconque μ d'inconnues : on y trouve nettement établie la notion arithmétique de *rang* d'un système. Cette notion est de la plus haute importance et la dénomination de M. Molk a été adoptée par M. Kronecker qui a substitué le mot *rang* au mot *Stufe* dans ses Communications à l'Académie des Sciences de Berlin. Cette notion de rang d'un système est déjà donnée géométriquement au début du troisième Chapitre, pages 51 et 52 du Mémoire.

Bois-Reymond (*P. du*). — Sur le concept de longueur d'une courbe. (109-110).

Remarques relatives aux Mémoires de M. Scheeffer insérés dans le tome précédent des *Acta*.

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (110-228).

C'est la traduction, par M. l'abbé Pantonnier, d'un Mémoire qui a paru en allemand, dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin et qui a été analysé à ce titre dans le *Bulletin* (t. XI_2, p. 236).

Runge. — Sur la théorie des fonctions analytiques uniformes. (228-244).

L'auteur s'occupe d'une question que M. Mittag-Leffler se trouvait avoir résolue dans son Mémoire classique par une voie tout autre. Les ingénieuses recherches de M. Runge ont d'ailleurs été entièrement indépendantes de celles du savant directeur des *Acta*.

Dans la première Partie, il s'agit de montrer, d'une part, que le domaine de validité d'une fonction (*Gültigkeitsbereich*), c'est-à-dire l'ensemble des points où la fonction est régulière et de ses pôles, n'est soumis à aucune autre condition que d'être connexe et, d'autre part, que toute fonction analytique uniforme peut être représentée par une série unique dont les termes sont des fonctions uniformes de la variable, valable dans tout le domaine de validité. Cette série s'obtient en considérant l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

et en remarquant que la définition même de cette intégrale comme limite d'une somme fournit une fonction rationnelle qui peut en approcher autant qu'on veut.

Dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Runge montre qu'une série dont les termes sont des fonctions rationnelles peut représenter une fonction analytique avec un domaine de validité prescrit à l'avance, à supposer seulement que ce domaine soit connexe.

Runge. — Sur la théorie des fonctions analytiques. (245-248).

Exemple d'une série dont les termes sont des séries procédant suivant les

puissances entières d'une variable, avec un même domaine de convergence, *qui ne converge pas uniformément*, et qui cependant représente une fonction monogène. Ainsi la condition établie par M. Weierstrass comme suffisante (*Bulletin*, t. V_1, p. 157) n'est pas nécessaire.

Kowalevski (*S.*). — Sur la propagation de la lumière dans les milieux cristallisés. (249-304).

Dans ses *Leçons sur l'élasticité*, Lamé a ramené la question de la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé à l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles que voici :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial y} - b^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial z} - c^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = b^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)}{\partial x} - a^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial y}. \end{cases}$$

t représente le temps; x, y, z les coordonnées d'un point du milieu vibrant, ξ, η, ζ les projections de l'écart de ce point de sa position d'équilibre; a, b, c les constantes optiques du cristal.

Mme Kowalevski commence par rappeler les recherches de Lamé relatives à ces équations; ces recherches, si profondes qu'elles soient, n'ont pas abouti; et la solution analytique à laquelle Lamé était parvenu correspond à un mouvement qui est physiquement impossible; en sorte que Lamé avait été amené à introduire des hypothèses physiques sur la valeur et sur les conséquences desquelles il n'a d'ailleurs pas insisté.

En 1881, M. Weierstrass avait communiqué à Mme Kowalevski des résultats d'une haute importance théorique, car ils aboutissent à l'intégration *générale* des équations (1); ces résultats, Mme Kowalevski les développe avec toute l'ampleur désirable (p. 254-279); mais ces recherches n'avaient pas eu d'application et il était réservé à Mme Kowalevski d'en déduire la solution complète du problème physique. Elle parvient en effet, dans la dernière partie de son Mémoire, à un système de formules pour ξ, η, ζ, composées avec des intégrales triples relatives à tous les points de l'espace limités par une nappe (extérieure ou intérieure) d'une surface d'ondes correspondant à une valeur quelconque de t, lesquelles satisfont aux équations (1) et, pour $t = 0$, se réduisent, ainsi que leurs premières dérivées par rapport à t, à des fonctions données de x, y, z, qui doivent toutefois être choisies en accord avec l'équation

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.$$

Ces formules générales définissent un mouvement physiquement possible, sans le secours d'hypothèses étrangères.

Runge. — Développement des racines d'une équation algébrique

en sommes de fonctions rationnelles des coefficients. (305-318).

Daniel Bernoulli a montré que le rapport

$$\frac{S_{n+1}}{S_n},$$

où S_n désigne la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines d'une équation algébrique, a pour limite la racine de plus petit module, s'il n'en existe qu'une seule. M. Runge fait la remarque extrêmement simple que voici : si x_1, x_2, ..., x_n sont les racines d'une équation et si x est un point fixe du plan, assujetti à être plus près de la racine x que des autres, la quantité

$$R_\lambda(x) = \frac{\Sigma(x_i - x)^{-\lambda}}{\Sigma(x_i - x)^{-\lambda-1}},$$

quand le nombre entier positif λ augmente indéfiniment, tend vers $x_1 - x$; en sorte que la série

$$x + R_1 + (R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + \ldots,$$

dont les termes sont manifestement des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation, converge vers x_1. M. Runge étudie d'une façon approfondie la limitation du domaine de convergence d'une telle série lorsqu'on regarde comme variables (indépendantes ou non) les coefficients de l'équation; ce domaine est limité par les parties d'une configuration algébrique d'une dimension moindre d'une unité que le domaine de variabilité des coefficients. Si, par exemple, ceux-ci sont des fonctions rationnelles d'une variable imaginaire, les régions de convergence seront limitées par des portions de courbes algébriques et le fait de traverser une de ces portions de courbes correspondra à une substitution effectuée sur les racines x_1, x_2, ..., x_n.

Stieltjes. — Un théorème d'Algèbre. (319-320).

Si

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & \qquad & A, & B, & C, \\ a', & b', & c', & & A', & B', & C', \\ a'', & b'', & c'', & & A'', & B'', & C'' \end{matrix}$$

sont les coefficients de deux substitutions orthogonales à déterminant $+1$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A + a & B + b & C + c \\ A' + a' & B' + b' & C' + c' \\ A'' + a'' & B'' + b'' & C'' + c'' \end{vmatrix}$$

ne peut s'annuler sans que ses mineurs du premier degré s'annulent aussi.

Le théorème analogue est-il vrai dans le cas de deux substitutions orthogonales d'ordre quelconque?

Stieltjes. — Sur certains polynômes qui vérifient une équation

différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé.

Heine (*Kugelfunctionen*, 2e édition, t. I, p. 472, etc.) a montré que, A et B étant deux polynômes donnés quelconques en x, le premier de degré $p+1$, le second de degré $p-1$ au plus, il existe

$$(n, p) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p-1}$$

déterminations du polynôme C, telles que l'équation

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + 2B\frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

admette comme intégrale un polynôme en x de degré n.

M. Stieltjes établit les propositions suivantes :

Lorsque les racines $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont toutes réelles, inégales, et que les résidus de la fraction rationnelle $\frac{B}{A}$ relatifs à ces racines sont tous positifs, les (n, p) déterminations du polynôme C sont toutes réelles, ainsi que les polynômes correspondants y du degré n. Si y_1 est un de ces polynômes, les racines de l'équation $y_1 = 0$ sont réelles, inégales et distribuées dans les p intervalles des racines de $A = 0$.

Il est clair qu'on peut distribuer n quantités dans p intervalles de (n, p) manières; or il arrive que les racines des polynômes y présentent en effet toutes ces distributions, en sorte qu'un tel polynôme est parfaitement caractérisé par la distribution de ses n racines dans les p intervalles des racines $a_0, a_1, \ldots, a_p$ des racines de l'équation $A = 0$.

Stern. — Remarque sur les sommes de diviseurs. (327-328).

Cette remarque se rapporte à la Communication de M. Zeller (*Acta*, t. IV, p. 415).

Weber. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (329-416).

Cet important Mémoire constitue un exposé d'ensemble, très condensé et très clair, de la théorie de la transformation, qui aboutit aux applications à la théorie des nombres. L'auteur n'a pas craint de reprendre les choses au début; c'est-à-dire à la définition des fonctions Θ de Jacobi, considérées comme des séries. M. Weber rejette en effet de son exposition les démonstrations qui reposent sur l'emploi des produits infinis, malgré les simplifications qu'introduit parfois la considération de ces produits.

Il fait observer à cet égard que les démonstrations fondées sur les séries peuvent s'étendre aux fonctions Θ à plusieurs variables, et qu'il n'en peut être de même de celles qui reposent sur les produits infinis.

Voici les principales subdivisions de son Mémoire.

Première Section.

1. Les fonctions Θ du $m^{ième}$ ordre.
2-3. Les fonctions Θ du premier et du second ordre.

4. Les fonctions $\mathfrak{S}_{g,h}(nu, n\omega)$ et la fonction $\eta(\omega)$.
5. Transformation linéaire.

Deuxième Section.

6. Les fonctions elliptiques.
7. Le module et l'invariant (absolu) regardés comme variables indépendantes.

Troisième Section.

8. Le théorème d'addition.
9. Multiplication des fonctions elliptiques.
10. Division des fonctions elliptiques par 2 et les puissances de 2.
11. Division par un nombre impair.
12. Division des périodes.
13. Le groupe de Galois et les facteurs irréductibles de l'équation de division.
14. Retour à l'équation de division et aux équations de transformation.
15. Équations de transformation particulières.
16. Deuxième représentation des racines des équations de transformation.
17. L'équation des invariants.

Quatrième Section.

18. La multiplication complexe.
19. Sur les relations entre les invariants de classes des différents ordres.
20. Lemmes de la théorie des fonctions algébriques (Dedekind).
21. Partage de l'équation de classes en facteurs.

J. T.

ANNALES DES MINES (1).

8e série. — Tome IX; 1er semestre 1886.

Thiré (A.). — Profil des cames des bocards. (282-300, 1 planche).

Le profil habituellement adopté pour les cames est celui d'une développante de cercle. Ce profil, auquel on avait autrefois donné la forme circulaire, paraît avoir été recommandé pour la première fois par Bélidor. C'est du reste ce que l'on peut conclure d'un Mémoire de Lefroy sur les machines à pilons, publié en 1803 dans le *Journal des Mines*.

Cette règle, reproduite dans les principaux Ouvrages de Mécanique appliquée, devint rapidement classique, et le tracé en développante est aujourd'hui indiqué partout pour le profil des cames des bocards (Poncelet, Morin, Bour, Resal, Callon-Boutan, Ad. Lesoinne, Rittinger, Gaetzchmann, etc.).

L'auteur de ce Mémoire montre que ce tracé convient aux pilons avec fente en fenêtre pour laisser passer la came, et qu'il est très défectueux pour les

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 317, II_2, 105, IV_2, 204, VII_2, 83, VIII_2, 68, XI_2, 122.

pilons ordinaires munis d'un mentonnet en saillie. Il serait, pour ces derniers, très avantageusement remplacé par le profil en arc de cercle, dont le fonctionnement est plus parfait et le tracé plus facile.

Enfin la développante de cercle convient aux pilons usités en Californie, et dans lesquels la came, placée de côté par rapport à la tige, saisit la base du manchon monté sur la tige.

Villié (*E.*). — Note sur la délimitation théorique de la zone des affaissements dus aux travaux de mines. (301-312, 1 planche).

Une couche souterraine repose sur un massif sur lequel elle surplombe; elle n'est soumise qu'à l'action de son poids et de celui des couches qu'elle supporte, ce poids étant d'ailleurs suffisant pour amener sa rupture, quelle sera la direction de la ligne de rupture?

Le poids qui produit la rupture étant maximum quand le plan de rupture passe par le point d'appui de la couche, c'est par ce point que passera le plan qu'il s'agit de déterminer.

Cela posé, il y a lieu de traiter la question dans deux cas extrêmes :

1° La couche est assez peu épaisse pour que, quelle que soit la direction du plan de rupture de cette couche, on puisse regarder la force qui produit la rupture comme constante de grandeur et de position.

2° La couche n'est surmontée d'aucune autre et se rompt, par conséquent, sous l'action de son seul poids.

Il est juste d'observer, avec l'auteur, que les problèmes qui précèdent ne sont pas la reproduction rigoureuse de ce qui se passe en pratique.

Resal (*H.*). — Sur les conditions de résistance de quelques éléments des portières de l'écluse de la Monnaie. (339-345, 1 planche).

Ces portières, qui sont en fer, ont été construites en 1852 et 1853 dans les ateliers de M. Cavé, mais il ne paraît pas que l'on ait publié à ce sujet une étude théorique sur les équarrissages des différentes pièces qui constituent un vantail.

La présente Notice a pour objet de combler cette lacune, au moins en ce qui concerne la déformation et la résistance des entretoises horizontales.

Keller (*O.*). — Conditions théoriques de résistance des fonds plats circulaires des appareils à vapeur. (346-363, 1 planche).

L'explosion d'un récipient de vapeur, survenue en 1885 dans une fabrique de papier à Fontenay (Loiret), tout en n'occasionnant que des dégâts matériels, a présenté des particularités dignes d'attention, au point de vue de la résistance des plateaux en fonte formant les deux extrémités du corps cylindrique.

L'étude des modifications de l'élasticité exige l'emploi des plus hautes spéculations des théories physiques et mathématiques. Il suffit de rappeler que Lamé, Clapeyron, Poisson, Cauchy, Clebsch ont appliqué leurs méditations à ce difficile problème. En particulier, dans une de ses additions aux Leçons de Clebsch, M. Barré de Saint-Venant a établi l'équation de la flèche f que prend

une plaque circulaire de rayon a, d'épaisseur quelconque 2ε, uniformément sollicitée par une charge q, dans les deux cas de la plaque posée par son bord sur un appui circulaire et de la plaque encastrée. Ces deux formules sont, respectivement,

$$f = \frac{1}{G}\,\frac{189\,qa^2}{5,120\,\pi\varepsilon^3}\left(1 + \frac{11}{7}\,\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right),$$

$$f' = \frac{1}{G}\,\frac{9\,qa^2}{1,024\,\pi\varepsilon^3}\left(1 + \frac{33}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right),$$

G désignant le coefficient d'élasticité de glissement ou de torsion.

Ces expressions des flèches centrales, si l'on y efface le terme en $\frac{\varepsilon^2}{a^2}$, sont exactement conformes, sauf la différence de notations, à celles que Poisson a trouvées en 1828, en les déduisant de l'intégration de la célèbre équation de Lagrange, aux dérivées partielles du quatrième ordre, relative à l'équilibre des plaques minces.

Les conditions de la pratique se trouvant ici justifier l'emploi de ces formules, on en déduit que la flèche f' (pièce encastrée) est $\frac{5}{21}$, soit environ quatre fois plus petite, sous une pression donnée, que la flèche f (pièce posée).

En remarquant l'analogie de ces formules avec celles de la résistance des barres prismatiques, on est amené, pour les charges qui déterminent la rupture, aux évaluations suivantes :

$$R = \frac{567}{6,400}\,\frac{Epa^2}{G\varepsilon^2},$$

$$R' = \frac{9}{128}\,\frac{Epa^2}{G\varepsilon^2},$$

E désignant le module d'élasticité, p la pression de vapeur par unité de surface.

Bien qu'il n'existe pas de résultats d'expériences sur la résistance des plaques de fonte, les formules précédentes font voir un avantage marqué en faveur des plaques encastrées. Il sera bon que les constructeurs profitent de cette indication, mais il conviendra d'employer aussi des dispositions spéciales pour augmenter la résistance du profil de ces plaques.

Tome X; 2e semestre 1886.

Ce volume ne renferme aucun Mémoire ayant trait aux Mathématiques

Tome XI; 1er semestre 1887.

Alby. — Note sur des expériences de congélation des terrains. (56-86, 1 planche, 8 tableaux, avec figures).

Ces expériences ont été exécutées en octobre 1885, dans les ateliers de MM. Rouart frères. Elles ont porté sur deux points distincts : le premier est la formation de la couche de glace autour des tubes à circulation de liquide incongelable; le second la résistance des terrains congelés.

Les dispositions et les conditions de ces expériences ont été inspirées de la

2e Part

description de la méthode de fonçage des puits de mines en terrains aquifères, imaginée par M. Pœtsch, et décrite dans un précédent travail de M. Lebreton (voir *Bulletin*, XI_2, 123).

Entre autres résultats, ces expériences ont montré que le solide congelé prend la forme ellipsoïdale, ce qui est d'accord avec les conclusions de M. Potier au sujet des surfaces isothermes autour d'une source de chaleur rectiligne dans le cas de l'équilibre mobile de température.

Thiré (*A*.). — Sur la théorie du planimètre d'Amsler. (121-131, 1 planche).

Les *Annales des Mines* ont déjà donné (6e série, XIX, 1871; 8e série, I, 1882, et III, 1883) la description et l'usage du planimètre d'Amsler et ont publié diverses théories de cet ingénieux instrument. L'auteur s'est proposé d'en présenter ici une théorie, basée sur une méthode assez simple, et qui conduit successivement à quelques propriétés géométriques du planimètre.

Pelletan. — Mémoire sur l'extension des plaques élastiques. (228-239, 1 planche).

Simplifications à la méthode de Clebsch, exposée dans l'Ouvrage de ce géomètre, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduction de M. de Saint-Venant, 1885.

Tome XII; 2e semestre 1887.

Marié (*G*.). — Les régulateurs de vitesse. (193-266, 2 planches).

En 1878, l'auteur avait déjà publié une étude théorique sur les régulateurs. Il avait montré que les régulateurs isochrones, qui rendent de grands services dans la construction des petits moteurs donnant le mouvement aux appareils d'Astronomie, ne trouvaient pas leur application dans les machines à vapeur. Il avait en outre établi les principes sur lesquels doit reposer la construction des régulateurs de vitesse, de pression, de température, etc. Mais il était nécessaire de compléter cette étude théorique par l'examen détaillé de toutes les précautions à prendre pour le montage des régulateurs, des valves, etc., d'après les indications de la pratique; c'est ce qui fait l'objet du présent Mémoire.

Tome XIII; 1er semestre 1888.

Le Chatelier (*H*.). — Recherches expérimentales et théoriques sur les équilibres chimiques. (157-382, 15 figures).

La notion de la réversibilité a vivement contribué à étendre la portée philosophique de l'étude des phénomènes physiques. Par exemple, un corps flottant sur un liquide prend un état d'équilibre qui ne dépend pas des états antérieurs par lesquels ce système est passé. Les facteurs de cet équilibre sont le poids du corps flottant et la densité du liquide. Si l'un de ces facteurs, le poids par exemple, est modifié, une déformation se produit dans le système; mais, si l'on

ramène le poids à sa valeur primitive, le corps flottant reviendra à sa position primitive. La déformation du système est dite *réversible.*

De même, la dilatation d'une barre de métal sous l'influence de la température représente un état d'équilibre réversible.

Les réactions chimiques donnent lieu également à des phénomènes d'équilibre; elles peuvent s'arrêter avant d'être complètes dans un état stable indépendant des états antérieurs du système, et les déformations du système en équilibre sont réversibles. La dissociation du carbonate de chaux offre l'exemple d'un système dont les déformations sont réversibles.

Après avoir montré que les phénomènes chimiques présentent, aussi bien que les phénomènes physiques, les mêmes caractères de réversibilité, la détermination des facteurs de l'équilibre chimique est le premier point à aborder.

Si l'on prend pour terme de comparaison les systèmes purement mécaniques, l'étude de ces derniers peut se diviser en trois parties :

Cinématique,
Dynamique,
Résistances passives,

que l'on retrouve identiques dans les systèmes chimiques.

Après avoir établi le parallélisme de ces subdivisions avec les subdivisions analogues présentées par les réactions chimiques, l'auteur s'est donné pour but de prouver que l'étude du mouvement, de la déformation d'un système chimique peut être ramenée à l'étude de l'équilibre. Tout système hors d'équilibre se déplace pour arriver à une position d'équilibre stable.

A chaque réaction dont un système chimique peut être le siège, correspond un état d'équilibre particulier.

La réversibilité, caractère nécessaire de l'équilibre, est souvent masquée par les résistances passives qui s'opposent à toute déformation dans une direction quelconque. On peut, dans certains cas, tourner cette difficulté, en faisant intervenir une action de présence qui rende possibles les transformations chimiques du système. Les actions de présence n'ont aucune influence sur l'état d'équilibre d'un système.

Les conditions qui influent sur l'état d'équilibre d'un système, c'est-à-dire les facteurs de l'équilibre, sont : comme facteurs externes, la pression P, la température T et la force électromotrice E ; comme facteurs internes, l'état chimique, l'état physique et la condensation C des corps en présence.

Le sens de la déformation d'un système produit par la variation d'un des facteurs de l'équilibre est défini par la loi suivante de réciprocité, que l'auteur a proposé d'appeler *loi d'opposition de l'action à la réaction :* Toute variation d'un facteur de l'équilibre amène une transformation du système qui tend à faire éprouver au facteur considéré une variation de signe contraire à celle qu'on lui a communiquée.

La recherche mathématique de la fonction d'équilibre présente un grand intérêt pour les physiciens et les chimistes.

En premier lieu, la fonction d'équilibre est une fonction continue, ainsi que l'a prévu M. Vicaire et comme cela a été démontré par les expériences de l'auteur, en collaboration avec M. Mallard, ce qui a permis de généraliser des résultats obtenus par Bunsen.

Pour déterminer la forme précise de l'équation d'équilibre, on tire un grand secours des principes de la Thermodynamique; mais, à cause de leur généra-

lité, il n'y a encore que deux principes dont on ait fait une application rigoureuse à la Chimie : la formule des tensions de vapeur établie par Clapeyron et complétée par Clausius

$$\frac{L}{T}\,dT + A(V - V')\,dP = 0,$$

et la formule des piles établie par Helmholtz

$$\frac{L}{T}\,dT + A'I\,dE = 0.$$

On en déduit, pour la fonction d'équilibre, une relation de la forme

$$\alpha\frac{dT}{T} + \beta\frac{dE}{E} + \gamma\frac{dP}{P} = 0,$$

α, β, γ représentant les quantités d'énergie gagnées par le système sous forme de chaleur, électricité et travail, par le fait d'une déformation virtuelle compatible avec les liaisons, c'est-à-dire définie par l'équation chimique de la réaction considérée et effectuée à pression, force électromotrice et température constantes.

On remarquera l'analogie, et mieux encore l'identité absolue de cette formule avec celle que donne, en Mécanique, le théorème du travail virtuel appliqué à un système déformable dans des conditions analogues à celles qui sont étudiées ici.

Le Mémoire est terminé par l'exposé de considérations théoriques, parmi lesquelles on signalera les conclusions tirées de l'entropie S de M. Clausius et de la fonction caractéristique H' de M. Massieu, définies par les relations

$$S = \int\frac{dQ}{T}, \qquad H' = ST - U - APV - A'EI,$$

le principe de Clausius et le principe de Gibbs (voir *Bulletin*, XI_2, 1re Partie, p. 122 et 159. Mémoire de M. Duhem).

Signalons enfin, entre autres résultats, l'équation caractéristique des courbes de solubilité

$$i\frac{dC}{C} - \frac{1}{AR}\,\frac{L\,dT}{T^2} = 0,$$

dont la discussion rend compte des formes singulières et restées inexpliquées de ces courbes.

Dans ces relations, A désigne l'équivalent calorifique du travail ou $\frac{1}{425}$, R la quantité $\frac{PV}{T}$, U l'énergie interne, L la chaleur latente de réaction à pression et température constantes, C la condensation, i une constante voisine de 1, L' la chaleur latente de réaction à volume constant.

Tome XIV ; 2e semestre 1888.

Ricour. — Les prix de revient sur les chemins de fer. (131-161, 2 planches).

Cette étude est divisée en deux Parties, ayant pour objet :

1° Les relations entre le prix de revient de l'unité de trafic, la fréquentation et la déclivité;

2° La comparaison des prix de revient de la traction de divers réseaux, et l'influence de la rampe caractéristique.

Pour ces diverses notions, il y a lieu de rappeler les précédents exposés de l'auteur, soit dans le même Recueil (2e semestre 1887), soit dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (même semestre) où s'est engagée une intéressante discussion avec M. Noblemaire.

Rateau (A.). — Étude sur les appareils Piccard pour la vaporisation des dissolutions salées et sur l'emploi du travail pour obtenir de la chaleur. (377-463, 5 planches).

Le procédé d'évaporation économique par compression de la vapeur a été indiqué depuis assez longtemps déjà par Péclet (1860) qui en attribue la découverte à Pelletan avant 1840. En 1876, M. Piccard imagina de chauffer la saumure sous pression, de façon qu'elle ne s'évaporât pas, puis de la porter brusquement dans une enceinte à pression plus basse, où, l'ébullition se produisant instantanément et uniformément dans toute la masse, le sel se formerait au sein même du liquide et se déposerait ensuite au fond du vase sans venir s'attacher aux parois.

Lorsque la dissolution saline est en ébullition, le sel se forme à l'état de tout petits cubes : c'est du sel fin ; tandis que, si la dissolution s'évapore tranquillement, en présence d'une atmosphère gazeuse, comme dans les poêles ordinaires des salines à feu, le sel se forme à la surface du liquide et s'y maintient par capillarité jusqu'à ce que son poids soit devenu suffisant pour l'entraîner au fond; il se présente alors à l'état de trémies : c'est du sel gros. De là résultent les deux sortes d'appareils Piccard, à sel fin et à sel gros.

Le présent Mémoire a pour objet l'étude des conditions d'établissement et de fonctionnement de ces deux sortes d'appareils.

Resal (H.). — Sur la résistance des fonds plats circulaires des appareils à vapeur. (530-536).

Le calcul de l'épaisseur des fonds plats circulaires, quand il est basé exclusivement sur la théorie mathématique de l'élasticité, présente des difficultés telles que jusqu'ici elles n'ont pu être surmontées.

Aussi Lamé, qui s'est beaucoup occupé de la question, s'est-il trouvé réduit à avoir recours à une induction théorique qui l'a conduit à la formule

$$e' = \sqrt{Re},$$

où e', R représentent l'épaisseur et le rayon du fond et e l'épaisseur du corps cylindrique.

L'induction de Lamé, quoique très ingénieuse, soulève une objection, en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir le mode d'ajustage du fond et du corps cylindrique.

L'auteur s'est proposé, dans cette Note, de traiter la question en poussant

aussi loin que possible la théorie mathématique de l'élasticité, puis, à l'exemple de Saint-Venant, et en vue d'arriver à une solution, en faisant intervenir les hypothèses de la résistance des matériaux.

Il se trouve ainsi amené à la formule

$$e' = 0{,}791\sqrt{Re}.$$

H. B.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (1).

Tome XV, 1887.

Callandreau. — Sur le développement des fonctions en série par la formule de Maclaurin, dans le cas d'une variable réelle. (23-33).

Si, dans un intervalle fini, pour $0 \leqq x \leqq a$ la fonction $f(x)$ est représentée par la série de Maclaurin, elle continuera à être représentée par la même série tant que les dérivées successives $f^{(n)}(x)$ seront continues et que la série de Maclaurin sera convergente.

Demartres. — Sur la courbure totale des surfaces. (34-35).

Si l'on considère sur une surface deux déplacements infiniment petits effectués à partir d'un même point suivant deux directions conjuguées, le produit des deux *flexions* correspondantes par rapport à un même plan de référence est égal et de signe contraire au produit des rayons de courbure principaux.

Voici comment M. Demartres définit la *flexion*. Si sur une surface on parcourt un élément linéaire ds, on s'éloigne d'une quantité dh d'un plan de référence faisant l'angle θ avec le plan tangent; en même temps la trace du plan tangent sur le plan de référence tourne de $d\varphi$; la flexion de l'élément ds est le rapport

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{dh}{d\varphi}.$$

Jamet. — Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre. (35-38).

Salmon a prouvé que le rapport anharmonique des quatre tangentes qu'on peut mener à une courbe du troisième ordre par un de ses points est constant. M. Jamet rattache ce fait à la constance du rapport anharmonique de quatre solutions d'une équation de Riccati.

Laisant. — Des rayons de courbure dans les transformations isogonales. (39-41).

(1) Voir *Bulletin*, XII$_2$, p. 42.

La transformation définie par la relation $Y = \varphi(X)$ ou plus généralement

$$Y = f(X) + i f_1(X),$$

les fonctions f, f_1 étant des fonctions analytiques, conserve, comme on sait, les angles. Si l'on pose

$$\varphi'(X) = a e^{\alpha}, \qquad \frac{\varphi''(X)}{\varphi'(X)} = b e^{\beta},$$

le rayon de courbure de la courbe (Y) est lié à celui de la courbe (X) par la relation

$$\frac{a}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + b \sin(\beta + \theta),$$

θ désignant l'inclinaison de la tangente à la courbe (X).

De là on déduit, entre autres conséquences, que, si les centres de courbure d'une série de courbes passant par un point (X) sont distribués sur une conique, les centres de courbure des courbes transformées passant par le point Y sont aussi distribués sur une conique.

Laisant. — Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations. (42-44).

Neu. — Système articulé pour tracer la courbe symétrique par rapport à un axe d'une courbe donnée. (44-45).

Perrin. — Sur le système de quatre formes binaires simultanées (deux linéaires et deux quadratiques). (45-61).

L'objet de ce travail est d'établir d'une manière complète les relations ou *syzygies* qui existent entre les invariants du système de quatre formes binaires simultanées, savoir deux linéaires et deux quadratiques. Ce système possède 13 invariants distincts, reliés par 20 syzygies indépendantes, dont chacune peut être transportée dans le domaine ternaire.

Pellet. — Mémoire sur la théorie algébrique des équations. (61-103).

L'auteur établit, sans recourir à la théorie des substitutions, les propositions générales de la théorie des équations algébriques. Il applique ensuite sa méthode aux équations dont dépend la division du cercle en un nombre premier de parties égales, et à celles qui se ramènent par une transformation linéaire aux équations binômes.

Laisant. — Sur les transformations planes non isogonales. (103-106).

Goursat. — Note sur les intégrales pseudo-elliptiques. (106-120).

L'auteur établit d'abord par une méthode nouvelle un résultat déjà obtenu par M. Raffy :

« Soit $\left[t, \frac{Nt - M}{Lt - N}\right]$ une substitution de période 2 permutant deux à deux les racines de l'équation du quatrième degré $R(t) = 0$, et soit $F(t)$ une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement

$$F(t) + F\left(\frac{Nt - M}{Lt - N}\right) = 0;$$

l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique. »

M. Goursat montre ensuite que si S_1, S_2, S_3 sont les trois substitutions linéaires de période 2 qui permutent deux à deux les quatre racines de $R(t)$ et si $F(t)$ désigne une fonction rationnelle vérifiant l'identité

$$F(t) + F(S_1) + F(S_2) + F(S_3) = 0,$$

où $F(S)$ signifie $F\left(\frac{Nt - M}{Lt - N}\right)$, l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est encore pseudo-elliptique.

Si les quatre racines sont quelconques, il n'existe pas d'autres substitutions que les trois précédentes qui permutent ces racines. Mais, pour certaines formes spéciales de $R(t)$, il existe d'autres substitutions de cette espèce, auxquelles se rattachent des intégrales pseudo-elliptiques.

S'il existe une substitution (S) laissant invariable une des racines et permutant les trois autres circulairement, (S) sera nécessairement de période 3. Soit maintenant $F(t)$ vérifiant l'identité $F(S) = \alpha F(t)$, où $\alpha^3 = 1$; l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra s'exprimer en termes finis. A ce cas de réduction se rattache, entre autres, l'intégrale pseudo-elliptique de Legendre et Clausen

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2 + 8)\sqrt{t^3 - 1}}.$$

Dans le cas considéré, on peut ramener les quatre racines aux valeurs ∞, 1, α, α^2. Les substitutions linéaires qui permutent ces quatre racines forment un *groupe* de douze substitutions S_i isomorphes au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un tétraèdre régulier (Klein).

Si l'on prend une fonction rationnelle $F(t)$ satisfaisant aux deux relations

$$\sum_1^{12} F(S_i) = 0, \qquad \sum_1^{12} \frac{1}{\mu_i^2} F(S_i) = 0,$$

μ_i étant le multiplicateur correspondant à S_i, l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Il peut encore se faire qu'une substitution ayant pour points doubles deux des racines de R(t) permute les deux autres. A ces substitutions correspondent les types d'intégrales réductibles

$$\int t\,\varphi(t^2)\,\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}},\quad \int\left(t\mp\frac{i}{t}\right)\varphi\left(t\pm\frac{i}{t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}.$$

Les substitutions de période 4 ne fournissent pas d'intégrales pseudo-elliptiques nouvelles.

Anglin. — Théorème sur les déterminants. (120-129).

Demartres. — Sur un point de la théorie des surfaces. (129-133).

L'auteur établit diverses expressions de la *flexion* (*voir* plus haut la définition de cet élément) qui, pour un choix particulier du plan de référence, se réduit à la torsion géodésique, introduite par M. Bertrand dans la théorie des surfaces.

D'Ocagne. — Sur une source d'identités. (133-143).

Si l'on représente par $f(n)$ une fonction quelconque de l'entier n et que l'on pose

$$\begin{aligned} f_1(n) &= f(1) + f(2) + \ldots + f(n),\\ f_2(n) &= f_1(1) + f_1(2) + \ldots + f_1(n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f_k(n) &= f_{k-1}(1) + f_{k-1}(2) + \ldots + f_{k-1}(n), \end{aligned}$$

on a, pour exprimer $f_{k+1}(n)$ en fonction de $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, la formule

$$f_{k+1}(n) = C^k_{n+k-1} f(1) + C^k_{n+k} f(2) + \ldots + C^k_k f(n),$$

où C^ν_μ est le nombre des combinaisons de μ objets ν à ν.

Chaque fois que, pour une fonction $f(n)$, on pourra, par un autre procédé, calculer $f_{k+1}(n)$, cette formule donnera une identité. L'auteur fait connaître un grand nombre de ces identités. Prenant, par exemple, $f(n) = n = C^1_n$, il obtient

$$C^{k+2}_{n+k+1} = C^k_{n+k-1} + 2\,C^k_{n+k-2} + \ldots + n\,C^k_k.$$

D'Ocagne. — Intégration d'une suite récurrente qui se présente dans une question de probabilité. (143-144).

Étant donnés k événements également probables et p épreuves consécutives, quelle est la probabilité X(p) qu'un événement désigné se produise au moins deux fois de suite dans l'ensemble des p épreuves?

M. Weill, qui a posé ce problème, a montré que X(p) est donné par la formule récurrente

$$X(p) = \frac{k-1}{k}X(p-1) + \frac{k-1}{k^2}X(p-2) + \frac{1}{k^2}.$$

M. d'Ocagne donne cette expression explicite de $X(p)$

$$X(p) = \frac{1}{k^2} \sum_{\mu=0}^{\mu=E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \left[\left(\frac{k-1}{k^2}\right)^k \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2(\mu+1)} C_{\mu+\lambda}^{\mu} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\lambda} \right].$$

Collignon. — Une méthode graphique de quadrature. (145-146).

L'auteur applique à l'évaluation des aires le procédé connu de construction du centre de gravité d'un système de points; il détermine ainsi l'ordonnée moyenne qui, multipliée par la base du trapèze mixtiligne, fait connaître l'aire cherchée.

Fouret. — Remarque sur certains déterminants numériques. (146-147).

Picard. — Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables. (148-152).

M. Picard a montré que les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des cinq quantités 0, 1, x, y, ∞, satisfont à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes indépendantes.

Soient ω_1, ω_2, ω_3 ces trois solutions; les équations

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u, v quand $\lambda + b_1 - 1$ et les expressions analogues, ainsi que $2 - \lambda - b_1 - b_2$ et ses analogues, sont les inverses de nombres entiers.

L'auteur a fait voir (*Annales de l'École Normale*, 1885) que le cas de

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{3}{5}$$

donnait le premier exemple d'un groupe hyperfuchsien dans lequel le domaine ou polyèdre fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite.

Deux autres exemples du même fait sont fournis par les systèmes

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{5}{8}, \qquad \lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{5}{9}.$$

Dans un troisième exemple,

$$\lambda = \mu = b_1 = \frac{3}{4}, \qquad b_2 = \frac{1}{4},$$

le polyèdre fondamental a un certain nombre de points communs avec la surface de l'hypersphère.

Dans le Mémoire cité, M. Picard a établi qu'à tout système S correspondant à une intégrale hypergéométrique on peut associer une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, qui ne change pas lorsqu'on effectue sur les variables les substitutions du *groupe* du système S. Parmi les cas qui donnent les fonctions hyperfuchsiennes, y en a-t-il dans lesquels le discriminant de la forme ternaire soit nul? M. Picard cite comme exemple le cas de

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{3}{4}.$$

Alors l'une des intégrales du système S se réduit à une constante et la forme en question à

$$\text{norme}\,[\,\omega_1 - (1 - i)\,\omega_2 + i\,\omega_3\,].$$

Les équations

$$\frac{\omega_1}{\omega_1 - (1 - i)\,\omega_1 + i\,\omega_2} = u, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1 - (1 - i)\,\omega_2 + i\,\omega_3} = v$$

donneront pour x et y (comme le montre la considération des substitutions fondamentales du groupe du système S) des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à chacune des variables u et v. Ainsi, dans ce cas de dégénérescence des fonctions hyperfuchsiennes, l'inversion des équations précédentes se ramène à des fonctions Θ d'une seule variable.

Picard. — Remarque sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables. (152-156).

Étant donné un groupe linéaire d'ordre fini à deux variables, dont une substitution quelconque sera représentée par

$$(x, y \mid \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$$

il existe une forme quadratique binaire à indéterminées conjuguées

$$\mathrm{A}\,xx_0 + \mathrm{B}\,xy_0 + \mathrm{B}_0\,x_0 y + \mathrm{C}\,yy_0$$

(A et C étant réels, B et B_0 ainsi que x, x_0 et y, y_0 étant respectivement des imaginaires conjuguées) qui se transforme en elle-même quand on effectue sur x et y les substitutions du groupe, en effectuant sur x_0, y_0 la substitution

$$(x_0, y_0 \mid \alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0, \gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0)$$

dont les coefficients sont respectivement conjugués de ceux de la première. La même remarque s'étend aux groupes d'ordre fini à trois variables. Il existe une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées qui se transforme en elle-même quand on effectue sur les variables les substitutions d'un groupe d'ordre fini. Il n'y a exception que pour un seul type de groupe, dans lequel se présente une circonstance plus simple encore.

D'Ocagne. — Sur une notation utile en Algèbre et en Analyse. (156-158).

Carvalho. — Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches. (158-166).

Carvalho. — Note sur les expressions obtenues par Duhamel et par Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes. (167-173).

Duhamel a obtenu pour l'expression du flux de chaleur dans les solides cristallisés une expression qui contient six coefficients. Lamé, partant d'une hypothèse plus générale, obtient pour ce flux une expression à neuf coefficients. M. Carvalho montre que ces neuf coefficients de Lamé doivent se réduire à six, comme dans la théorie de Duhamel, et que cette complication ne provient que d'une imperfection d'analyse.

Lerch. — Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale eulérienne de première espèce. (173-178).

De Presles. — Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques. (179-181).

Tissot. — Lettre à propos d'une Note insérée au *Bulletin*. (181).

André (D.). — Théorème sur les formes quadratiques. (188-192).

Étant donnée une forme quadratique à n variables, somme des carrés de p fonctions linéaires, si l'on considère d'une part le système des n équations linéaires et homogènes à n inconnues qu'on obtient en annulant les dérivées partielles de la forme, d'autre part le système des p équations obtenues en égalant à zéro les p formes linéaires, ces deux systèmes d'équations sont équivalents.

De ce théorème on peut tirer de nombreux corollaires dont voici les plus intéressants :

1° Le déterminant principal des dérivées d'une forme quadratique est d'un ordre égal au nombre des carrés indépendants dans lesquels on peut décomposer cette forme.

2° Pour qu'une forme quadratique F se réduise à la somme de p carrés, il faut et il suffit que, dans les dérivées partielles de F, le déterminant principal soit d'un ordre égal à p.

Anglin. — Sur le coefficient du terme général dans certains développements. (192-198).

Laisant. — Théorèmes de Trigonométrie. (198-202).

Poincaré. — Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie. (203-216).

Énoncer toutes les hypothèses nécessaires en géométrie à deux dimensions, et n'énoncer que celles-là, tel est le problème que se pose M. Poincaré.

On connait déjà trois géométries à deux dimensions : 1° La géométrie eucli

dienne, où la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits; 2° la géométrie de Riemann, où cette somme est plus grande que deux droits; 3° la géométrie de Lobatchevski, où elle est plus petite que deux droits. Ces trois géométries reposent sur les mêmes hypothèses fondamentales, si l'on excepte le postulatum d'Euclide, que la première admet et que les deux autres rejettent.

M. Poincaré généralise cette interprétation en considérant une surface du second ordre quelconque; il convient d'appeler *droites* les sections planes diamétrales de cette surface, et *circonférences* les sections planes non diamètrales. Après avoir défini ce que l'on doit entendre par l'angle de deux droites qui se coupent et par la longueur d'un segment de droite, il montre qu'il y a plusieurs sortes de géométries quadratiques, car il y a plusieurs sortes de quadriques :

1° Si la surface fondamentale est un ellipsoïde, la géométrie quadratique ne diffère pas de celle de Riemann.

2° Si la surface fondamentale est un hyperboloïde à deux nappes, la géométrie quadratique ne diffère pas de celle de Lobatchevski.

3° Si la surface fondamentale est un hyperboloïde à une nappe, on a une troisième géométrie quadratique, non encore signalée et qui comporte diverses conséquences dont la nature paradoxale a dû la dérober à l'attention des géomètres.

La géométrie d'Euclide correspond au cas limite où la surface fondamentale dégénère en paraboloïde elliptique.

Quelles sont donc les hypothèses communes à toutes les géométries quadratiques? Il y en a deux qui sont nécessaires :

A. Le plan a deux dimensions;

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Ces deux premières hypothèses laissent le choix entre les diverses géométries quadratiques et deux autres géométries qui se trouveront exclues par une troisième hypothèse :

C. Quand une figure plane ne quitte pas son plan et que deux de ses points restent immobiles, la figure tout entière reste immobile.

On n'a plus alors à choisir qu'entre les diverses géométries quadratiques. Toutes se trouveront écartées, à l'exception de la géométrie euclidienne, si l'on introduit le postulat d'Euclide.

Maintenant ces hypothèses sont-elles des faits expérimentaux, des jugements analytiques, ou des jugements synthétiques *a priori?* M. Poincaré répond négativement à ces trois questions. Il montre que la Géométrie n'est autre chose que l'étude d'un *groupe*, et en ce sens la vérité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchevski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe. Le groupe choisi dans la géométrie euclidienne est seulement plus commode.

De Presles. — Développement en produit des fonctions Θ et H de Jacobi, et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier. (216-222).

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY, který se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje Ed. Weyr, Ročník XI. V. Praze 1881-82 (¹).

Bolzano (*Bernard*). — Démonstration purement analytique de ce théorème, qu'il y a au moins une racine réelle d'une équation entre deux valeurs de la variable, auxquelles correspondent des résultats de signes contraires, par *B. Bolzano*. *Mémoires de la Société royale bohême des Sciences*, t. V, Prague, 1817. Traduit par le Dr *F.-J. Studnička*. (1-38).

C'est à l'occasion du centenaire de la naissance de *Bolzano* qu'a été faite la traduction de ce Mémoire, déjà analysé par M. *O. Stolz* dans son article *B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*. (*Math. Annalen*, t. XVIII, p. 255.)

En renvoyant, pour plus de détails, à cette analyse, je me borne à transcrire l'aperçu suivant, donné par *Bolzano*, p. 21 du Mémoire original, sur sa méthode de démonstration.

« La vérité qu'il s'agit de démontrer, à savoir qu'il y a toujours, entre deux valeurs α et β donnant des résultats de signes contraires, au moins une racine réelle, repose évidemment sur cette vérité *plus générale* que voici : Étant données deux fonctions continues de x, $f(x)$ et $\varphi(x)$, telles que, pour $x = \alpha$, on ait

$$f(\alpha) < \varphi(\alpha),$$

et, pour $x = \beta$,

$$f(\beta) > \varphi(\beta),$$

il existe toujours entre α et β une valeur de x telle qu'on ait

$$f(x) = \varphi(x).$$

En effet, comme $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, on a, d'après la loi de la continuité,

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i),$$

en supposant seulement i assez petit. *La propriété d'être plus petite* appartient donc à la fonction $f(\alpha + i)$ de i pour toutes les valeurs de i plus petites qu'une certaine valeur. Cependant cette propriété ne lui appartient pas pour *toutes* les valeurs de i, sans restriction; notamment pas pour un i qui serait égal à $\beta - \alpha$, puisque déjà $f(\beta) > \varphi(\beta)$. Or, le *théorème* suivant a lieu : « Toutes les fois qu'une certaine propriété M appartient à toutes les valeurs » d'une quantité variable i plus petites qu'une valeur donnée, sans appartenir à » *toutes* les valeurs de i, il existe toujours une valeur u qui est *la plus grande* » de celles dont on puisse dire que tous les i qui sont $< u$ possèdent la propriété

(¹) *Journal de Mathématiques et de Physique*, rédigé en vue spéciale des étudiants, par *Ed. Weyr*, année XI. Prague 1881-82. (Voir *Bulletin*, X, p. 40.)

» M. » Pour cette valeur de i on ne peut pas avoir

$$f(\alpha+u) < \varphi(\alpha+u);$$

car on aurait alors, d'après la loi de la continuité,

$$f(\alpha+u+\omega) < \varphi(\alpha+u+\omega),$$

en prenant seulement ω assez petit. Et par cela il ne serait pas vrai que u est le maximum des valeurs desquelles on peut dire que pour tout i qui est plus petit on ait

$$f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i);$$

puisque $u+\omega$ serait une valeur plus grande pour laquelle cette assertion aurait lieu. On ne peut pas avoir non plus

$$f(\alpha+u) > \varphi(\alpha+u);$$

puisqu'on aurait alors aussi

$$f(\alpha+u+\omega) > \varphi(\alpha+u+\omega),$$

ω étant pris assez petit; ce qui est contraire à ce qu'on a

$$f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$$

pour tous les i qui sont $< u$. Il faut donc qu'on ait

$$f(\alpha+u) = \varphi(\alpha+u);$$

c'est-à-dire qu'il existe entre α et β une valeur x, à savoir $\alpha+u$, telle que $f(x)$ soit égal à $\varphi(x)$. Il ne s'agit maintenant que de démontrer le *théorème* énoncé plus haut. On parvient à cette démonstration en faisant voir que les valeurs de i, telles que pour toutes valeurs plus petites la propriété M ait lieu, peuvent être rapprochées des valeurs de i pour lesquelles cette assertion ne vaut point autant qu'on le veut; d'où il suit, pour quiconque possède une idée exacte de la notion *de quantité*, que l'idée d'une quantité i maxima de toutes celles desquelles il y a lieu de dire qu'à toutes les valeurs plus petites convient la propriété M est l'idée d'une quantité réelle, c'est-à-dire d'une quantité *véritable.* »

Weyr (*Ed.*). — Sur un théorème sur les nombres. (39-47).

Il s'agit de la généralisation du théorème de Fermat, énoncée par *Serret* dans les *Annales de Terquem*, p. 261, 1855, à savoir que,

$$\nu = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_m^{n_m}$$

étant un nombre quelconque, où $q_1, q_2, \ldots, q_m$ désignent des nombres premiers distincts, le nombre

$$p^{\nu} - \Sigma p^{\frac{\nu}{q_i}} + \Sigma p^{\frac{\nu}{q_i q_j}} - \ldots + (-1)^m p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \cdots q_m}}$$

est divisible par ν, quel que soit le nombre p. L'auteur donne une démonstration de ce théorème, dont voici le principe :

1. a et ν étant deux entiers quelconques, prenons $M = a^\nu - 1$ pour module des congruences que nous allons considérer. Soit x un entier quelconque et formons la suite

$$x, \quad xa, \quad xa^2, \quad xa^3, \quad \ldots,$$

on aura évidemment

$$xa^\nu \equiv x, \qquad xa^{\nu+1} \equiv x^2, \qquad \ldots,$$

ce qui permet de ne considérer que les ν premiers termes de la suite. Si les nombres

$$(1) \qquad x, \quad xa, \quad xa^2, \quad \ldots, \quad xa^{\nu-1}$$

sont tous incongrus, l'auteur appelle x un nombre d'ordre ν, et il cherche combien il y a de nombres d'ordre ν, et incongrus mod M.

Pour cela, il remarque d'abord que le nombre cherché N est un multiple de ν. En effet x étant d'ordre ν, tous les nombres (1) sont d'ordre ν et distincts, mod M, puisque a et M sont premiers entre eux; de plus y étant un autre nombre d'ordre ν, tous les nombres

$$y, \quad ya, \quad ya^2, \quad \ldots, \quad ya^{\nu-1}$$

sont du même ordre, distincts entre eux et distincts des nombres (1), etc.

2. Le nombre x n'étant pas d'ordre ν, on aura

$$xa^g \equiv xa^h, \qquad g < h \leq \nu,$$

d'où

$$xa^{g+\nu-h} \equiv xa^\nu \equiv x.$$

Soit donc simplement xa^g le premier terme de la suite (1) qui est congru à x; nous dirons que x est d'ordre g, et l'on voit facilement que l'ordre d'un nombre quelconque divise ν.

3. Le nombre des solutions de la congruence $xa^g \equiv x$, où g désigne un diviseur du nombre ν, est $a^g - 1$. En effet, la congruence proposée

$$x(a^g - 1) \equiv 0 \pmod{M}$$

peut être remplacée par celle-ci

$$x \equiv 0 \pmod{M_1}, \qquad M_1 = \frac{a^\nu - 1}{a^g - 1},$$

ce qui donne les solutions

$$0, \quad M_1, \quad 2M_1, \quad \ldots, \quad (a^g - 2)M_1,$$

toutes distinctes, mod M.

4. Les nombres g et h étant deux diviseurs de ν, on trouve facilement que le nombre des solutions communes des congruences

$$xa^g \equiv x, \qquad xa^h \equiv x \pmod{M}$$

est $a^d - 1$, d étant le plus grand commun diviseur de g et h.

De même le nombre des solutions communes des congruences

$$xa^g \equiv x, \qquad xa^h \equiv x, \qquad xa^k \equiv x \qquad (\mathrm{mod}\, \mathrm{M}),$$

où g, h, k désignent des diviseurs de ν, est $a^d - 1$, d étant le plus grand commun diviseur des nombres g, h, k.

5. Soit maintenant $\nu = p^\alpha$, p étant un nombre premier. Les nombres 0, 1, 2, ..., $\mathrm{M} - 1$ ont pour ordre ou 1, ou p, ou p^2, ..., ou enfin ν.

Ceux qui ne sont pas d'ordre ν satisfont donc à la congruence

$$xa^{p^{\alpha-1}} \equiv x \qquad (\mathrm{mod}\, \mathrm{M})$$

qui possède $a^{p^{\alpha-1}} - 1$ solutions. Il y a donc $\mathrm{N} = a^\nu - a^{\frac{\nu}{p}}$ nombres d'ordre ν, ce qui fait voir que $a^\nu - a^{\frac{\nu}{p}}$ est divisible par ν, comme le dit le théorème en vue.

Soit, en second lieu, $\nu = p^\alpha q^\beta$, p et q étant des nombres premiers distincts. Soit g l'ordre d'un nombre x qui n'est pas d'ordre ν; on aura

$$g < \nu$$

et, comme g divise ν, g divisera l'un ou l'autre des membres $p^{\alpha-1}q^\beta$, $p^\alpha q^{\beta-1}$, ou tous les deux. Donc x satisfait à l'une ou à l'autre des congruences

$$xa^{\frac{\nu}{p}} \equiv x, \qquad xa^{\frac{\nu}{q}} \equiv x \qquad (\mathrm{mod}\, \mathrm{M}),$$

ou à toutes les deux. La première a $a^{\frac{\nu}{p}} - 1$ solutions, la seconde en a $a^{\frac{\nu}{q}} - 1$, et elles ont $a^d - 1$ solutions communes, d étant ici $\frac{\nu}{pq}$. Il y a donc

$$a^{\frac{\nu}{p}} - 1 + a^{\frac{\nu}{q}} - 1 - \left(a^{\frac{\nu}{pq}} - 1\right)$$

nombres x qui ne sont pas d'ordre ν, de sorte que des M nombres il en reste

$$\mathrm{N} = a^\nu - \left(a^{\frac{\nu}{p}} + a^{\frac{\nu}{q}}\right) + a^{\frac{\nu}{pq}}$$

qui sont d'ordre ν, ce qui montre que N est divisible par ν, etc.

6. L'auteur ajoute à cette démonstration la remarque suivante.

Le nombre 1 est d'ordre ν; car de $a^g \equiv a^h$, $g < h < \nu$, on conclurait

$$a^g(a^{h-g} - 1) \equiv 0;$$

d'où, puisque a et M sont premiers entre eux,

$$a^{h-g} - 1 \equiv 0,$$

chose impossible, le module M étant plus grand que $a^{h-g} - 1$. Le nombre a appartient donc à l'exposant ν relativement au module M, d'où l'on conclut (Serret, *Alg. sup.*, Sect. III, Chap. II) *que* ν *divise le nombre* $\varphi(a^\nu - 1)$, en

désignant, comme d'habitude, par $\varphi(M)$ le nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à M et non supérieurs à ce nombre.

Zdrahal (*Al.*). — Un théorème sur les coefficients binomiaux. (47-48).

C'est le théorème exprimé par l'égalité

$$\sum_{(\alpha,\,\beta,\,\ldots)} \binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\cdots = \binom{a+b+\ldots}{r}, \qquad \alpha+\beta+\ldots = r,$$

où a, b, ... et $r \leqq a+b+\ldots$ désignent des entiers donnés, et où α, β, ... prennent toutes les valeurs entières satisfaisant aux conditions $\alpha \leqq a$, $\beta \leqq b$, ...

Tilšer (*François*). — Sur les fondements de la Géométrie descriptive. (59-74, 155-179).

Notices historiques et critiques, avec des vues sur une réforme de l'enseignement de la Géométrie descriptive.

Šimerka (*Venceslas*). — La force de la conviction. (75-111).

L'auteur tâche de soumettre la conviction au calcul, en l'assimilant à la probabilité. Quoique ses vues un peu vagues ne sauraient pleinement justifier des calculs faits sans introduction d'une mesure précise, cette Note contient cependant un bon nombre d'aperçus intéressants qui témoignent de l'originalité du regretté auteur. On retrouve ce travail, augmenté d'un Chapitre sur les nombres complexes, dans les *Sitzungsberichte der philos. hist. Classe* de l'Académie de Vienne, 1883.

Řehořovský (*Venceslas*). — Sur la fonction génératrice de Borchardt. (111-120).

L'auteur démontre l'égalité $D = \Delta T$ de laquelle part Borchardt (*Verh. der k. preuss. Akademie*, 1855, p. 165) pour trouver la propriété connue de sa fonction génératrice, en suivant la voie indiquée par Borchardt lui-même.

Pánek (*Aug.*). — Un problème géométrique des probabilités. (121-122).

Weyr (*Ed.*). — Sur l'intégration des différentielles rationnelles. (125-137).

Exposition de la méthode donnée par M. *Hermite* dans son cours d'Analyse de l'École Polytechnique qui permet de déterminer la partie algébrique de l'intégrale, sans supposer connues les racines du dénominateur de la fonction rationnelle, et application à l'intégrale $\int \frac{dx}{x^5+5px^3+q}$; formules de réduction relatives aux intégrales des différentielles rationnelles.

Jarolímek (*V.*). — Sur la projection de la ligne d'intersection de deux surfaces de rotation et de second ordre sur un plan principal commun. (179-190).

Weyr (*Émile*). — Sur la projectivité cyclique. (191-212, 265-281).

Transformations projectives cycliques sur une droite, dans le plan et dans l'espace, cas spéciaux, divisions homographiques cycliques sur une conique. Une transformation projective cyclique d'ordre $n = pq$ se compose de deux transformations cycliques d'ordres p et q. Transformation cyclique dans le plan et d'ordre 3, triangles qui se trouvent en position perspective de trois manières différentes, coniques circonscrites à ces triangles. Transformations projectives cycliques dans le plan et de l'ordre 4 et 5; celles de l'ordre $n > 5$ déterminent des groupes de n points situés sur une conique.

Koláček (*François* D[r]). — Sur les électromètres. (251-265).

L'auteur donne une description brève des principaux électromètres, qu'il divise, d'après *Thomson*, en hétérostatiques et idiostatiques. La théorie concise qu'il ajoute à cette description devient très simple et très claire par l'emploi conséquent du principe de l'énergie; mais le mérite principal de l'auteur consiste dans une foule de remarques délicates et judicieuses. Il montre, par exemple, comment on peut remédier au défaut de symétrie qui gêne l'observateur dans l'emploi des électromètres à quadrant, construits avec moins de précision.

Bobek (*Charles*). — Sur le lieu géométrique des points d'inflexion des courbes d'un faisceau. (283-284).

Le faisceau étant constitué par des courbes de degré n, le lieu cherché est une courbe K de degré $6(n-1)$; chaque point base du faisceau, étant un point d'inflexion pour trois courbes du faisceau, est un point triple de K. Cette courbe possède, en outre, $3(n-1)^2$ points doubles, à savoir les points doubles des courbes du faisceau, de sorte que la classe de K est $6(n-2)(4n-3)$.

Weyr (*Ed.*). — Sur les fonctions symétriques des racines d'une équation. (285-288).

Pour exprimer la fonction symétrique $\varphi = \Sigma\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}\ldots\alpha_n^{\lambda_n}$ des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

par les coefficients $a_1, \ldots, a_n$, on a d'abord, puisque φ est isobarique,

$$p\varphi = a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_n};$$

on montre ensuite que les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}$ peuvent être mises sous la forme de fonctions entières symétriques de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et d'un degré moindre que celui de φ, et en opérant de même sur elles, on arrive enfin à des constantes ou à la fonction linéaire $\Sigma\alpha = -a_1$.

Zenger (*Ch.-V.*). — Calcul des racines des équations numériques à l'aide des logarithmes. (288-291).

En partant d'une valeur approchée u d'une racine réelle u' de l'équation à coefficients réels

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

l'auteur pose $\frac{x}{u} = y$, $\frac{x}{u'} = y'$, ce qui donne pour y et y' les équations

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$
$$y'^n + a'_1 y'^{n-1} + \ldots + a'_n = 0,$$

les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant respectivement $\frac{A_1}{u}, \frac{A_2}{u^2}, \ldots, \frac{A_n}{u^n}$, valeurs qu'on calcule facilement à l'aide des logarithmes. La seconde équation possédant la racine 1, on a

$$1 + a'_1 + \ldots + a'_n = 0.$$

En remplaçant u par $u + du$, où du désigne $u' - u$, les valeurs $a_1, \ldots, a_n$ deviennent $a'_1, \ldots, a'_n$, de sorte que les accroissements $da_1, \ldots, da_n$ satisfont à la relation

$$1 + a_1 + da_1 + \ldots + a_n + da_n = 0.$$

Dans cette relation, l'auteur remplace les accroissements par des différentielles qu'il tire des équations

$$\log a_1 = \log A_1 - \log u, \qquad \log a_2 = \log A_2 - 2\log u, \qquad \ldots$$

et obtient ainsi pour du la valeur approchée

$$du = \frac{u\varepsilon}{\varepsilon - 1 + a_1 + 2a_2 + \ldots + (n-1)a_n},$$

ε désignant la somme $1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Il opère ensuite avec la valeur corrigée $u + du$ de la même manière, etc.

Lerch (*M.*). — Remarque sur la fonction $\frac{\sin x}{x}$. (292-294).

L'auteur met cette fonction sous la forme du produit infini

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots,$$

et applique ce résultat à la détermination du centre de gravité d'un arc de cercle.

Le tome contient, en outre, des articles destinés exclusivement aux élèves, des questions et leurs solutions, ces dernières données par des élèves, et des aperçus sur des publications scientifiques.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI (1).

Tome XVIII, année 1885.

Favaro (*Antonio*). — Documents inédits pour l'histoire des manuscrits galiléens à la Bibliothèque nationale de Florence.

Lettres de Vincent Galilée à V. Viviani, de V. Viviani à Alph. Borelli, de Vincent Renieri à V. Viviani, de Come Galilée à V. Viviani, de G.-B. Barducci au Grand-Duc de Toscane, de Charles Mandessi à V. Viviani, d'Erasme Bartholin à V. Viviani, de V. Viviani à Erasme Bartholin, d'Elie Diodati à V. Viviani, d'Elie Diodati au Grand-Duc de Toscane, de V. Viviani à Thévenot, de Robert Southwell à V. Viviani, de Jacques Marucelli à V. Viviani, de Michel Ange Ricci à V. Viviani, de Constance Pompée à V. Viviani, de Marius Sampieri à V. Viviani, de Vincent Santini à V. Viviani, de V. Viviani à Rinaldo Rinaldi, de V. Viviani à Baccio Maria Tolomei, de B.-M. Tolomei à V. Viviani, de Thomas Buonaventuri à Joseph Averani, de Benoît Bresciani au P. Guido Grandi, de Thomas Buonaventuri au P. Guido Grandi. Documents divers sur les maJ nuscrits recueillis par Nelli.

Genocchi (*Angelo*). — Sur les résidus cubiques et biquadratiques.

Genocchi (*Angelo*). — Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers (*Comptes rendus*, 16 février 1880).

Genocchi (*Angelo*). — Sur quelques théorèmes qui peuvent conduire à la loi de réciprocité de Legendre.

Kronecker (*Léopold*). — Sur l'histoire de la loi de réciprocité (traduction italienne d'Alph. Sparagna).

Biadego (*G.-B.*). — Sur la vie et les travaux d'Albert Castigliano, né le 8 novembre 1847, mort le 25 octobre 1884, ingénieur.

Boncompagni (*B.*). — Catalogue des travaux d'Albert Castigliano.

Favaro (*Antonio*). — Conclusions sur l'académicien inconnu,

---

(1) Voir *Bulletin*, XI_2, 132.

l'adversaire de Galilée, à propos de son *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono.*

Cet académicien serait Mgr Arthur Pannocchieschi, des comtes d'Elci, provéditeur de l'Université de Pise.

Favaro (*Antonio*). — Récension du *Nicolaus Copernicus* de Léopold Prowe, tome II.

Eneström (*Gustave*). — Notice bibliographique sur les traductions en suédois des *Éléments d'Euclide.*

Steinschneider (*Maurice*). — Continuation des études sur Zarkali.

Favaro (*Antonio*). — Appendice sur la vie et les œuvres de Prosdocimus de Beldomandis, mathématicien padouan du XVe siècle.

Marre (*Aristide*). — Notice sur la vie et les travaux de François Joseph Lionnet. Catalogue de ces travaux.

Bertauld (*P.-A.*). — Récension du *Nombre géométrique de Platon,* seconde interprétation par J. Dupuis.

Le Paige (*C.*). — Récension du Mémoire de Maurice d'Ocagne : *Coordonnées parallèles et axiales.* Gauthier-Villars, 1885.

Forti (*Angelo*). — Notices historiques sur les taches solaires.

Catalan (*Eugène*). — Polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli.

Eneström (*Gustave*). — Sur un théorème de Goldbach.

Indications de l'endroit de la *Correspondance mathématique et physique*, I, p. 135, qui présente le théorème : « Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. »

Henry (*Charles*). — Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot, Castillon, Beguelin, etc., avec Notice.

Cette Correspondance, qui renferme cent treize lettres inédites, est suivie de la liste des travaux mathématiques inédits de d'Alembert.

Genocchi (*A.*). — Sur le développement d'un lemme de Gauss.

Porro (*François*). — Sur la vie et les écrits de Joseph Zecchini Leonelli, géomètre de Crémone.

Né vers 1776, mort vers 1867, il est l'inventeur des Tables de logarithmes, qui permettent de trouver immédiatement le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres dont les logarithmes sont donnés grâce à l'identité

$$a+b=a\left(1+\frac{a}{b}\right),$$

et à la formule

$$\log(a+b)=\log a+\log\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

Tome XIX, année 1886.

Favaro (*Antonio*). — Quelques documents sur Galilée, récemment découverts à la Bibliothèque nationale de Florence.

Un appendice contient le Catalogue des manuscrits de B.-C. Nelli, incorporés dans la collection des manuscrits de Galilée qui fut conservée d'abord à la Bibliothèque Palatine et se trouve maintenant à la Bibliothèque nationale de Florence.

Genocchi (*Angelo*). — Quelques mots sur la vie de l'ingénieur Savino Réalis, né à Turin le 10 octobre 1818, mort à Turin le 9 février 1886.

Riccardi (*P.*). — Note sur une collection complète des Œuvres mathématiques de Lorenzo Mascheroni.

L'auteur appelle l'attention sur les Mémoires suivants : *Étude d'une propriété de la courbe isochrone; Manière de mesurer l'inclinaison de l'aiguille aimantée; La courbe des heures des anciens sur une surface plane,* et sur le cadran solaire que Mascheroni construisit en 1776 pour l'histoire de la Gnomonique.

Il faut citer encore son *Traité de l'équilibre des voûtes,* ses *Notes sur les cours de Bossut,* la *Méthode pour mesurer la surface des polygones plans.* On possède encore de lui de très belles Notes sur le *Traité de Calcul intégral d'Euler,* accompagnant la solution d'un problème de ce géomètre, des Notes sur les *Éléments des Mathématiques* de Wolf, un Livre de problèmes pour les arpenteurs, avec des formules empiriques, une lettre sur l'Hydraulique, imprimée dans l'*Ultima verba de Querini* et aussi rare que ce Livre lui-même, la *Géométrie du compas,* enfin une Notice *Sur le système des poids et mesures.*

Outre ces œuvres, Mascheroni a laissé un nombre important de manuscrits possédés par la comtesse Chiara Barca Albani, et par la bibliothèque de Bergame.

Favaro (*Antonio*). — Recherches ultérieures sur la vie et les œuvres de Bartolomeo Sovero, mathématicien suisse du XVIIe siècle.

Bartolomeo Sovero, lecteur et bibliothécaire du cardinal de Savoie, succéda à Maggini comme lecteur à la deuxième chaire de Mathématiques à Bologne. Cette place avait été refusée par Kepler, et le Sénat de Bologne aima mieux la laisser inoccupée que de la donner à un maître incapable de soutenir la renommée de la chaire illustrée par Galilée.

Dans des lettres échangées entre Galilée et Cesare Marsili, il est fait mention des recherches de Bartolomeo Sovero sur les *Artifices à employer pour augmenter le poids qu'un aimant peut soutenir,* question qui avait occupé Galilée vers 1604 ou 1607.

Favaro (A.). — Récension de l'*Optique de Claude Ptolémée,* par Ammiratus Eugenius Siculus, écrivain du XII[e] siècle, traduite en latin sur la traduction arabe d'un texte grec incomplet, conforme à un manuscrit de la Bibliothèque Ambrosiana, publiée sur une délibération de l'Académie des Sciences de Turin par Gilbert Govi, membre de cette Académie. Turin, imprimerie royale Paravia et Vigliardi.

Realis (Savino). — Notice sur Giovanni Plana, né à Voghera, le 8 novembre, 1781, mort à Turin le 20 janvier 1684.

Henry (Ch.). — Sur quelques billets inédits de Lagrange.

Outre ces billets, l'auteur publie une belle lettre de d'Alembert à M[me] Geoffrin (7 janvier 1754) pour lui recommander Lagrange qui était tombé malade lors de son passage à Paris en 1754.

Henry (Ch.). — Lettres inédites d'Euler à d'Alembert.

La première et la deuxième de ces six lettres contiennent des réflexions intéressantes sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

Henry (Ch.). — Lettres inédites de Laplace publiées avec une première rédaction de sa méthode pour déterminer les orbites des comètes et une Notice sur les manuscrits de Pingré.

Favaro (Antonio). — La bibliothèque de Galilée. Description et éclaircissements.

Les pensées intimes de Galilée, pour la plus grande part, se trouvent éparses dans des Ouvrages qu'il a annotés et qui sont presque tous perdus. Il était donc utile de donner une liste exacte des livres que posséda Galilée. Une partie devint la possession de Vincenzo Viviani, puis passa à la bibliothèque de l'hôpital de Santa Maria Nuova, à Florence, par suite de dispositions testamentaires. Le fonds, excepté les Ouvrages de Médecine, appartint ensuite à la bibliothèque Magliabechiana et rentra définitivement à la bibliothèque de Florence qui avait fusionné avec la précédente. Viviani ne put donner qu'un aperçu de la bibliothèque de Galilée.

Un inventaire des machines et outils de Galilée, datant de 1641, faisant partie des archives de la famille, est conservé dans les Archives royales de Florence.

Il y est fait mention de quarante fragments de livres; mais ces fragments ne pouvaient constituer le fonds de sa bibliothèque. On n'a pas trouvé non plus l'inventaire des objets qui se trouvaient au moment de sa mort dans sa maison de la côte Saint-Georges, parce que les deux habitations qu'il possédait étaient inscrites au nom de son fils Vincent et non au sien. Il faut chercher la source principale dans les manuscrits de Galilée à la Bibliothèque nationale de Florence, avec des ouvrages imprimés de lui ou d'autres écrivains portant des corrections de sa propre main.

M. Favaro catalogue ces Livres sous les rubriques suivantes :

I. Œuvres de Galilée. — II. Théologie. — III. Philosophie. — IV. Morale. — V. Astronomie. — VI. Astrologie et Philosophie occulte. — VII. Cosmographie. — VIII. Sciences naturelles. — IX. Optique et Catoptrique. — X. Mathématiques en général. — XI. Traités de Mathématiques. — XII. Traités spéciaux de Mathématiques. — XIII. Mécanique et Hydraulique. — XIV. Médecine. — XV. Agriculture. — XVI. Jurisprudence. — XVII. Critique littéraire. — XVIII. Grammaire et Rhétorique. — XIX. Classiques latins. — XX. Classiques italiens. — XXI. Poésies diverses. — XXII. Drames. — XXIII. Romans. — XXIV. Histoire. — XXV. Fêtes et spectacles. — XXVI. Architecture. — XXVII. Musique. — XXVIII. Art industriel. — XXIX. Incerta?

Narducci (*Enrico*). — Vies inédites des mathématiciens italiens par Bernardino Baldi.

Dupuis (*F.*). — Note sur un passage géométrique de la République de Platon.

Ce lieu géométrique se trouve à la fin du IXe Livre.

Dupuis (*F.*). — Note sur un passage géométrique du Ménon de Platon.

Ce passage a donné lieu à de nombreuses controverses. M. Ch. Henry a publié dans le volume suivant de cette Revue (1887) une solution jusqu'ici ignorée et due à l'illustre Wœpcke, qui paraît devoir mettre fin à la discussion.

Tome XX et dernier; année 1887.

Steinschneider (*Maurice*). — Études sur Zarkali, astronome arabe du XIe siècle et ses Ouvrages [1].

D'après Delambre, Zarkali est l'auteur des *Tables toletanes*. Ces Tables seraient au contraire le résultat des observations commentées par une société de

(1) *Voir* le même *Bullettino*, t. XIV, mars 1881; t. XVI, septembre 1883; t. XVII, novembre 1884; t. XVIII, juin 1885.

savants juifs et arabes, encouragés par le kadi Sâid ibn Sâid. Zarkali n'aurait donc composé que les *Canones*. L'auteur énumère les manuscrits qui renferment probablement les *Canones*, en Angleterre, en France et en Italie, puis ceux épars dans les bibliothèques de Bâle, de l'Escuriale et de Groningen. Il réunit également les écrits du moyen âge faisant mention des Tables astronomiques de Tolède ou des Canones et divise les renseignements selon les sources arabes, hébraïques et chrétiennes.

Jacoli (*Ferdinand*). — Récension des Lettres inédites de Tycho-Brahé, Jean Kepler et d'autres astronomes et mathématiciens célèbres des XVIe et XVIIe siècles à Giovanni Antonio Maggini, extraites de la bibliothèque Malvezzi de Médicis à Bologne, publiées avec des éclaircissements par Antonio Favaro (Bologne, Nichola Zanichelli, 1886).

Favaro (*Antonio*). — Documents pour l'histoire de l'Académie des Lincei. Nouveaux manuscrits de Galilée, de la Bibliothèque Nationale de Florence.

Sur la demande du prince B. Boncompagni, le professeur Favaro a entrepris de réunir les documents relatifs à l'histoire de cette Académie, qui doit surtout sa réputation au nom de Galilée. Cette publication renferme :

I. Le Catalogue des documents contenus dans la troisième division des manuscrits de Galilée;

II. L'*Histoire de l'Académie des Lincei,* par Giovanni Battista Clemente Nelli.

III. Le Catalogue des Lettres échangées entre Galilée et Cesi, Giovanni Faber, Cesar Marsili, Marco Velsero.

IV. Trente et une Lettres inédites on non entièrement connues de Frédéric Cesi à Galilée, extraites des manuscrits de Galilée à la Bibliothèque nationale de Florence.

Narducci (*Enrico*). — Vie de Pythagore, écrite par Bernardino Baldi.

Les éléments essentiels de cette biographie ont été repris par la critique moderne.

Favaro (*Antonio*). — Giovanni Tarde. Une de ses visites à Galilée du 12 au 15 novembre 1614.

Giovanni Tarde, né à Roque-Gayac, près Sarlat, vers 1561, vicaire et chanoine de Sarlat, s'associa aux progrès que les sciences firent au XVIe siècle, par ses études astronomiques. Cette visite à Galilée le fixa dans la voie qu'il devait suivre. Au cours de la conversation, l'illustre savant apprit à Tarde que les quatre satellites qui accompagnaient Jupiter et appelés *Sidera Medicea* par son *Sidereus nuntius* étaient des étoiles fixes et qu'il en avait dressé des éphé-

mérides. Interrogé sur les réfractions et les moyens de former le cristal du télescope, Galilée répondit que cette science était peu connue et que, à part ceux qui s'occupaient de perspective, F. Keppler était le seul *qui eût fait un livre sur ce sujet, mais si obscur, que l'auteur lui-même semblait ne pas s'y être entendu.*

Tarde a laissé de ce voyage à Rome une relation contenant une étude sur les taches du Soleil et les moyens de les apercevoir, le matin au lever de l'astre, et à l'aide de l'image produite par le télescope et recueillie dans une chambre obscure. Il s'occupa également de la construction d'un microscope. La bibliothèque de Florence possède de lui un Ouvrage très rare : *Borbonia sidera, id est planetæ qui solis limina circumvolant motu proprio ac regulari, falso hactenus ab helioscopis maculæ solis nuncupati. Ex novis observationibus.* Ce Livre a été traduit sous ce titre en 1623 : *Les astres de Borbon et apologie pour le Soleil, monstrant et vérifiant que les apparences qui se voient dans la face du Soleil sont des planètes et non des taches comme quelques italiens et allemands observateurs d'icelles luy ont imposé.*

La seconde Partie, qui est la plus importante, se compose de cinquante-quatre propositions résumant les principes d'Optique et s'intitule : *Telescopium, seu demonstrationes opticæ, quibus docetur qua ratione perspicilla nuper inventa species visibilium admoveant et augeant, oculosque juvent ad remota distincte videnda.*

Favaro (A.). — Appendice au Catalogue de la Bibliothèque de Galilée. Description et éclaircissements (¹).

Favaro (A.). — Récension de la Bibliographie générale de l'Astronomie, par *J.-C. Houzeau*, ancien directeur de l'Observatoire de Bruxelles, et *A. Lancaster*, bibliothécaire de cet établissement. F. Hayez, imprimerie de l'Académie Royale de Belgique, Bruxelles.

Favaro (A.). — Récension de la Science romaine à l'époque d'Auguste, étude historique d'après Vitruve, par *A. Terquem*, professeur à la Faculté des Sciences de Lille ; extrait des Mémoires de la Société des Sciences de l'Agriculture et des Arts de Lille. Paris, F. Alcan, éditeur.

Henry (C.). — Lettre à M. le prince D. B. Boncompagni sur divers points de l'histoire des Mathématiques.

(¹) *Voir* le tome XIX du même *Bullettino*.

1° Discussion du passage géométrique de Ménon. — L'auteur fait connaître une remarquable interprétation due à Wœpeke (*Zeitschrift für das Gymnasial-Wesen, herausgegeben von W. Hirschfelder, F. Hofman, P. Rühle. X. Jahrgang*. 1856, Berlin, Weidmansche Buchhandlung, p. 789).

2° Quelques observations sur l'histoire des mathématiques hindoues se rapportant aux *Vorlesungen zür Geschichte der Mathematik* de M. Cantor. Les chiffres indiens ne sont pas les initiales des noms de nombres, et Aryabhata connaissait la valeur de position dans la numération.

3° Sur l'origine des signes des planètes. — L'hypothèse de M. Cunningham qui soude deux éléments comme une lettre de l'alphabet d'Açoka et une étoile est en contradiction perpétuelle avec la linguistique.

4° Sur des notations de chiffres répandues dans certaines contrées de l'Allemagne pour le jeu du « Franzenfuss » et chez les juifs polonais pour le jeu du « Derdé ».

5° Documents nouveaux sur la machine arithmétique de Pascal. M. Charles Richet a communiqué à l'auteur de cette Note une copie du traité de Pascal sur la *machine arithmétique*, beaucoup plus développée que dans l'imprimé. Dans sa lettre à Christine de Suède, Pascal parle des *règles de l'usage de sa machine*. Bossut n'a pu les retrouver : or « il est incontestable qu'il a eu entre les mains les manuscrits inédits de Pascal. La copie de M. Richet est certainement de la seconde moitié du XVIIIe siècle et les annotations marginales sont des collations avec un original. Le style est tout à fait conforme au XVIIe siècle; l'exposition est beaucoup plus complète que celle de Diderot. En résumé, nous sommes en présence d'un inédit de Pascal, parvenu sans doute trop tard pour qu'il pût l'insérer dans son édition. »

6° M. Henry a retrouvé à la Bibliothèque nationale de Florence (*Discepoli di Galileo* XL f° 79-80), parmi les documents concernant Torricelli, les énoncés suivis de leur solution géométrique des problèmes suivants qui n'ont d'autre intérêt que de fixer un point de la biographie de leur auteur : Diviser une droite en deux parties : 1° de manière que la différence des carrés soit dans un rapport donné avec le rectangle compris entre ces deux mêmes parties; 2° de manière que le rectangle compris entre la droite entière et le plus petit segment soit dans un rapport donné avec la différence des carrés des segments. La date de 1630 pour un document antérieurement publié par M. Henry, document qui les accompagnait probablement et dont la date était restée douteuse, est confirmée par le caractère élémentaire de ces problèmes.

7° M. Jordan, dans son cours d'*Analyse de l'École Polytechnique*, expose la méthode par laquelle M. Halphen est parvenu à l'équation différentielle des coniques :

$$-40y'''^3 + 45y''y'''y^{\text{IV}} - 9y''^2y^{\text{V}} = 0.$$

Or cette formule n'est pas nouvelle. M. le professeur W. W. Beman de l'Université de Michigan, U. S., annonça dans une lettre du 3 avril 1886 à M. Sylvester que la formule avait été retrouvée à la bibliothèque du Collège de Yale dans le Mémoire de Monge « Sur les équations différentielles des courbes du second degré » (Correspondance sur l'École impériale Polytechnique, rédigée par M. Hachette, 1er cahier du 2e vol., 1810; pages 51-54 et dans un résumé de ce Mémoire publié par le nouveau *Bulletin des Sciences* de la Société philomathique de Paris, tome II, 1810, pp. 87-88). Voici ce résumé fondamental pour l'histoire des réciproquants.

« L'équation générale des courbes du second degré étant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D sont des constantes, M. Monge donne l'équation différentielle débarrassée de toutes ces constantes et parvient à l'équation du cinquième ordre

$$(\text{A}) \qquad 9q^2t - 45\,qrs + 40\,r^3 = 0,$$

les quantités r, s, t étant définies par les équations suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = q, \qquad \frac{dq}{dx} = r, \qquad \frac{dr}{dx} = s, \qquad \frac{ds}{dx} = t.$$

Il fait ensuite voir l'usage de l'équation (A) pour trouver l'intégrale d'une équation d'un ordre inférieur qui satisfait à cette équation (A) ; ainsi, étant donnée l'équation différentielle

$$(1 + p^2)\, r = 3pq^2,$$

il parvient à l'intégrale

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

qui est l'équation d'un cercle. La méthode pourrait s'appliquer aux équations des courbes d'ordre supérieur au second. »

M. le professeur Cayley, en une lettre que M. Sylvester a bien voulu communiquer à l'auteur de cette Notice, a signalé une formule réciproquante dans un Mémoire d'Ampère : *Sur les avantages qu'on peut retirer dans la théorie des courbes de la considération des paraboles osculatrices, avec des réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1808, t. VII, page 173).

Cet illustre géomètre y donne pour le rayon de courbure l'expression

$$-\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

pour le paramètre de la parabole osculatrice

$$-\frac{54\,y''^5}{[y'''^2 + (3y''^1 - y'y''')^3]^{\frac{3}{2}}},$$

et pour le premier terme de l'équation qui détermine la position des paraboles osculatrices, la quantité

$$\frac{5y'''^2 - 3y''y'''}{(1 + y^2)^4},$$

toutes fonctions qui ne peuvent changer par aucune transformation des axes.

8° L'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

z étant quelconque, a été résolue par Pythagore, x étant impair, par Platon, x étant pair, par Euclide x et y étant tous deux pairs ou impairs.

On trouve chez un arpenteur romain, Marcus Junius Nipsus, une solution de l'équation

$$x^2 - y^2 = z^2,$$

par un artifice analogue à celui de Diophante [1].

1° Soit z pair, $\frac{1}{2}z$ sera entier, ainsi que $\frac{1}{4}z^2$. Faites

$$x = \frac{1}{4}z^2 + 1, \qquad y = \frac{1}{4}z^2 - 1,$$

x et y seront les nombres demandés.

2° Soit z impair, z^2 sera impair, $z^2 \pm 1$ sera pair. Faites

$$x = \frac{1}{2}(z^2 + 1), \qquad y = \frac{1}{2}(z^2 - 1),$$

x et y seront les nombres demandés.

Le problème de Nipsus est reproduit avec d'autres chiffres par Abou-Bekr-Mohammed-ben-Alhaçan-Alkarkhi.

Les règles de Pythagore et de Platon se retrouvent dans des fragments anonymes sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, dont Wœpcke publia la traduction dans ses *Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince B. Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces Ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes.*

Les auteurs énoncent, en termes explicites, le problème des nombres congruents, lequel consiste à résoudre le système des deux équations

$$s^2 + k = u^2, \qquad s^2 - k = v^2,$$

s^2 étant le carré inconnu et k un nombre donné appelé *congruent*. Ils observent que les deux équations dépendent de la résolution de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

ou de la théorie des triangles rectangles en nombres; car, en faisant

$$x = a^2 - b^2, \qquad y = 2ab, \qquad z = a^2 + b^2,$$

a et b étant premiers entre eux, l'un pair, l'autre impair, ils ont

$$s = z, \qquad k = 2xy, \qquad u = x + y, \qquad v = x - y,$$

et, conséquemment, l'expression du nombre congruent est

$$k4 = 4ab(a^2 - b^2).$$

---

(1) *Journal des Savants*, 1849. (Art. de Biot.)

L'un des auteurs a calculé une Table des expressions $2xy$ et il trouve dans les limites $5 - 10374$ avec les conditions $b < a$, l'un quelconque étant pair ou impair et ces nombres étant premiers entre eux, vingt-neuf nombres congruents primitifs. M. Henry fait observer qu'il y en a 30 : pour $a = 10$, $b = 9$, il note $190 = 6840 : 36$; 6840 est congruent pour $x = 19$, $y = 180$, $z = 181$. Il serait curieux de savoir si la faute est de l'auteur arabe ou un oubli du traducteur.

Marre (*Aristide*). — Théorème du carré de l'hypoténuse.

M. Charles Whish a extrait du *Sastra* sanscrit, intitulé *Youcti Bâcha*, une démonstration qui, selon lui, a pu être connue de Pythagore.

Colebrooke, le célèbre traducteur de Brahmagupta, a fait connaître une démonstration ingénieuse basée sur le développement du carré de $a - b$. On arrive à

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Le développement de $(a + b)^2$ fournirait

$$c^2 = (a + b)^2 - \frac{4ab}{2} = a^2 + b^2.$$

Saunderson, le mathématicien aveugle, l'une des célébrités de l'Université de Cambridge, donne une résolution tenant des deux procédés précédents,

$$c^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2} = a^2 + b^2.$$

Schram (Dr *Robert*). — Notice sur les travaux d'Oppolzer avec liste de ses publications. Traduit de l'allemand par le Dr E. Pasquier.

Théodore d'Oppolzer, né à Prague le 26 octobre 1841, commença à étudier la Médecine à Vienne en 1859, tout en s'occupant d'Astronomie. En 1861, il publiait dans les *Astronomische Nachrichten* son premier travail astronomique, *Ueber die Bahn der Kometen*. En mars 1866, il devenait privat-docent du cours d'Astronomie théorique.

De 1856 à 1870, il publia un grand nombre de travaux dans les *Sitzungsberichte der Wiener Akademie* et dans les *Astronomische Nachrichten*. Dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1867, et intitulé *Ueber die Bestimmung der Kometenbahn,* il exposa la méthode bien connue pour déterminer une orbite cométaire.

Il faut citer le *Lehrbuch zur Bestimmung der Kometen und Planeten,* où il expose une méthode pour déterminer une orbite à l'aide de 3 ou 4 points (1870). La même année, il fut nommé professeur extraordinaire d'Astronomie et de Géodésie à l'Université de Vienne, et c'est à lui qu'est dû l'essor des travaux géodésiques en Autriche. En 1879, il publia la *Neue Methode zur Bestimmung der Bahnelemente gleicher Wahrscheinlichkeit für einen Planeten* (1).

---

(1) *Voir* dans le *Bulletin astronomique,* janvier 1887, un article de M. Lœwy.

Dans le *Canon der Finsternisse,* on trouve la détermination des éclipses de Lune durant 33 siècles, depuis 1203 avant J.-C. jusqu'en 2163 après J.-C. Il mourut le 26 décembre 1886.

Appendice. — Liste complète des publications d'Oppolzer de 1861 à 1886.

Bartelli Barnabita (*P. Timoteo*). — De quelques théories et recherches électrosismiques.

Steinschneider (*Maurice*). — Études sur Zarkali. Appendice.

Riccardi (*P.*). — Sur le traité de la Quadrature du cercle de Jean-Baptiste Porta.

Govi (*Gilbert*). — De l'invention du micromètre pour les instruments astronomiques.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XIII.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XIII; 1889. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica; t. IV, 1884. — T. V, 1884. — 93-116.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse; T. II, 1887. — 156-166.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles; 9e année, 1884, 1885. — 10e année, 1885, 1886. — 18-24.

Annales des Mines; 8e série, t. IX, 1er semestre, 1886. — T. X, 2e semestre, 1886. — T. XI, 1er semestre, 1887. — T. XII, 2e semestre, 1887. — T. XIII, 1er semestre, 1888. — T. XIV, 2e semestre, 1888. — 190-197.

Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; t. LI, 1885. — 5-6.

Atti della reale Accademia dei Lincei; t. III, 1887, 1er semestre. — T. III, 1887, 2e semestre. — 167-171.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino; t. XXI, 1885-86. — T. XXII, 1886-87. — 179-184.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche; T. XVIII, 1885. — T. XIX, 1886. — T. XX, 1887. — 212-223.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 3e série, t. IX, janvier à juin, 1885. — T. X, juillet à décembre, 1885. t. XII, juillet à décembre, 1886. — 6-18.

Bulletin de la Société mathématique de France; T. XV, 1887. — 197-204.

Časopis pro pěstování Mathematiky a Fysiky, který se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje, Ročník XI, X, 1881, 1882. — 205-211.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; t. CV, 1887. — 35-58.

Mathematische Annalen; t. XXVII, 1886. — T. XXVIII, 1886, 1887. — T. XXIX, 1887. — 18-19.

Mathesis. — Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne; t. VI, 1886. — 30-35.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; t. XXVII, 1886. — T. XXVIII, 1886. — T. XXIX, 1886. — 26-27.

Mémoires couronnés et Mémoire des Savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; t. XLVII, 1886. — T. XLVIII, 1886. — 27-28.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; t. XLVI, 1886. — 28-29.

Memorie della reale Accademia delle Scienze di Torino; 2e série, t. XXV, 1871. — T. XXVI, 1877. — T. XXVII, 1873. — T. XXVIII, 1876. — T. XXIX, 1878. — T. XXX, 1878. — T. XXXI, 1879. — T. XXXII, 1880. — T. XXXIII, 1881. — T. XXXIV, 1883. — T. XXXV, 1884. — T. XXXVI, 1885. — T. XXXVII, 1886. — T. 1888. — 171-179.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège; 2e série, t. XII, 1885. — T. XI, 1885. — 24-26.

Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1er semestre, 1885. — 2e semestre, 1885. — [illegible]

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XIII.

14950 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.